経路積分と量子解析

第4回

いかにして量子現象を数理的に扱うか

古典力学から量子力学へ(3)

非線形散逸系の変分原理と経路積分量子化

鈴木 増雄

4.1 はじめに

前回[1)]は，線形の散逸系の変分原理を与えるラグランジアンを発見法的に導出した．今回は，その結果を簡潔な表式に書き直し，物理的な解釈をし易くする．このような新しくわかり易い定式化を用いて，未解決の問題として残されていた“非線形散逸系の変分原理を与える散逸ラグランジアンの構成”という課題を肯定的に解説する．これらのラグランジアンを用いると，散逸系の経路積分量子化が可能となる．その定式化を用いて，散逸系の不確定性関係式を導くことができる．これらの議論には，経路に依存した散逸ラグランジアンの時間積分としての作用の変分をとるという新しい数学的手段が必要になる．この数理的な取扱いについても詳しく説明する．

4.2 線形散逸系における物理的ラグランジアンの簡潔な表式

散逸系のラグランジアンには，単に数学的なものから，エネルギー散逸（発熱）を表す物理的な表式までいろいろある．任意の正の数 τ と解析関数 $x(t)$ に対して，恒等式

$$\int_0^\tau \mathscr{L}_{\rm diss}^{(\rm math)}(t)dt = \int_0^\tau \mathscr{L}_{\rm diss}(t)dt \tag{4.1}$$

を満たせば，どの表式 $\mathscr{L}_{\rm diss}(t)$ も変分原理のラグランジアンになり得る[1)]．変関数 $x(t)$ に対する散逸的な運動方程式

$$m\ddot{x}(t) + \zeta\dot{x}(t) - F(x) = 0 \tag{4.2}$$

を変分原理で与えるラグランジアンは，前回ふれた通り[1)]，$\gamma = \frac{\zeta}{m}$ として

$$\mathscr{L}_{\mathrm{diss}}^{(\mathrm{math})}(t) = \mathrm{e}^{\gamma(t-\tau)}\mathscr{L}_{\mathrm{dyn}}(t);\ \mathscr{L}_{\mathrm{dyn}}(t) = \frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 - V(x(t)) \tag{4.3}$$

で与えられるが，これは数学的な表式に過ぎず，物理的なものとは言えない[1)]．このままでは，熱の発生と直接結びつかないからである．そこで，式 (4.1) を満たす（作用としては同じ値を与える）ような表式で，なおかつ熱の発生の効果

$$\zeta\int_0^t \dot{x}(s)^2 ds = (\text{粘性抵抗力}) \times (\text{距離})$$

を顕わに示すような物理的ラグランジアンをもう一度議論する．前回述べた物理的な散逸ラグランジアンの散逸項 $W_{\mathrm{diss}}(t) = \mathscr{L}_{\mathrm{diss}}(t) - \mathscr{L}_{\mathrm{dyn}}(t)$ は次のような多重積分の無限級数

$$W_{\mathrm{diss}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\zeta}{m}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} \mathscr{L}_{\mathrm{dyn}}(t_n)dt_n \tag{4.4}$$

で表され[1)]，第 1 項

$$W_{\mathrm{diss}}^{(1)}(t) = -\frac{\zeta}{2}\int_0^t \dot{x}(s)^2 ds + \gamma\int_0^t V(x(s))ds \tag{4.5}$$

以外の高次の項は扱いにくく，あまり実用的な表式でない．それらの高次の項は，第 1 項 $W_{\mathrm{diss}}^{(1)}(t)$ へのくり込みの効果を表すものと考えられるが[1)]，より物理的解釈のできる簡潔な表式が欲しい．実は，前回述べた通り，数学的ラグランジアンと物理的ラグランジアンを議論する際に，次の多重積分の変換公式が大きなヒントになった．

公式 4.1　任意の解析関数 $f(t)$ に対して次式が成り立つ：

$$\int_0^{\tau} dt \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n = \frac{1}{n!}\int_0^{\tau}(\tau - t)^n f(t)dt. \tag{4.6}$$

