散逸ダイナミクスの変分原理と経路積分量子化

理研　鈴木増雄

Variational Principles of Dissipative Dynamics and Path-integral Quantization

RIKEN　Masuo Suzuki

前回までは、輸送現象におけるエントロピー生成と不可逆性に関する理論を発表してきた。今回は、過渡現象の変分原理を与える「散逸ラグランジアン $\mathcal{L}_{diss}$」を導入し、それを用いて、減衰調和振動子系 $m\ddot{x}(t)+\zeta\dot{x}(t)+kx(t)=0$ のような散逸系 $m\ddot{x}(t)=F(x(t),\dot{x}(t))-\partial U(x(t))/\partial x(t)$ を経路積分量子化することが可能であることを示す。

問題の困難な理由：

1. 通常の力学系は時間反転に対して対称的。
2. 散逸系には非対称的項(散逸項)が含まれている。

例1. $$\underbrace{m\ddot{x}(t)}_{\text{対称的}} + \underbrace{\zeta\dot{x}(t)}_{\text{非対称的}} + \underbrace{kx(t)}_{\substack{\text{力学的力}\\(\text{または重力}-mg)}} = 0$$

3. 今までの関数空間では、物理的ラグランジアンが見つからない。
4. 変分法の逆問題としての数学的取り扱いではなく、物理的新しい視点に立って定式化することがキーポイントである。(発見法的取り扱い)

今までの研究：多数の論文・定式化あるが，非物理的（大貫義郎の批判：岩波講座「力学」）

4. エネルギー散逸のある場合 （佐野雅己 数理科学 No.602，2013年8月）

天体運動などの場合を除けば，我々が普段目にするマクロな現象で，エネルギーが保存する場合はほとんどない．実際に，身の周りを見渡してみれば，運動には摩擦や粘性が伴い，エネルギーを注ぎ込み続けなければ，やがては運動は止まってしまう．そのような場合に，最小作用の原理から運動を導くことはできない．ただ，このときの運動方程式は，次のように書くことができる．

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j. \qquad (*)$$

ここで Q_j は一般化力と呼ばれるポテンシャルからは導かれない力であり，摩擦力などを表している．摩擦力が $f_j = -kv_j$ などのように速度に比例する場合は，速度の 2 次形式で表される次の散逸関数

$$F = \frac{1}{2}\sum_j k v_j^2$$

を導入すると一般化力 Q_j は，

$$Q_j = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}$$

と書けるので，(*) 式は，散逸関数を用いて次のように書くことができる．

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}.$$

ただし，これはオイラー・ラグランジェの式に非ポテンシャル力を付け加えただけで，この式が何らかの変分原理から導かれるものではない．

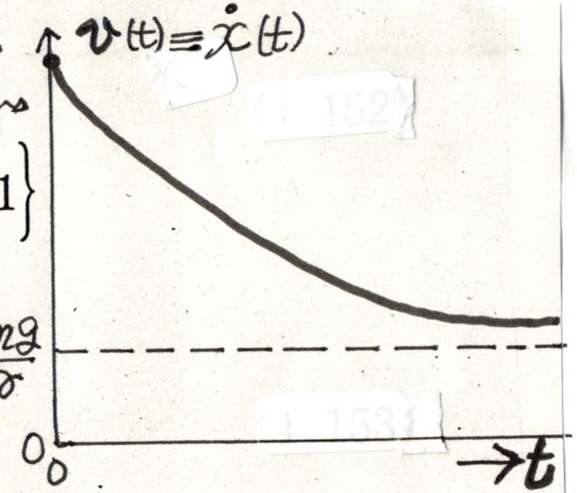
散逸がある場合に，最小作用の原理から運動を導くことには，今のところ誰も成功していない．

解決：M. Suzuki, Physica A392 (2013) 314; APPC12 (2013); to be submitted to Physica A（本学会発表の内容）。

非物理的ラグランジアンの例 (大貫義郎の岩波の「力学」43頁より)

非物理的な理由も解説されている

$$
\begin{cases}
L = e^{\gamma t/m}\left(\dfrac{m}{2}\dot{x}^2 + gmx\right) \to \infty \ \text{as}\ t \to \infty \\[2ex]
L' = \dfrac{g^2 m^3}{\gamma^2}\left\{\exp\left(\dfrac{\gamma}{gm}\dot{x} + \dfrac{\gamma^2}{gm^2}x\right) - \dfrac{\gamma}{gm}\dot{x} - 1\right\}
\end{cases}
$$



において，L, L' はともに運動方程式

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = mg$$

を与える．この式は $\gamma > 0$ のとき，重力加速度 g の中を抵抗を受けて落下する質点の運動を表わす．

表式が複雑になることを厭わなければ，これ以外にもさまざまな例をつくることができるが，このように1つの運動方程式に対して多様な Lagrange 関数が許されるのは，すでに述べたように運動方程式がオンシェルの $q_i(t)$ を規定しているのに対し，Lagrange 関数がオフシェルを含む量であって，このようなオンシェルからずれた部分に任意性の入る余地があるからである．

