凸五角形を用いたタイル張り

杉本晃久
科学芸術学際研究所 ISTA，日本テセレーションデザイン協会
ismsugi@gmail.com

1　はじめに

平面のタイル張りとは，タイルと呼ばれる集合の集まりで平面を隙間や（タイルの境界を除いて）重なり無く被覆することである．タイリング内の全てのタイルが同じサイズで同じ形状の場合，そのタイリングをmonohedralと呼び，そしてmonohedralタイリング内の多角形をmonohedralタイリングのプロトタイル，もしくは多角形タイルと呼ぶ．凸五角形タイルは現在15種類のtypeに分類されているがこれ以外ないかどうかは確定していなく，凸多角形タイルの分類問題において五角形の場合だけが未解決である．

なお，type 15の凸五角形タイル（図1参照）は，2015年7月にWashington Bothell大学のCasey MannとJennifer McLoudとDavid Von Derauがコンピュータを用いて発見した [1, 2].

2　Edge-to-Edgeタイル張り可能な凸五角形タイル

タイリング内の任意の2つの凸多角形が互いに素か1つの頂点あるいは1つの辺全体を分け合うような場合，その凸多角形によるタイリングをedge-to-edgeと呼ぶ．凸五角形タイルのタイリングは，edge-to-edgeな場合とそれ以外（non-edge-to-edge）の場合が混在している．既知の14のtypeのうち，type 4, type 5, type 6, type 7, type 8, type 9の少なくともどれか1つに属す凸五角形タイルは，edge-to-edgeタイリングを生成できる．type 1またはtype 2に属す凸五角形タイルを用いたタイリングは，一般にはnon-edge-to-edgeで示されているが，特別な場合にedge-to-edgeタイリングを生成できる [1].

我々はこれまでedge-to-edgeタイル張り可能な凸五角形タイルのtypeの網羅を目指して研究を進め，2012年にedge-to-edgeタイル張り可能な凸五角形タイルのtypeの網羅することに成功した．その結果をまとめると，以下の定理として表せる [1, 2].

定理 1　凸五角形がedge-to-edge monohedral タイリングを生成出来る場合，それは（既知の）8つのtypeのすくなくとも1つに属する．

3　強非周期的Edge-to-Edgeタイル張り可能な凸多角形

平面のタイル張りが周期的であるとは，ある方向にそのタイル張り全体を平行移動すると自分自身にかさなるような方向が 2 つ存在することである．プロトタイルの集合が強非周期的（aperiodic）であるとは，プロトタイルのどれかと合同なコピーを用いて平面をタイル張りすることが無数に異なる方法ででき，かつ，そのどのタイル張りも周期的でないことを言う．

よく知られれているペンローズ・タイリングは，付き合わせ条件を持った 2 つのプロトタイルで作られた強非周期的タイリングである．

強非周期的タイル張りに関して，既知のものとは本質的に異なる強非周期的タイル集合を見つけることが課題としてあげられており，特に次のような 2 つの問題が示されている．

(i) 1 個の要素からなる強非周期的集合（付き合わせ条件があっても，なくてもよい）があるか？
(ii) 凸多角形状の 3 つのタイルからなり，各タイルの辺に付き合わせ条件が課せられていない，強非周期的な集合が存在するが，そのような集合で 2 個以下の凸多角形からなるものはあるか？

上記の(ii)の問題の凸多角形状の 3 つのタイルからなり各タイルの辺に付き合わせ条件が課せられていない強非周期的な集合とは，1 種類の凸六角形と 2 種類の凸五角形で構成されているが，実はこれらを用いて作られたタイリングはペンローズ・タイリングをベースにしている．
我々は五角形以外の凸多角形タイルの性質と定理 1 から，

定理 2　Edge-to-edge 以外の付き合わせ条件を持たない凸多角形タイルには，強非周期的集合がない．

ということが主張できると気づいた [1]．
定理2から，もし強非周期的凸多角形タイルが存在するならば，それは凸五角形タイルであり，そのタイリングはnon-edge-to-edgeになるとわかる．
なお，type 15の凸五角形タイルを発見したMannらはその後もコンピュータを用いた探索を継続中である．ただし彼らの方法は周期的なタイリングを前提としているため，もし強非周期的凸五角形タイルが存在して場合，彼らの方法ではそれを見つけることはできない．凸五角形タイル張り問題を解決する，つまり凸五角形タイルのtypeを網羅するには，強非周期的タイル張りのことも考える必要がある．

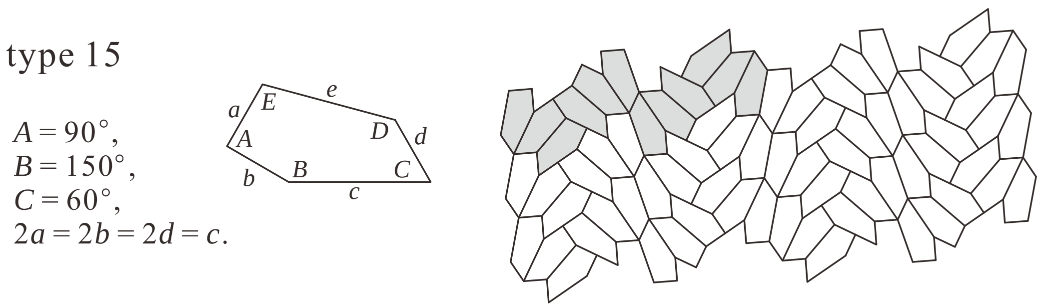

図1．2015年に発見された凸五角形タイル．

参考文献
[1] Sugimoto, T.: Tiling Problem: Convex pentagons for edge-to-edge tiling and convex polygons for aperiodic tiling (2015). http://arxiv.org/abs/1508.01864 (accessed on 16 November 2015).
[2] 杉本晃久：平面タイル張り可能な凸五角形，数学セミナー，第 55 巻第 1 号（2016 年 1 月号），44–48．正誤情報：https://www.nippyo.co.jp/blogsusemi/正誤情報/