可解多様体における
局所共形ケーラー構造をもつ必要条件について

沢井 洋
沼津高専　教養科　数学教室

序章

G を単連結な可解リー群とし, Γ を G の格子群とするとき, コンパクト多様体 $\Gamma\backslash G$ を可解多様体という. べき零多様体も同様に定義される. 可解多様体がケーラー構造をもつならば, 複素トーラスとなることが知られている ([3], [7]). 可解多様体におけるケーラー構造の拡張となる構造について報告する.

(M, g, J) をコンパクトなエルミート多様体とする. また, Ω を g の基本 2 次形式, 即ち, ベクトル場 X, Y に対して $\Omega(X, Y) = g(JX, Y)$ で定まる 2 次形式とする. $d\Omega = \omega \wedge \Omega$ を満たす閉 1 次形式 ω が存在するとき, (M, g, J) を局所共形ケーラー多様体という. また, 閉 1 次形式 ω を Lee 形式という. $\omega = df$ のときは, $(M, e^{-f}g, J)$ はケーラー多様体である. ケーラー多様体でない局所共形ケーラー多様体の例として, Hopf 曲面 [11], 井上曲面 ([10], [2]), Kodaira-Thurston 多様体 [5] が, 知られている (cf. [6]). また, 井上曲面, Kodaira-Thurston 多様体は可解多様体の構造をもつ.

(M, g) をコンパクトなリーマン多様体とし, α を M 上の閉 1 次形式とする. 微分形式の作用素 $d_\alpha : A^p(M) \to A^{p+1}(M)$ を, $d_\alpha\beta := \alpha \wedge \beta + d\beta$ と定義する. α は閉 1 次形式より, $d_\alpha^2 = 0$ を満たす. この作用素を adapted 作用素という. さらに, $d_\alpha\beta = 0$ のとき β を α-閉形式, $\beta = d_\alpha\gamma$ のとき β を α-完全形式とそれぞれいう. 局所共形ケーラー構造の基本 2 次形式 Ω は, $-\omega \wedge \Omega + d\Omega = 0$ を満たすことから, $-\omega$-閉形式である. また, 微分作用素と同様に, adapted 作用素にも余微分作用素 δ_α が定義され, 微分形式上の内積における adapted 作用素の転置作用素となっている.

n 次元複素多様体 M が, 各点において 1 次独立となる正則ベクトル場 $\{X_1, \cdots, X_n\}$ をもつとき, 複素平行化可能多様体という. 複素平行化可能なコンパクト複素多様体は, 複素リー群 G, 及びその離散群 D を用いて, $M \cong D\backslash G$ とかける [12]. Abbena-Grassi [1] は, 複素平行化可能なコンパクト多様体は, 局所共形ケーラー構造をもたないことを示した. 複素構造が左不変な複素構造の場合, 局所共形ケーラーべき零多様体は一般化された Kodaira-Thurston 多様体となる [8].

Lee 形式 ω が計量 g に関して平行のとき, 局所共形ケーラー多様体 (M, g, J) を一般化された Hopf 多様体という. Hopf 曲面, Kodaira-Thurston 多様体は一般化された Hopf 多様体であり, 井上曲面はこれと異なる [10]. Vaisman [11] は, 一般化された

Hopf 多様体は, Sasakian 多様体上の S^1-主束の構造をもつことを示した. 左不変な複素構造をもつ可解多様体において, Lee 形式が平行でない局所共形ケーラー構造について考える.

主定理

$(M=\Gamma\backslash G, g, J)$ を左不変な複素構造をもつ局所共形ケーラー可解多様体とし, ω をその Lee 形式とする. このとき, $\omega-\omega_0=df$ を満たす左不変な閉 1 次形式 ω_0 と M 上の関数 f が存在すると仮定する. これらを用いて, 左不変で非退化な 2 次形式 Ω_0 を, $X,Y\in\mathfrak{g}$ に対して,

$$\Omega_0(X,Y):=\int_{x\in M}(e^{-f}\Omega)_x(X_x,Y_x)d\mu,$$

但し, $d\mu$ は両側不変な M 上の体積要素, と定義する. これより, 左不変な局所共形ケーラー構造 $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ が得られ, その Lee 形式は ω_0 となる [4]. 即ち, ω_0 を Lee 形式とする局所共形ケーラー可解リー環 $(\mathfrak{g},\langle\ ,\ \rangle, J)$ が得られる. 同様に, ストークスの定理を用いて, 次を得る：

命題 1. (cf. [4])

1. $\Omega=d_{-\omega}\eta$ ならば, $\Omega_0=d_{-\omega_0}\eta_0$ となる.
2. $\Omega=d_{-\omega}(\omega\circ J)$ ならば, $\Omega_0=d_{-\omega_0}(\omega_0\circ J)$ となる.

