Vaisman 完全可解多様体の構造定理

沢井　洋　(沼津高専 教養科 数学教室)*

1. 序章

G を単連結な可解リー群とし, Γ を G の格子群とするとき, コンパクト多様体 $\Gamma\backslash G$ を可解多様体という. べき零多様体も同様に定義される. 可解多様体がケーラー構造をもつならば, 複素トーラスとなる [6]. 可解多様体において, ケーラー構造の拡張となる構造について報告する.

(M, g, J) をコンパクトなエルミート多様体とする. また, Ω を (g, J) の基本 2 次形式する. $d\Omega = \omega \wedge \Omega$ を満たす閉 1 次形式 ω が存在するとき, (M, g, J) を局所共形ケーラー多様体という. また, 閉 1 次形式 ω を Lee 形式という. $\omega = df$ のとき, $(M, e^{-f}g, J)$ はケーラー多様体である.

M を多様体とし, α を M 上の閉 1 次形式とする. p 次形式から $p+1$ 次形式への微分作要素 d_α を, $d_\alpha\beta := \alpha \wedge \beta + d\beta$ と定義する. α は閉 1 次形式より, $d_\alpha^2 = 0$ を満たす. また, $d_\alpha\beta = 0$ のとき β を α-閉形式, $\beta = d_\alpha\gamma$ のとき β を α-完全形式とそれぞれいう. リー環上でも, 同様に定義できる. 局所共形ケーラー構造の基本 2 次形式 Ω は, $-\omega \wedge \Omega + d\Omega = 0$ を満たすことから, $-\omega$-閉形式である.

ケーラー多様体でない局所共形ケーラー多様体の例として, Hopf 曲面 [14], 井上曲面 [13], Kodaira-Thurston 多様体 [2] が知られている (cf. [5]). また, 井上曲面, Kodaira-Thurston 多様体は, 可解多様体, べき零多様体の構造をそれぞれもつ.

局所共形ケーラー多様体 (M, g, J) について, その Lee 形式 ω が計量 g に関して平行となるとき, Vaisman 多様体という. Hopf 曲面, Kodaira-Thurston 多様体は Vaisman 多様体である. 井上曲面はこれと異なり, その Lee 形式は平行でない.

単連結な可解リー群 G のリー環を $\mathfrak{g}$ とする. 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して, その随伴表現の固有値がすべて実数のとき, G を完全可解リー群という. 完全可解多様体 $\Gamma\backslash G$ 上の Vaisman 構造について次が成り立つ：

主定理 1. [12] $(\Gamma\backslash G, J)$ を左不変な複素構造をもつ完全可解多様体とする. $(\Gamma\backslash G, J)$ が Vaisman 構造をもつならば, $\Gamma\backslash G$ は $S^1 \times \Gamma\backslash H$, 但し, H は Heisenberg リー群, となる.

なお, 左不変な複素構造も決定できる.

主定理より, 局所共形ケーラー構造をもつ局所共形ケーラーべき零多様体が決定できる. べき零多様体上の局所共形ケーラー構造は, Vaisman 構造を誘導する ([4], [11]). べき零多様体は完全可解多様体であるから, 次を得る：

系 2. (cf. [9]) $(\Gamma\backslash G, J)$ を左不変な複素構造をもつべき零多様体とする. $(\Gamma\backslash G, J)$ が局所共形ケーラー構造をもつならば, $\Gamma\backslash G$ は $S^1 \times \Gamma\backslash H$, 但し, H は Heisenberg リー群, となる.

2. 準備

本章では, 主定理を証明するための準備を述べる.