上の公式 4.1 をさらに一般化するには，次の公式が役に立つ．

公式 4.2　任意の 2 つの解析関数 $f(t)$ と $g(t)$ に対して次式が成り立つ：

$$\int_0^{\tau} g(\tau - t)f(t)dt = g(0)\int_0^{\tau} f(t)dt + \int_0^{\tau} dt \int_0^t g^{(1)}(t-s)f(s)ds. \tag{4.7}$$

これを証明するには，よく知られている方法であるが，両辺を τ で微分したものが等しいことを確めればよい（$\tau = 0$ に対して両辺が等しいことは明らかである）．この公式 4.2 を漸化的にくり返すと，次の公式が容易に導かれる．

公式 4.3　任意の自然数 n と任意の 2 つの解析関数 $f(t)$ と $g(t)$ に対して次式が成り立つ[2)]：

$$\begin{aligned}\int_0^{\tau} g(\tau - t)f(t)dt &= \int_0^{\tau} dt \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{n-1}} g^{(n)}(t_{n-1} - t_n)f(t_n)dt_n \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} g^{(k)}(0)\int_0^{\tau} dt \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{k-1}} f(t_k)dt_k. \end{aligned} \tag{4.8}$$

特に，$g(t)=t^n$ とおけば，式 (4.6) が得られる．この公式は後で有効に用いられる．さらに，次のように一般化することもできる[2)]．

公式 4.4　任意の解析関数 $f(t,s)$ に対して次式が成り立つ：

$$\int_0^\tau f(\tau,t)dt=\int_0^\tau dt\int_0^t f_t(t,s)ds+\int_0^\tau f(t,t)dt. \tag{4.9}$$

ただし，$f_t(t,s)$ は $f(t,s)$ の t に関する偏微分を表す．

この公式は，2 変数関数 $f(t,s)$ の長方形の領域 $\{0\leq t\leq\tau, 0\leq s\leq\tau\}$ を 2 つの 3 角領域に分割した次の公式から容易に導かれる．

公式 4.5　任意の解析関数 $f(t,s)$ に対して次式が成り立つ：

$$\int_0^\tau dt\int_0^\tau f(t,s)ds=\int_0^\tau dt\int_0^t f(t,s)ds+\int_0^\tau dt\int_0^t f(s,t)ds. \tag{4.10}$$

ここまで一般化すると当り前の公式に見えてしまうが，公式 4.1〜4.5 は大変有用な公式であり，後で有効に用いられる．

ついでながら，これらの公式（いやすべての公式）に共通な特徴は変数 t に時間のような次元を与えて考えると，両辺の次元が一致することである．このことは，物理分野の人にとっては自明のことであるが，数学の公式を捉えるときにも大変役に立つ．例えば，公式 4.1，すなわち式 (4.6) でみると，$(n+1)$ 重積分が 1 重積分に変換されているが，右辺の被積分関数の t の次元は，両辺共通の $f(t)$ の次元を除いて，$(n+1)$ 次元になっており，両辺の次元が一致していることがわかる．逆に，この自明な事実を用いると，式 (4.6) の $f(t)$ にかかる因子 $(\tau-t)^n$ の中が n であることが容易に思い出すことができ，便利である．次元を考えるということは，数式を幾何学的に捉えることにも通じる．例えば，物理でよく使われる定積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}dx=\sqrt{\pi} \tag{4.11}$$

には，π が入っている．これを幾何学的に解釈し，半径 R の円の面積 πR^2 または円周 $2\pi R$ と結びつければ，式 (4.11) の証明法がわかることになる．これもよく知られている通りである（すなわち，式 (4.11) の両辺を二乗して面積分に変換する）．

少し数学の公式に深入りしたが，これらの公式を準備すれば，我々の物理の問題の解決へのヒントが得られる．物理的な散逸ラグランジアン $\mathscr{L}_{\rm diss}^{\rm (phys)}$ は，熱の発生と関係した式 (4.5) からも予想されるように，経路に依存した表式，すなわち時間 t の積分で表されると考えられる．そして，式 (4.1) に対応して，

$$\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\gamma(\tau-t)}\mathscr{L}_{\rm dyn}(t)dt=\int_0^\tau \mathscr{L}_{\rm diss}^{\rm (phys)}(t)dt \tag{4.12}$$

が成り立つはずである．公式 4.2 において $g(t)=\mathrm{e}^{-\gamma t}$ とおいた次の公式を用いることに気づくことが，今の問題を解くキーポイントの一つである．

