古典力学から量子力学へ(2)

散逸系の変分原理と経路積分量子化

鈴木 増雄

3.1 はじめに

経路積分量子化の根底には変分原理がある．そこで，前回は，自由粒子と調和振動子についての経路積分表示を述べた後に，変分原理を与えるラグランジアンの物理的意義・役割を具体例を用いて丁寧に説明した[1]．

今回は，一般の力学系に対する経路積分表示とシュレーディンガー方程式との関係を説明する．その後で，唯一未解決のままであった，散逸ダイナミクスの変分原理と散逸ラグランジアンの理論[2]を解説する．

3.2 一般的な力学系の経路積分表示とシュレーディンガー方程式との等価性

量子力学は本質的に確率的性格を持っており，粒子の振舞いは波動関数 $\psi(x,t)$ で記述され，その存在確率は $|\psi(x,t)|^2$ で与えられる．量子力学の基礎法則はこの波動関数の従うシュレーディンガー方程式で記述される．すなわち，量子力学的状態を表現するものが波動関数 $\psi(x,t)$ であり，これは古典力学のラグランジアン $\mathscr{L}(t)$ を用いて，次の経路積分（遷移振幅）と関係づけられる：

$$Z(x,t;x_0,t_0)=\int_{(x_0,t_0)}^{(x,t)}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathscr{L}(x(t),\dot{x}(t),t)\right]D[x(t)]. \tag{3.1}$$

ここで，ラグランジアン $\mathscr{L}(x(t),\dot{x}(t),t)$ は，系の運動エネルギー $T=\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2$ とポテンシャルエネルギー $V=V(x(t))$ とを用いて

$$\mathscr{L}(t)=T-V \tag{3.2}$$

と表される[1,3~7]．また，$D[x(t)]$ はあらゆる経路 $x=x(t)$ $(t_0\le t)$ に関する経路積分を表す．系のハミルトニアン $\mathscr{H}$ は $\mathscr{H}=T+V$ と表されるが，ラグランジアンは式(3.2)のように運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V との差で表される．その物理的役割については前回[1]詳しく述べた通りである．

通常は，x_0 などの過去の詳細によらず，時刻 t と空間座標 x における量子状態を扱うので，この波動関数を $\psi(x,t)$ と書く．どの状態から移ってきたかを指定する波動関数は式 (3.1)，すなわち $Z(x,t;x_0,t_0)$ に比例する量 $K(x,t;x_0,t_0)$ で表される：

$$K(x,t;x_0,t_0) \propto Z(x,t;x_0,t_0). \tag{3.3}$$

この規格化された波動関数 $K(x,t;x_0,t_0)$ を用いると，上に定義した波動関数 $\psi(x,t)$ は明らかに

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t;x_0,t_0)\psi(x_0,t_0)dx_0 \tag{3.4}$$

の関係をみたす[5]．

そこで，$K(x,t;x_0,t_0)$ が経路積分 (3.1) で表されるときには，$\psi(x,t)$ がシュレーディンガー方程式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x,t)}{dx^2} + V(x)\psi(x,t) \tag{3.5}$$

をみたすことを，数学的厳密さ[8]にこだわらずに示すことにしよう．式 (3.4) のような大局的な積分形の定式化から，局所的な表現形式である微分方程式 (3.5) を導くには，t_0 を限りなく t に近づけてみればよい．そこで，$t_0 = t - \varepsilon$，$x_0 = x + \eta$ とおいて，式 (3.4) の右辺の ε のオーダーの項をテーラー展開により求め，零と置く．その際，式 (3.4) の $K(x,t;x_0,t_0)$ としては，

$$K(x,t;x+\eta,t-\varepsilon) = \frac{1}{A}\exp\left[\frac{\mathrm{i}\varepsilon}{\hbar}\mathscr{L}\left(x+\frac{\eta}{2},-\frac{\eta}{\varepsilon}\right)\right] \tag{3.6}$$