2000 Mathematics Subject Classification: primary 53C55; secondary 17B30
キーワード：局所共形ケーラー多様体, Vaisman 多様体, 可解多様体
*e-mail: `sawai@numazu-ct.ac.jp`

$(M=\Gamma\backslash G, J)$ を左不変な複素構造をもつ完全可解多様体とする. (M, J) が局所共形ケーラー計量 g をもつと仮定する. このとき, Lee 形式 ω に対して, $\omega-\omega_0=df$ を満たす左不変な閉1 次形式 ω_0 と M 上の C^∞ 級関数 f が存在する [7]. これらを用いて, 左不変な 2 次形式 Ω_0 を, 左不変なベクトル場 X, Y に対して,

$$\Omega_0(X,Y) := \int_{x\in M}(e^{-f}\Omega)_x(X_x,Y_x)d\mu,$$

但し, $d\mu$ は両側不変な M 上の体積要素, と定義する. これより, (M, J) 上に, Ω_0 を基本2 次形式とする左不変なエルミート構造 $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ が決まり, $d\Omega_0=\omega_0\wedge\Omega_0$ を満たす [1]. 即ち, G に対応する完全可解リー環 $\mathfrak{g}$ 上に局所共形ケーラー構造 $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ が誘導される.

(M, g) をリーマン多様体とし, α を M 上の平行な 1 次形式とする. α は閉 1 次形式であるが, 次が知られている：

定理 3. [8] コンパクトなリーマン多様体 (M, g) において, 任意の α-閉形式は, α-完全形式である.

したがって, Vaisman 多様体の基本 2 次形式 Ω は $-\omega$-完全形式となる. さらに, Vaisman 可解多様体の場合, 上記の左不変な基本 2 次形式 Ω_0 も $-\omega_0$-完全形式となる [10].

3. 主定理の証明

$(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle, J)$ を前章で得られた局所共形ケーラー完全可解リー環とする. この基本2 次形式 Ω_0 は, 閉 1 次形式 ω_0 と 1 次形式 η_0 を用いて, $\Omega_0=d_{-\omega_0}\eta_0$ によって与えられることに注意する. 本章では, 主定理の証明の概略を述べる.

$\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ によって誘導される $\mathfrak{g}^*$ から $\mathfrak{g}$ への線形写像を γ_0 とし, $A:=\gamma_0(\omega_0)$ とおく. また, $\langle A, A\rangle=1$ と仮定してよい.

局所共形ケーラー構造をもつ可解リー環 $\mathfrak{g}$ について, 次が成り立つ：

定理 4. [11] 基本 2 次形式 Ω_0 が $-\omega_0$-完全形式ならば, Lee 形式 ω_0 は平行である.

定理 5. [11] $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ から誘導される $\wedge\mathfrak{g}^*$ 上の内積を $(\ ,\ )$ とする. このとき, 次の Schwarz の不等式

$$(\Omega_0, d_{-\omega_0}(\omega_0\circ J))^2 \leq (\Omega_0,\Omega_0)(d_{-\omega_0}(\omega_0\circ J), d_{-\omega_0}(\omega_0\circ J))$$

は, 次と同値である：

$$0\leq\langle[A, JA], JA\rangle.$$

$\Omega_0=d_{-\omega_0}\eta_0$ より, 定理 4 から, ω_0 は平行である. ゆえに,

$$\langle[A,JA],JA\rangle=\langle A,\nabla_{JA}JA\rangle=\omega_0(\nabla_{JA}JA)=-\nabla_{JA}\omega_0(JA)=0$$

となる. 即ち, 定理 5 より,

$$\Omega_0=kd_{-\omega_0}(\omega_0\circ J)=k(-\omega_0\wedge\omega_0\circ J+d(\omega_0\circ J))$$

を満たす $k\in\mathbb{R}$ が存在する. 特に, $\langle A, A\rangle=1$ より, $k=-1$ となる. $\Omega_0=d_{-\omega_0}(-\omega_0\circ J)$ から, $JA\in Z(\mathfrak{g})$ となる [10].

$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{A, JA\} \oplus \mathfrak{b}$ と直交分解し, $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{span}\{JA\} \oplus \mathfrak{b}$ とおく. また, π を $\mathfrak{g}_1$ から $\mathfrak{g}_1/\mathrm{span}\{JA\}$ への射影とする. $JA \in Z(\mathfrak{g})$ より, π は準同型となることに注意する.