公式 4.6　任意の解析関数 $f(t)$ に対して次式が成り立つ：

$$\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\gamma(\tau-t)} f(t)dt = \int_0^\tau f(t)dt - \gamma \int_0^\tau dt \int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-s)} f(s)ds. \quad (4.13)$$

こうして，上の式 (4.13) で $f(t) = \mathscr{L}_{\mathrm{dyn}}(t)$ とおき，右辺の t 積分を一つにまとめて，式 (4.12) と比較すれば，次の簡潔な物理的ラグランジアンが求まる：

$$\boxed{\mathscr{L}_{\mathrm{diss}}^{(\mathrm{phys})}(t) = \mathscr{L}_{\mathrm{dyn}}(t) - \gamma \int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-s)} \mathscr{L}_{\mathrm{dyn}}(s)ds. \quad (4.14)}$$

すなわち，散逸ラグランジアンの散逸項 $W_{\mathrm{diss}}(t)$ は

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{diss}}(t) &\equiv \mathscr{L}_{\mathrm{diss}}^{(\mathrm{phys})}(t) - \mathscr{L}_{\mathrm{dyn}}(t) \\ &= -\frac{\zeta}{2} \int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-s)} \dot{x}(s)^2 ds + \gamma \int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-s)} V(x(s))ds \quad (4.15) \end{aligned}$$

と表される[2]．式 (4.15) の第 1 項が望み通り，熱の発生の効果を表しているが，散逸エネルギーそのもの（式 (4.5) の右辺第 1 項）ではなく，重みつき（コンボリューション，すなわち $\exp(-\gamma(\tau - t))$ の因子つき積分の形）になっているところが大変興味深い．定常状態の変分原理[3]では，それは重みなしの時間積分で表されるが，過渡現象の変分原理ではさらに重みまで現れることは注目すべきことである．オンサーガー・マクラップ[4]の変分理論では瞬間のエネルギー散逸を扱っているが，新理論では重みは遠い過去になるほど小さくなるが途中の過程まで考慮に入れたエネルギー散逸（エントロピー生成）を扱うところが本質的である．

さらに，興味深いことに，式 (4.14) の右辺の第 2 項の積分因子の指数関数 $\exp(-\gamma(t-s))$ をテーラー展開し，公式 4.1，すなわち式 (4.6) を用いると，前回くり込みの処法で導いた，多重積分の無限級数 (4.4) が直接導かれる．

こうして，線形系の散逸ダイナミクスに対する変分原理の問題は物理的にも見事に解決された．

4.3 非線形な散逸系における数学的ラグランジアンの導出

ここでは，さらに粘性係数 ζ が速度 $\dot{x}(t)$ に $\zeta = \zeta(\dot{x}(t))$ のように依存する非線形散逸系の変分原理[2]を説明する．すなわち，運動方程式

$$m\ddot{x}(t) + \zeta(\dot{x}(t))\dot{x}(t) - F(x(t)) = 0 \quad (4.16)$$

で記述される非線形散逸ダイナミクスを変分原理から導く．

ここではまず第一に，数学的な散逸ラグランジアンを探すことにする．これも長年の難問であるから，正攻法ではうまくいかない．すなわち，オイラー・ラグランジュ方程式

$$\ddot{x} f_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{x} f_{\dot{x}x} + f_{\dot{x}t} - f_x = 0 \quad (4.17)$$

から運動方程式 (4.16) が得られるように，作用の被積分関数 $f(x(t),\dot{x}(t),t)$ を求めるという‘変分理論の逆問題’を解くことには，今までのところ誰も成功していない．そこで，ここでも発見法的に話を進める．前節で解説した線形系の数学的な散逸ラグランジアン (4.3) は，あえて積分を使って書くと

$$\mathscr{L}_{\mathrm{diss}}^{(\mathrm{math,linear})}(t;\tau)=\exp\left(\int_{\tau}^{t}\gamma ds\right)\mathscr{L}_{\mathrm{dyn}}(t) \tag{4.18}$$