とおくことができる．ただし，A は規格化定数である．ここで，$\mathscr{L}$ の中の $x(t)$ としては，中点 $\frac{1}{2}(x+x_0)$ を，$\dot{x}(t)$ としては，差分 $(x-x_0)$ と差分 $(t-t_0)$ の比を用いた．式 (3.4) の $\psi(x_0,t_0) = \psi(x+\eta,t-\varepsilon)$ も η と ε でテーラー展開する：

$$\psi(x_0,t_0) = \psi(x,t) - \varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t} + \eta\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \cdots. \tag{3.7}$$

ここで，すぐわかる通り，$dx_0 = d\eta$ を用いて η に関する積分を行うと，η の1次の寄与は零になるので，η の2次の項まで考慮する必要がある．実際，オーダーとしては，$\mathrm{O}(\eta^2) = \mathrm{O}(\varepsilon)$ の関係にある[5,9]．また，遷移振幅 (3.6) の指数関数を η で展開すると

$$\begin{aligned}\exp\left[\frac{\mathrm{i}\varepsilon}{\hbar}\mathscr{L}\left(x+\frac{\eta}{2},-\frac{\eta}{\varepsilon}\right)\right] &= \exp\left[\frac{\mathrm{i}\varepsilon}{\hbar}\left(\frac{m\eta^2}{2\varepsilon^2} - V(x) + \cdots\right)\right]\\ &= \exp\left(\frac{\mathrm{i}m\eta^2}{2\hbar\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{\hbar}V(x) + \cdots\right)\end{aligned} \tag{3.8}$$

となる．規格化定数 A は

$$1 = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar\varepsilon}\eta^2\right)d\eta = \frac{1}{A}\left(\frac{2\pi\mathrm{i}\hbar\varepsilon}{m}\right)^{1/2} \tag{3.9}$$

の条件から定められる．すなわち，

$$A = \left(\frac{2\pi\mathrm{i}\hbar\varepsilon}{m}\right)^{1/2} \tag{3.10}$$

である．さらに，公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta\exp\left(\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar\varepsilon}\eta^2\right)d\eta = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\eta^2\exp\left(\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar\varepsilon}\eta^2\right)d\eta = \frac{\mathrm{i}\hbar\varepsilon}{m} \tag{3.11}$$

を用いると，式 (3.4) の右辺の ε の 1 次の項の係数は零とおけるので，シュレーディンガー方程式 (3.5) が導かれる[5,9]．

こうして，経路積分による量子力学の定式化が示された．ポテンシャル $V(x)$ が与えられたとき，具体的に経路積分を求めるには，$x(t)$ のフーリエ級数表示

$$x(t) = \sum_n a_n \sin\left(\frac{n\pi t}{\tau}\right) \tag{3.12}$$

を用いると便利である[5,9]．ただし，τ は基本周期である．ポテンシャルが x の 2 次式 $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$（調和振動子）の場合には，遷移振幅 $K(x,t;x_0,t_0)$ を厳密に求めることができる[5,9]．しかし，一般の $V(x)$ に対しては，多数のモード間の結合の項が現れるので，非線形効果に関する摂動計算に頼らざるを得ない[5]．ここでは原理的な問題に限って議論することにしよう．

3.3 変分原理の研究で残された重要な問題——散逸ダイナミクスの取扱い

すでに説明した通り[3~9]，力学，電磁気学，相対性理論など，時間反転対称性を持つ自然法則の変分原理は確立されている．残された未解決の問題は，時間反転対称性を破る自然法則の変分原理を見出すことである．すでに過去何十年も多くの人々がこの問題に取り組んできたが，どの理論も問題だらけで，物理的に見て満足できるものではない[10~15]．

(i) 変分原理を与える数学的なラグランジアンと物理的なラグランジアン

一般に変関数 $x(t)$ およびその時間微分 $\dot{x}(t)$ に対する作用

$$S = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), \dot{x}(t), t)dt \tag{3.13}$$

を極小または停留値にするような関数 $f(x, \dot{x}, t)$ は次のオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}f_{\dot{x}} - f_x = \ddot{x}f_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{x}f_{\dot{x}x} + f_{\dot{x}t} - f_x = 0 \tag{3.14}$$