Φ を, $\Phi(JA) = 0$, $\Phi(X) = JX$ $(X \in \mathfrak{b})$ によって定義される $\mathfrak{g}_1$ から $\mathfrak{g}_1$ への線形写像とする. これによって, $\mathfrak{g}_1/\mathrm{span}\{JA\}$ から $\mathfrak{g}_1/\mathrm{span}\{JA\}$ への線形写像 $\widetilde{\Phi}$ を

$$\widetilde{\Phi}(\pi(X)) = \pi(\Phi(X))$$

と定義する. 次が成り立つ：

補題 6. $\widetilde{\Phi}$ は, $\mathfrak{g}_1/\mathrm{span}\{JA\}$ 上の複素構造となる.

$\mathfrak{g}_1/\mathrm{span}\{JA\}$ 上の 2 次形式を,

$$\widetilde{\Omega}_0(\pi(X), \pi(Y)) = d(-\omega_0 \circ J)(X, Y)$$

と定義する. $JA \in Z(\mathfrak{g})$ より, これは well-defined である. 次が成り立つ：

補題 7. $\widetilde{\Omega}_0$ は閉形式である.

さらに, 次が成り立つ：

命題 8. $(\widetilde{\Omega}_0, \widetilde{\Phi})$ はケーラー構造となる.

一般に次が知られている：

定理 9. [3] $\mathfrak{g}$ をユニモジュラーな完全可解リー環とする. $\mathfrak{g}$ がケーラー構造をもつならば, $\mathfrak{g}$ は可換となる.

完全可解リー群 G が格子群 Γ をもつことから, $\mathfrak{g}$ がユニモジュラーである. これより, $\mathfrak{g}_1/\mathrm{span}\{JA\}$ も 定理 9 の仮定を満たす. したがって, $\mathfrak{g}_1/\mathrm{span}\{JA\}$ は可換となる. 即ち, $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \subset \mathrm{span}\{JA\}$ であるが, $(\widetilde{\Omega}_0, \widetilde{\Phi})$ はケーラー構造であることから, $\mathfrak{g}_1$ は Heisenberg リー環となる.

ω_0 が平行であることから, $\mathfrak{g}_1$ から $\mathfrak{g}_1$ への線形写像 $\mathrm{ad}(A)$ の表現行列は歪対称である. 一方, $\mathfrak{g}$ は完全可解リー環より, 線形写像 $\mathrm{ad}(A)$ の固有値は実数のみである. よって, 線形写像 $\mathrm{ad}(A)$ は自明となる.

参考文献

[1] F. A. Belgun: On the metric structure of non-Kähler complex surfaces, Math. Ann. **317** (2000), 1-40.

[2] L. A. Cordero, M. Fernández and M. de Léon: Compact locally conformal Kähler nil-manifolds, Geom. Dedicata **21**(1986), 187-192.

[3] J. M. Dardie and A. Medina: Kähler Lie algebras and double extension, J. Algebra **185** (1996), no. 3, 774-795.

[4] J. Dixmier: Cohomologie des algebres de Lie nilpotentes, Acta Sci. Math. Szeged **16** (1955), 246-250.

[5] S. Dragomir and L. Ornea: *Locally conformal Kähler geometry*, Birkhäuser (1998).

[6] K. Hasegawa: A note on compact solvmanifolds with Kähler structures, Osaka J. Math **43** (2006), 131-135.

[7] A. Hattori : Spectral sequence in the de Rham cohomology of fibre bundles, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I . **8** (1960), 289-331.

[8] M. de León, B, López, J. C. Marrero and E, Padrón: On the computation of the Lichnerowicz-Jacobi cohomology, J. Geom. Phys. **44** (2003), no. 4, 507-522.

[9] H. Sawai: Locally conformal Kähler structures on compact nilmanifolds with left-invariant complex structures, Geom. Dedicata **125** (2007), 93-101.

[10] ________: Locally conformal Kähler structures on compact solvmanifolds Osaka J. Math. **49**(2012), no. 4, 1087-1102.

[11] ________: Vaisman structure on compact solvmanifolds, Geom. Dedicata **178** (2015), 389-404.

[12] ________: Structure Theorem for Vaisman completely solvmanifolds, preprint.

[13] F. Tricerri: Some examples of locally conformal Kähler manifolds, Rend. Sem. Math. Univ. Politec. Torino **40**(1982), no.1, 81-92.

[14] I. Vaisman: Locally conformal Kähler manifolds with parallel Lee form, Rend. Mat. **12**(1979), 263-284.