となる．これを γ が $\gamma=\frac{1}{m}\zeta(\dot{x}(t))\equiv\gamma(\dot{x}(t))$ のように，速度 $\dot{x}(t)$ に依存する場合に式 (4.18) を拡張する，もっともナイーヴな形は，$0\leq t\leq\tau$ に対して

$$\mathscr{L}_{\mathrm{diss}}^{(\mathrm{trial})}(t;\tau)=\exp\left(\int_{\tau}^{t}\gamma(\dot{x}(s))ds\right)\mathscr{L}_{\mathrm{dyn}}(t) \tag{4.19}$$

であろう．一見，オイラー・ラグランジュ方程式 (4.17) の $f_{\dot{x}t}$ に相当する項から，式 (4.16) の散逸項 $\zeta(\dot{x}(t))\dot{x}(t)$ が出そうに見えるが，この議論は数学的に全く誤りである（これで「できた」と思った人は過去にもいるのではなかろうか．筆者もその一人である！）．式 (4.18) のように，ラグランジアンそのものが $x(t)$ の経路によるような汎関数で表されるような全く新しい変分理論[2)]では，オイラー・ラグランジュ方程式 (4.17) は使えない．式 (4.19) の積分の中の $\dot{x}(s)$ も $\dot{x}(s)+\delta\dot{x}(s)$ のように変化させて変分をとらなければならないからである．

そこで，オイラー・ラグランジュ方程式が使えるようにするため，変分をとる際に指数因子は時間微分だけで済むように，変関数 $x(t)$ ではなく，ある固定した関数 $\dot{x}_*(t)$（後でうまく決める）を用いた積分を考え，非線形系 (4.16) の数学的な散逸ラグランジアンとして

$$\boxed{\mathscr{L}_{\mathrm{diss}}^{(\mathrm{math})}(t;\tau)=\exp\left(\int_{\tau}^{t}\gamma(\dot{x}_*(s))ds\right)\mathscr{L}_{\mathrm{dyn}}(t) \qquad (4.20)}$$

を導入する[2)]．これは，$x_*(t)$ を後で適当に決める固定された関数とみなせば，$x(t),\dot{x}(t)$ および時間 t の通常の関数であるから，

$$\text{作用 } I=\int_{0}^{\tau}\mathscr{L}_{\mathrm{diss}}^{(\mathrm{math})}(t;\tau)dt=\text{極値} \tag{4.21}$$

とするような変関数 $x(t)$ は，オイラー・ラグランジュ方程式 (4.17) より，零でない指数因子を除いて

$$m\ddot{x}(t)+\zeta(\dot{x}_*(t))\dot{x}(t)-F(x(t))=0 \tag{4.22}$$

という，$x(t)$ に関する，みかけ上（有効的に）線形の方程式をみたす．この方程式 (4.22) を解くと，その解には $\dot{x}_*(t)$ が含まれる．そこで，この段階で条件

$$x(t)=x_*(t),\ \text{すなわち},\ \dot{x}(t)=\dot{x}_*(t) \tag{4.23}$$

をつけることにする．こうすると，この新変分原理から求めた解は，もとの方程式 (4.16) の解と一致し，同じ非線形な散逸ダイナミクスを記述することになる．

この非線形な散逸ダイナミクスの変分原理では，粘性係数 $\zeta(\dot{x}(t))$ すなわち

$\gamma(\dot{x}(t)) = \frac{1}{m}\zeta(\dot{x}(t))$ の中の $\dot{x}(t)$ は，変関数とみるのではなく，実際に起こる軌道 $x_*(t)$ の微分 $\dot{x}_*(t)$ の関数として捉えることが妥当であるという概念的な主張が提唱されている．次の節で求める，非線形な散逸系の物理的ラグランジアンにおいては，これは概念的に重要な意味を持つことを強調しておきたい．

4.4 一般の非線形系における物理的な散逸ラグランジアン

前節で求めた数学的な散逸ラグランジアンを基にして，熱の発生と直接係わるような，非線形系の物理的な散逸ラグランジアンを探してみよう．式 (4.20) を関係式 (4.1) に代入して，4.2 節で示した数学的な公式 4.4，すなわち式 (4.9) を用いると非線形系の物理的な散逸ラグランジアンは

$$\boxed{\mathscr{L}_{\mathrm{diss}}^{(\mathrm{phys})}(t) = \mathscr{L}_{\mathrm{dyn}}(t) - \int_0^t \gamma(\dot{x}_*(t'))\exp\left(\int_t^{t'}\gamma(\dot{x}_*(s))ds\right)\mathscr{L}_{\mathrm{dyn}}(t')dt' \qquad (4.24)}$$