をみたす[9]．変分原理を見出す研究は，関数 f が与えられたときオイラー・ラグランジュ方程式の解 $x = x(t)$ を求めるのではなく，逆に，$x(t)$ を決める物理的法則がすでにわかっているときに，その方程式を与えるような関数 f を探すことである．これは，いわば変分原理の逆問題である．ここで大きな問題が生じる．式 (3.14) は 2 階の線形偏微分方程式であり，定数倍を除いても，この逆問題の解 $f = f(x, \dot{x}, t)$ は一意的には決まらない．数学的には，どれを用いても $x = x(t)$ を求める手段としては同じであるが，物理的には，自然法則を変分的に捉えて，その係わる現象をより深く統一的に理解できるような変分原理が望ましい．

その場合に，大変面白いことが起こり得る．単に数学的に求めた，ある 1 つのラグランジアン $\mathscr{L}^{(\mathrm{math})}(t)$ と物理的なラグランジアン $\mathscr{L}^{(\mathrm{phys})}(t)$ があって，すべての $x(t), \dot{x}(t), t$ に対し，等式

$$\int_{t_0}^{t_1} f^{(\mathrm{math})}(x(t), \dot{x}(t), t; t_0, t_1)dt = \int_{t_0}^{t_1} f^{(\mathrm{phys})}(x(t), \dot{x}(t), t)dt \tag{3.15}$$

が成り立ち，なおかつ，2 つの被積分関数 $f^{(\mathrm{math})}$ と $f^{(\mathrm{phys})}$ とは一致しない

（全く異なる）ということがあり得る[2]．数学的な関数 $f^{(\mathrm{math})}$ は境界条件に依存する．これから紹介する散逸ダイナミクスの変分原理の理論[2]では，このような面白いことが起こる．そして，この場合には，いろいろ大変便利なことがある．一つは，数学的な関数 $f^{(\mathrm{math})}$ のほうが物理的な関数 $f^{(\mathrm{phys})}$ より簡単なことが多いので，実際の計算には前者を用い，物理的な議論には後者を用いるというような使い分けが可能となる．これは物理の理論としては大変新奇なことではないだろうか．物理的変分の式 $f^{(\mathrm{phys})}$ は，後で説明するように散逸ダイナミクスの場合には経路全体に依存する汎関数で表され，それをさらに時間で積分した作用の変分のとり方が一般に困難である．しかし，恒等式 (3.15) が存在する場合には，通常の被積分関数 $f^{(\mathrm{math})}$ に対する変分計算をすればよいことになり，大変都合がよい．

(ii) 粘性抵抗（摩擦力）のある系の変分原理に関する今までの研究とその難点[10~17]

もっとも典型的な散逸ダイナミクスを記述する方程式として，

$$m\ddot{x}(t) + \zeta\dot{x}(t) = F(x(t)); \quad F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \tag{3.16}$$

を考えることにする．ここで，考えている粒子の質量を m，時刻 t における空間座標を $x(t)$，ζ は粘性係数，および $F(x(t))$ は粒子に働く外力とする．この外力 $F(x(t))$ は保存力とする．

この問題に対する変分原理として提案されているものは，筆者の視点に立てばすべて数学的なものである．典型的な例としては，

$$f(x(t), \dot{x}(t)) = \mathrm{e}^{\zeta t/m}\left(T(\dot{x}(t)) - V(x(t))\right) \tag{3.17}$$

が知られている[10, 12~15]．この式は，散逸のない系のラグランジアン

$$\mathscr{L}_{\mathrm{dyn}}(t) \equiv T(\dot{x}(t)) - V(x(t)) \tag{3.18}$$

に因子 $\exp\left(\frac{\zeta t}{m}\right)$ をかけただけの単純な式であり，これを極小にする，または停留値にすることの物理的意味は不明である．オイラー・ラグランジュ方程式 (3.14) の解として式 (3.16) が得られるということだけは明らかである．