Lee 形式の平行性について, 次が知られている：

定理 2. [9] $\Omega_0=d_{-\omega_0}(\omega_0\circ J)$ ならば, Lee 形式 ω_0 は平行である.

上記は, 基本 2 次形式 Ω_0 と 2 次形式 $d_{-\omega_0}(\omega_0\circ J)$ の関係が, Lee 形式の平行性と関連があることを示唆している. そこで, $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ から, $\wedge\mathfrak{g}^*$ の内積 $(\ ,\ )$ が誘導されるが, 次の Schwarz の不等式を考える：

$$(\Omega_0, d_{-\omega_0}(\omega_0\circ J))^2\leq(\Omega_0,\Omega_0)(d_{-\omega_0}(\omega_0\circ J), d_{-\omega_0}(\omega_0\circ J))$$

$\mathfrak{g}$ はユニモジュラーであることから, $\delta_{-\omega_0}$ は $d_{-\omega_0}$ の転置作用素である. よって, $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ によって誘導される $\mathfrak{g}^*$ から $\mathfrak{g}$ への同型写像の ω_0 の像を A とすると, この Schwarz の不等式 は次と同値である：

$$0\leq\langle[A,JA],JA\rangle$$

以上より, 次の定理が成り立つ：

主定理 1. $\langle[A,JA],JA\rangle=0$ ならば, Lee 形式 ω_0 は平行である.

さらに, 主定理 1 に帰着することによって, 次が成り立つ.

主定理 2. 基本 2 次形式 Ω_0 が $-\omega_0$-完全形式ならば, Lee 形式 ω_0 は平行である.

なお, この仮定は, 定理 2 と異なり, 複素構造に関する条件がないことに注意する. 即ち, 局所共形ケーラー構造の Lee 形式の平行性は, 複素構造と関係なく, その基本 2 次形式によって決まる. また, 井上曲面の局所共形ケーラー構造は, 主定理の仮定を満たしていない.

参考文献

[1] E. Abbena and A. Grassi: Hermitian left invariant metrics on complex Lie groups and cosymplectic Hermitian manifolds, Boll. U. M. I A(6) **5**(1986), 371-379.

[2] L. C. de Andrés, L. A. Cordero, M. Fernández and J. J. Mencía: Examples of four dimensional locally conformal Kähler manifolds, Geom. Dedicata **29**(1989), 227-233.

[3] D. Arapura and M. Nori: Solvable fundamental groups of algebraic varieties and Kähler manifolds, Compositio Math, **116**(1999), 173-188.

[4] F. A. Belgun: On the metric structure of non-Kähler complex surfaces, Math. Ann. **317**(2000), 1-40.

[5] L. A. Cordero, M. Fernández and M. de Léon: Compact locally conformal Kähler nilmanifolds, Geom. Dedicata **21**(1986), 187-192.

[6] S. Dragomir and L. Ornea: *Locally conformal Kähler geometry*, Birkhäuser(1998).

[7] K. Hasegawa: A note on compact solvmanifolds with Kähler structures, Osaka J. Math **43**(2006), 131-135.

[8] H. Sawai: Locally conformal Kähler structures on compact nilmanifolds with left-invariant complex structures, Geom. Dedicata **125**(2007), 93-101.

[9] ―――――: Locally conformal Kähler structures on compact solvmanifolds Osaka J. Math. **49**(2012), no. 4, 1087-1102.

[10] F. Tricerri: Some examples of locally conformal Kähler manifolds, Rend. Sem. Math. Univ. Politec. Torino **40**(1982), no.1, 81-92.

[11] I. Vaisman: Locally conformal Kähler manifolds with parallel Lee form, Rend. Mat. **12**(1979), 263-284.

[12] H. C. Wang: Complex parallizable manifolds, Pro. Amer. Math. Soc. **5**(1954), 771-776.