で与えられることがわかる．この式の右辺の第 2 項は

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{diss}}(t) = &-\frac{1}{2}\int_0^t \zeta(\dot{x}_*(t'))\dot{x}(t')^2\exp\left(\int_t^{t'}\gamma(\dot{x}_*(s))ds\right)dt' \\ &+\int_0^t \gamma(\dot{x}_*(t'))\exp\left(\int_t^{t'}\gamma(\dot{x}_*(s))ds\right)V(x(t'))dt' \end{aligned} \qquad (4.25)$$

と書き表せるから，式 (4.25) の右辺第 1 項が，線形系の場合と同様に，重みつきの熱の発生量を表しており，式 (4.24) は望み通り物理的であることがわかる．ただし，$\zeta(\dot{x}(t)) > 0$ の条件が必要である．この条件の下では，式 (4.24) と式 (4.25) の指数因子は，$t' < t$ の時間領域で

$$\exp\left(\int_t^{t'}\gamma(\dot{x}_*(s))ds\right) = \exp\left(-\frac{1}{m}\int_{t'}^t \zeta(\dot{x}_*(s))ds\right) < 1 \qquad (4.26)$$

となり，しかも，熱の発生の時刻 t' が運動の時刻 t から遠くなるほど，変分への熱の発生の効き方が次式

$$\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{m}\int_{t'}^t \zeta(\dot{x}_*(s))ds\right)\zeta(\dot{x}_*(t'))\dot{x}(t')^2 \qquad (4.27)$$

に比例して小さくなることに注意してほしい．さらに，この変分理論の特徴としては，粘性係数の時間依存性が真の運動 $x_*(t)$ で決まることである．もし，この粘性係数 ζ が変関数 $\dot{x}(t)$ そのもので変化するような変分関数すなわちラグランジアンを探し，たとえ見つかったとしても，それはあまりにも複雑であり物理的に解釈し難いものであろう．そういう変分関数は存在しないのかもしれない．少なくとも，比較的簡潔で物理的な散逸ラグランジアン (4.24) が見つかったことは大きな前進である．いずれにしても，以上のように非線形系の散逸ダイナミクスを変分原理で扱うことも可能となった．

4.5 多様な変分原理—より簡潔な物理的散逸ラグランジアン

すでに述べた通り，変分原理を与える変分関数は一意的ではなく，多様である．要は物理的に解釈し易いラグランジアンを見出すことである．式 (4.14) で与えた表式がもっとも簡潔な物理的ラグランジアンに見えるが，それを具体的に書き表すと，式 (4.15) のようになり，第 1 項は望み通り熱の発生を表しているものの，第 2 項が物理的に捉えにくい．そこで，この第 2 項をむしろ，式 (4.14) のポテンシャル項 $-V(x(t))$ とまとめてみることにする．再び，公式 4.6 を用いて導かれる次の公式に着目する：

$$\int_0^\tau \left(V(t) - \gamma \int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-s)} V(s) ds \right) dt = \int_0^\tau \mathrm{e}^{-\gamma(\tau - t)} V(t) dt. \quad (4.28)$$

ただし，$V(t) = V(x(t))$ である．上の関係式に気づくと，次のような，より簡潔な物理的散逸ラグランジアン

$$\mathscr{L}_{\mathrm{diss}}^{(\mathrm{phys})}(t;\tau) = \frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 - \mathrm{e}^{-\gamma(\tau-t)} V(x(t)) - \frac{\zeta}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-s)} \dot{x}(s)^2 ds \quad (4.29)$$

が見出される[2)]．式 (4.14) には，時間の区間 $0 \leq t \leq \tau$ の端 τ は含まれていないが，式 (4.29) にはそれが含まれているのが特徴である．しかも，$t = \tau$ で式 (4.29) の第 2 項は $V(x(t))$ そのものになり，第 1 項と合わせて通常の力学系のラグランジアンとなる．要するに，式 (4.29) の第 2 項は，散逸効果でくり込まれたポテンシャルと解釈でき，式 (4.29) は全体として物理的にもっともわかり易い散逸ラグランジアンであると言える[2)]．これは非線形系に拡張できる．