3.4 散逸ダイナミクスの物理的な変分原理

(i) 直観的な理論（発見法的処方）

前節で扱った散逸ダイナミクスの式 (3.16) を例にして，ここでは熱エネルギーを含めたエネルギーバランス（エネルギー保存則）

$$T(\dot{x}(t)) + V(x(t)) + W_{\mathrm{heat}}(t) = 一定; \quad W_{\mathrm{heat}}(t) = \zeta\int_0^t \dot{x}(s)^2 ds \tag{3.19}$$

に着目し，変分原理を模索してみる[18]．ここで，上式の第 3 項は，粘性抵抗による，時刻 0 から t までの熱の発生量全体を表す．明らかに，上の式を時間で微分すると，

$$\left(\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \zeta\dot{x}(t) - F(x(t))\right)\dot{x}(t) = 0 \tag{3.20}$$

となり，運動方程式 (3.16) が得られる．したがって，式 (3.19) が変分原理から

得られるように，散逸ラグランジアン $\mathscr{L}_{\mathrm{diss}}(t)$ を設定すればよいことになる．

これからの議論は試行錯誤を重ねて発見法的に進める．今までの長年の研究[10, 12~15]は，被積分関数 f を通常の関数空間（変関数 $x(t)$，その微分 $\dot{x}(t)$ および時間 t の顕わな関数）に限定して，2 階の偏微分方程式 (3.14) を解くものであった．このような正攻法では，以下の議論でわかるように，物理的な変分原理を構成する被積分関数としての散逸ラグランジアン $\mathscr{L}_{\mathrm{diss}}(t)$ は見つからない．このために，散逸ダイナミクスの変分原理は物理的には長年の間未解決であったものと思われる[2]．

そこで，まずは近似的にでも，物理的な散逸ラグランジアンを探してみよう．そのヒントとして，前回のラグランジアンの物理的意味についての議論を再考する．通常の力学系のラグランジアンは，定数項を除いて，運動エネルギー T と外力のなす仕事量

$$W_{\mathrm{dyn}}(t) = \int_{x(0)}^{x(t)} F(x)dx = V(x(0)) - V(x(t)) \tag{3.21}$$

との和として構成される．ここで，$t_0 = 0$ とした．熱の発生 $W_{\mathrm{heat}}(t)$ があると，それだけ外力による仕事の粒子に与える効果が減ると考えられる．したがって，運動エネルギー $T(\dot{x}(t))$ と $(W_{\mathrm{dyn}}(t) - W_{\mathrm{heat}}(t))$ とがバランスするとみなし，直観的な散逸ラグランジアン $\mathscr{L}_{\mathrm{diss}}^{(\text{直観})}$ は，定数項を除いて，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{diss}}^{(\text{直観})}(t) &= T(\dot{x}(t)) + W_{\mathrm{dyn}}(t) - W_{\mathrm{heat}}(t) \\ &= T(\dot{x}(t)) + V(x(t)) - W_{\mathrm{heat}}(t) + (\text{定数})\end{aligned} \tag{3.22}$$

で与えられるとしてよいであろう．よって，直観的な散逸ラグランジアンに対する作用は

$$S_{\mathrm{diss}}^{(\text{直観})} = \int_0^{t_1} \left(T(\dot{x}(t)) + W_{\mathrm{dyn}}(t) - W_{\mathrm{heat}}(t)\right) dt \tag{3.23}$$

で与えられることになる．次の問題は，この作用の変分をどう実行するかということである．なぜならば，散逸ラグランジアン (3.22) は，今までのような通常の関数ではなく，経路に依存する汎関数 $W_{\mathrm{diss}}^{(\text{直観})}(t)$，すなわち，式 (3.19) を用いて表されているからである．関数 $\dot{x}(t)^2$ の 2 重積分の変分は

$$\begin{aligned}\delta\left(\zeta \int_0^{t_1} dt \int_0^t \dot{x}^2(s)ds\right) &= 2\zeta \int_0^{t_1} dt \int_0^t \dot{x}(s)\delta\dot{x}(s)ds \\ = 2\zeta\left(\int_0^{t_1} \dot{x}(t)\delta x(t)dt - \int_0^{t_1} dt \int_0^t \ddot{x}(s)\delta x(s)ds\right)\end{aligned} \tag{3.24}$$