変分原理の定式化

◎アイデア：経路に依存した散逸ラグランジアンを導入する。

$$\mathcal{L}_{diss} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2(t) + W_{diss}$$

; eq. of motion $m\ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t))$

$$W_{diss} \equiv \int_{x(0)\,(path)}^{x(t)} F(x', \underbrace{\dot{x}(t'(x'))}_{\text{ここがキーポイント}})\, dx'$$

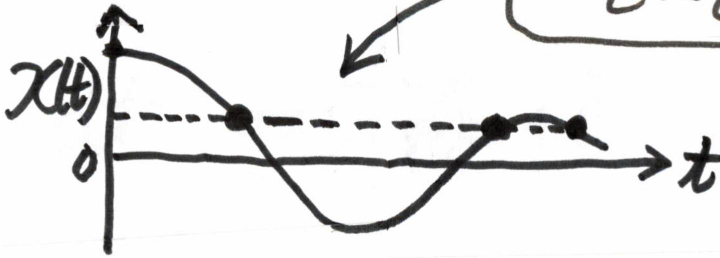
→ 経路に依る

$$= \int_0^t F(x(t'), \dot{x}(t'))\, \dot{x}(t')\, dt'$$

$x = x(t)$

◎多価関数 $t = t(x)$

作用 $I_{diss} = \int_0^t \mathcal{L}_{diss}\, dt' =$ 極小。



Euler-Lagrange eq. → $m\ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t))$

物理的変分関数であることの説明：

作用 $I=\int_{t_0}^{t_1} f(x,\dot{x},t)\,dt$ ＝極値となる条件、

オイラー・ラグランジ方程式

$$\ddot{x}f_{\dot{x}\dot{x}}+\dot{x}f_{\dot{x}x}+f_{\dot{x}t}-f_{x}=0$$

特に、f が時間 t を顕わに含まないときには、

$$f-\dot{x}f_{\dot{x}}=\text{定数} \qquad (*)$$

という"保存則"と等価になる。

◎ 新しい視点：$\mathcal{L}_{diss}$ は時間 t を顕わに含まず、経路 $x=x(t)$ に依存する汎関数であるとみなす。

$\therefore$ $\mathcal{L}_{diss}-\dot{x}(t)\,d\mathcal{L}_{diss}/d\dot{x}(t)=\text{定数}$ ⇒ 正しい保存則

新しい散逸ラグランジアン $\mathcal{L}_{diss}$ は経路に依存する関数

$$W_{diss} = \int_{0\,(path)}^{t} F(x(t'), \dot{x}(t'))\,\dot{x}(t')\,dt'$$

$$\left(x = x(t) \rightarrow t = t(x) \right)$$

$$\overset{(定義)}{\equiv} \int_{x(0)\,(path)}^{x(t)} F(x', \dot{x}(t'(x'))\,dx'$$

を用いて、

$$\mathcal{L}_{diss} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + W_{diss}$$

と書けるから、オイラー・ラグランジ方程式は ㊉ より

$$\mathcal{L}_{diss} - m\dot{x}^2(t) = W_{diss} - \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 = 定数。$$

$F = -\varsigma \dot{x}(t) - k x(t)$ とすると、

$$\underline{\frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} k x^2(t) + \varsigma \int_0^t \dot{x}^2(t')\,dt' = 一定。} \quad (**)$$

保存則(※※)を時間tで微分すると、もとの式(damped harmonic oscillatorの式)

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + \zeta\dot{x}(t) = 0$$

が導ける。

こうして、正しく変分原理で散逸方程式が導出できることがわかった。この散逸ラグランジアン$\mathcal{L}_{diss}$を用いて、経路積分量子化が可能となる。

$$Z(a,b) = \int_a^b \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathcal{L}_{diss}(x(t'),\dot{x}(t'))dt'\right] D(x(t))$$

◎特徴：経路に依存したラグランジアンの経路積分

非可逆性・散逸効果の定式化！

$\boxed{\text{まとめ}}$ ◎ 2つの長年の課題が解決された。

1. 散逸系を記述する変分原理が発見された。
すなわち、経路に依存する散逸ラグランジアンの導入。

$$\mathcal{L}_{diss} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + W_{diss} \; ; \; W_{diss} = \int_{x(0)\,(path)}^{x(t)} F(x', \underbrace{\dot{x}(t'(x'))}_{\text{多価関数で経路に依存する。}}) dx'$$

2. $\mathcal{L}_{diss}$を用いた経路積分量子化が可能となった。

$$Z(a,b) = \int_a^b \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}_{diss}(x(t), \dot{x}(t)) dt\right] D(x(t))$$

→ 新しい散逸効果を含む不確定性関係

$$\Delta x \Delta p \geq f(\hbar, \zeta) \quad \text{複雑！}$$