4.6 散逸ダイナミクスの経路積分量子化

散逸ダイナミクスのラグランジアン $\mathscr{L}_{\mathrm{diss}}(t)$ が求まったので，これを用いた経路積分

$$Z(\tau, 0) = \int_{\mathrm{ini}}^{\mathrm{fin}} \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^\tau \mathscr{L}_{\mathrm{diss}}(t)dt\right] D[x(t)] \quad (4.30)$$

によって，この散逸系を量子化することができる．不確定性関係などの物理的な計算をする場合でも，$\mathscr{L}_{\mathrm{diss}}^{(\mathrm{math})}(t)$ を用いると便利である．今までの多くの計算結果の問題点[5~10)]は因子 $\exp\left(-\frac{\zeta\tau}{m}\right)$ を考慮すると解決する[2)]．例えば，不確定性関係式は式 (4.3) を用いると，$\langle \varDelta x \varDelta p\rangle_t \geq \frac{\hbar}{2}\exp\left(-\frac{\zeta\tau}{m}\right)$ となり[2)]，右辺が $\frac{\hbar}{2}$ より小さくなり困難が生じるが，新しい理論では，$0 \leq t \leq \tau$ という変分の時間領域内で，

$$\langle \varDelta x \varDelta p\rangle_t \geq \frac{\hbar}{2}\exp\left(\frac{\zeta}{m}(\tau - t)\right) \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.31)$$

となり，物理的な結果を与える[2)]．

非線形な散逸系 (4.16) を経路積分量子化する場合には，数学的ラグランジアン (4.20) を用いるのが便利である．なぜなら，関係式 (4.1) によって作用は同

じになるからである．ただし，粘性係数の時間依存性は真の運動 $x_*(t)$ の微分 $\dot{x}_*(t)$ で与えられるものとする．

4.7 おわりに

物理を変分原理で捉えることは物理法則やそれに基づく物理現象を概念的に深く理解するために極めて重要である[11,12]．散逸系の変分原理が見つかったことにより，時間反転対称性を破る散逸系まで含めて，物理法則を変分原理により統一的に扱うことができるようになった．定常系の変分原理[3]でも瞬間のエントロピー生成ではなく時間積分された量が非線形では本質であることが筆者により指摘されたが，時間の矢が重要な意味を持つ不可逆現象の世界では，対象とする現象の起こる時刻に近いエネルギー散逸（発熱）ほど変分に大きく効く．これは不可逆現象を概念的に捉える際に深い示唆を与える．上に説明した散逸系の変分原理と散逸ラグランジアンはいろいろな応用が将来期待される．これらの散逸ラグランジアンを用いることにより，古典的な散逸系の経路積分量子化が可能となり，散逸効果をとり入れた不確定性関係式も導けることになった．

参考文献

1) 鈴木増雄，本連載第 3 回，「数理科学」2014 年 9 月号（サイエンス社）．
2) M. Suzuki, *Physica A*, submitted.
3) M. Suzuki, *Physica A* **392** (2013) 314, 4279.
4) L. Onsager and S. Machlup, *Phys. Rev.* **91** (1953) 1505.
5) 大貫義郎，岩波講座『力学』第 1 章（岩波書店，1994 年）．
6) 佐野雅巳，「力学的エネルギー」，「数理科学」2013 年 8 月号（サイエンス社）．
7) P. Caldirola, *Il Nuevo Cimento B* **77** (No.2) (1983) 241.
8) C.C. Gerry, *J. Math. Phys.* **25** (6) (1984) 1820. この論文では，変分原理よりも経路積分量子化に主眼がある．
9) H. Majima and A. Suzuki, *Ann. of Phys.* **326** (2011) 3000.
10) C-I. Um, K-H. Yeon and T.F. George, *Phys. Rep.* **362** (2002) 63.
11) 鈴木増雄，「物理学における変分原理——自然は無駄を嫌う」，「パリティ」2010 年 8 月号（丸善出版）．
12) 鈴木増雄，「変分原理と物理学」，「パリティ」2012 年 4 月号，2013 年 5 月号（丸善出版）．

（すずき・ますお，東京大学名誉教授）