の形にまでは，部分積分によって変形できるが，依然として第 2 項の 2 重積分の処理という（今までの変分計算には現れてこなかった）新しい困難に遭遇する．上の変形式 (3.24) の第 1 項（の半分）のみを利用すると，正しい運動方程式 (3.16) が得られる．

この議論から，熱の発生の効果を表す表式 (3.19) を基にして（数因子 $\frac{1}{2}$ は別にして），適当に拡張すれば正しい散逸ラグランジアンが求まるだろうとおおよその見当がつく．

数因子 $\frac{1}{2}$ に関しては，変分原理とは直接結びつかない今までのオイラー・ラ

グランジュの式に非保存力（non-conservative force）の効果 $\varPhi(t) = \frac{1}{2}\zeta\dot{x}(t)^2$（散逸関数と通常呼ばれている）を付け加えた式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathscr{L}}{d\dot{x}(t)}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x(t)} = \frac{\partial\varPhi(t)}{\partial\dot{x}(t)} \tag{3.25}$$

が参考になるであろう．ただし，$\varPhi(t)$ そのままでは変分原理には役立たないが，筆者の輸送現象に対する変分原理の基本理念[18, 19)]

“定常状態では，そこに到る途中の過程を考慮に入れた積分されたエントロピー生成が最小になる”

に基づいて散逸関数 $\varPhi(t)$ を時間で積分した，いわば“散逸エネルギー関数”

$$W_{\rm diss}^{(0)}(t) = -\int_0^t \varPhi(s)ds = -\frac{1}{2}\zeta\int_0^t \dot{x}(s)^2 ds \tag{3.26}$$

が，散逸ダイナミクスの物理的変分原理を見出す出発点になることを次に示す．

(ii) くり込まれた散逸ラグランジアンの構成

ここの目的は，散逸ダイナミクス方程式 (3.16) を与える“物理的”散逸ラグランジアン

$$\mathscr{L}_{\rm diss}^{\rm (phys)}(t) = \mathscr{L}_{\rm dyn}(t) + W_{\rm diss}(t) \tag{3.27}$$

を構成することである．ただし，散逸項 $W_{\rm diss}(t)$ は熱の発生と直接係る表式 $W_{\rm heat}(t) = -2W_{\rm diss}^{(0)}(t)$ を主たる項として含む“物理的な”ものであってほしい．

そこで，$W_{\rm diss}(t)$ として

$$W_{\rm diss}(t) = W_{\rm diss}^{(0)}(t) + R_{\rm diss}(t); \quad R_{\rm diss}(t) = \int_0^t Q_{\rm diss}(s)ds \tag{3.28}$$

の形を仮定し，$Q_{\rm diss}(t)$ を探すことにする．

この系の作用は，$t_1 = \tau$ とおいて，

$$\begin{aligned} S_{\rm diss} &= \int_0^\tau \mathscr{L}_{\rm diss}(t)dt = \int_0^\tau \mathscr{L}_{\rm dyn}(t)dt + \int_0^\tau W_{\rm diss}(t)dt \\ &= \frac{m}{2}\int_0^\tau \dot{x}(t)^2dt - \int_0^\tau V(x(t))dt - \frac{\zeta}{2}\int_0^\tau dt\int_0^t \dot{x}(s)^2ds \\ &\quad + \int_0^\tau dt\int_0^t Q_{\rm diss}(s)ds \end{aligned} \tag{3.29}$$

という 2 重積分を含む形になるので，これらの変分をとる際に，前述した通り数学的な工夫を要する．

幸いに，次の公式がこの問題を解くのに大いに役立つ：任意の関数 $f(t)$ に対して

$$\int_0^\tau dt\int_0^t f(s)ds = \int_0^\tau (\tau - t)f(t)dt \tag{3.30}$$

が成り立つ．この公式は，両辺を τ で微分してみれば，その両辺が一致し，$\tau = 0$ に対しても両辺 0 になることから容易に確かめられる．より一般に次の公式が知られている：

$$\int_0^\tau dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\tau (\tau - t)^{n-1}f(t)dt. \tag{3.31}$$

これらの公式の利用に気づくことが“物理的”散逸ラグランジアンを見出すた

めのキーポイントの一つである．式 (3.29) の第 3 項の変分から，粘性項 $\zeta\dot{x}(t)$ が求まるように，$W_{\rm diss}(t)$ を決めたい．公式 (3.30) を用いると，式 (3.29) の最右辺の第 3 項は

$$-\frac{\zeta}{2}\int_0^\tau dt\int_0^t \dot{x}(s)^2ds = -\frac{\zeta}{2}\int_0^\tau(\tau-t)\dot{x}(t)^2dt \tag{3.32}$$

である．よってこの項の変分からのオイラー・ラグランジュ方程式 (3.14) への寄与は

$$\ddot{x}(t)f_{\dot{x}\dot{x}}+\dot{x}(t)f_{\dot{x}t}\to -\zeta(\tau-t)\ddot{x}(t)+\zeta\dot{x}(t) \tag{3.33}$$

となり，粘性項 $\zeta\dot{x}(t)$ が得られるが，同時に余分な項も現れる．このように質量が時間と共に変化するような効果を与える項は，くり込んで消えるようにうまく $R_{\rm diss}(t)$ を決めなければならないと思われる．しかし，そのような $R_{\rm diss}(t)$ は見つかりそうにない．例えば，次のような 3 重積分（散逸関数の多重積分）

$$\int_0^\tau R_{\rm diss}(t)dt\to\int_0^\tau dt\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}\frac{\zeta}{2}\dot{x}(t)^2dt_2 \tag{3.34}$$

を考えると，公式 (3.31) を用いて，これは

$$\frac{1}{2!}\int_0^\tau(\tau-t)^2\left(\frac{\zeta}{2}\dot{x}(t)^2\right)dt \tag{3.35}$$

と変形できるので，オイラー・ラグランジュ方程式への寄与は

$$\frac{1}{2!}\left(\zeta(\tau-t)^2\ddot{x}(t)-\zeta(\tau-t)\dot{x}(t)\right) \tag{3.36}$$

となる．このように，どんなに高次の多重積分を付け加えても，低次が消えずに却って $(\tau-t)$ の高次が増えるばかりである．そこで，この情況を逆手にとり，無限に高次の多重積分を付け加えて（くり込んで），次の形のオイラー・ラグランジュ方程式

$$g(t)\left(m\ddot{x}(t)+\zeta\dot{x}(t)-F(x(t))\right)=0 \tag{3.37}$$

を導くように $R_{\rm diss}(t)$ を決めることにする．もし，因子 $g(t)$ が零にならない関数となるようにとれれば，望みの運動方程式 (3.16) が得られることになる．高次のくり込みまで系統的に検討してみると，運良く上の戦略はうまく適用できることがわかった[2)]．その結果は次の通りである：

$$W_{\rm diss}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\zeta}{m}\right)^n\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}}\mathscr{L}_{\rm dyn}(t_n)dt_n, \tag{3.38}$$

および

$$g(t)=\exp\left(\frac{\zeta}{m}(t-\tau)\right). \tag{3.39}$$

これに対応する $\mathscr{L}_{\rm diss}^{\rm (math)}(t)$ は

$$\int_0^\tau \mathscr{L}_{\rm diss}^{\rm (math)}(t)dt=\int_0^\tau \mathscr{L}_{\rm diss}^{\rm (phys)}(t)dt \tag{3.40}$$

によって定義され，それは，公式 (3.31) を用いると，

$$\mathscr{L}_{\rm diss}^{\rm (math)}(t)={\rm e}^{(t-\tau)\zeta/m}\mathscr{L}_{\rm dyn}(t)={\rm e}^{(t-\tau)\zeta/m}\left(T(\dot{x}(t))-V(x(t))\right) \tag{3.41}$$

で与えられることがわかる．明らかに，これは，式 (3.38) の $W_{\rm diss}(t)$ を用いた物理的ラグランジアン (3.27) とは全く異なる通常の関数である．大変興味深

82

いことに，これは式 (3.17) と因子 $\exp\left(-\frac{\zeta\tau}{m}\right)$ を除いて一致している．その結果，今までのラグランジアン (3.17) を用いた計算はこの因子の影響を除けば正しい結果を与えることになる．しかし，この因子の存在は非常に大きく，次回議論するように極めて本質的である．

3.5 おわりに

以上のように，時間反転対称性を破る散逸ダイナミクスに対しても物理的な散逸ラグランジアンが発見され，それを用いた変分原理が確立された．こうして，変分原理によって，不可逆過程まで含めて統一的に自然法則を表現することができるようになった．散逸ラグランジアンの中の粘性係数の 1 次の項 $W_{\mathrm{diss}}^{(0)}(t)$ は散逸関数 $\Phi(t)$ の時間積分（に負符号つけたもの）であるから，ζ が小さいときには，散逸ラグランジアンは熱の発生量そのものを用いて与えられることになり，これは物理的である．高次のくり込みの効果も散逸関数の時間に関する多重積分で与えられるのは興味深い．散逸ラグランジアンのより直接的な導出法と経路積分量子化については次回に解説する．また，粘性係数 ζ が $\dot{x}(t)$ に依存する非線形の場合への拡張についても次回に説明する．

参考文献

1) 鈴木増雄，本連載，「数理科学」2014 年 6 月号（第 1 回）および 8 月号（第 2 回）（サイエンス社）．
2) M. Suzuki, *JPS Conf. Proc.* **1** (2014) 012128, and *Physica A* (in preparation).
3) 加藤光裕，「ニュートン力学と解析力学」，「数理科学」，2014 年 4 月号（サイエンス社）．
4) 大貫義郎，柏太郎，鈴木増雄，『経路積分の方法』（岩波書店，2000 年）．
5) R.P. ファインマン/A.R. ヒッブス著，北原和夫訳，『ファインマン経路積分と量子力学』（マグロウヒル出版，1990 年）．
6) 鈴木増雄，「物理学における変分原理——自然は無駄を嫌う」，「パリティ」2010 年 8 月号（丸善出版）．
7) 吉岡大二郎，『力学』（朝倉書店，2008 年）．
8) T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, 第 2 版 (1976).
9) 鈴木増雄，「変分原理と物理学」，「パリティ」2012 年 9 月号～11 月号（丸善出版）．
10) 大貫義郎，岩波講座『力学』第 1 章（岩波書店，1994 年）．
11) 佐野雅巳，「力学的エネルギー」，「数理科学」2013 年 8 月号（サイエンス社）．
12) P. Caldirola, *Il Nuovo Cimento B* **77** (No.2) (1983) 241.
13) C.C. Gerry, *J. Math. Phys.* **25** (6) (1984) 1820. この論文では，変分原理よりも経路積分量子化に主眼がある．
14) H. Majima and A. Suzuki, *Ann. of Phys.* **326** (2011) 3000.
15) C-I. Um, K-H. Yeon and T.F. George, *Phys. Rep.* **362** (2002) 63.
16) C.R. Galley, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 174301. この論文では，Keldysh の 2 時間グリーン関数を用いて，しかも通常の変分原理の境界条件ではなく，初期条件のみを用いており，この理論が物理的な理論であるかどうかは検討の余地がある．この論文を教えてくれた桑原幸朗氏に感謝致します．
17) Y. Kuwahara, Y. Nakamura and Y. Yamanaka, *Phys. Lett.* **A377** (2013) 3102.
18) M. Suzuki, *Physica* **A392** (2013) 314.
19) M. Suzuki, *Physica* **A392** (2013) 4279.

（すずき・ますお，東京大学名誉教授）