多添え字直交多項式における見かけの特異性の合流

第２０回沼津研究会

(2013年3月7日)

京都大学基礎物理学研究所　佐々木隆

Ryu Sasaki, Yukawa Inst. Kyoto

藤井一幸さん
還暦おめでとう！！！

最初に出会ったのは30年前

数研での研究集会：1983年初夏

私の講演に，やたらと質問を投げかけてくる

元気の良い若者がいた

Harmonic Map: **C**-->Complex Grassmann mfd

two-dimensional sigma model to G(N,m)

あらすじ

$$\mathbb{C} \ni z \ \to \{f_1, f_2, \ldots, f_m\} \quad f_j(z) \in \mathbb{C}^N$$

holomorphic

$$\{f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots, f_{2m}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\partial_z f_1, \partial_z f_2, \ldots, \partial_z f_m\}$$

$$\{f_{2m+1}, f_{2m+2}, \ldots, f_{3m}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\partial_z f_{m+1}, \partial_z f_{m+2}, \ldots, \partial_z f_{2m}\}$$

$$\{f_{3m+1}, f_{3m+2}, \ldots, f_{4m}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\partial_z f_{2m+1}, \partial_z f_{2m+2}, \ldots, \partial_z f_{3m}\}$$

$$\vdots$$

$$\{f_{N-m+1}, \ldots, f_N\}$$

Gram-Schmidt orthonormalisation

$$\{f_1, f_2, \ldots, f_N\} \ \to \{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$$

m 個の連続した単位直交ベクトル

$$\mathbb{C} \to \{e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{k+m-1}\} \in G(N,m)$$
$$G(N,m) = U(N)/U(m) \otimes U(N-m)$$
$$k = 1, 2, \ldots, N-m+1$$

Harmonic Map from C to G(N,m)

変数：m個のN次元正規直交ベクトル

$$X = \big(u_1, u_2, \ldots, u_m\big), \quad u_j \in \mathbb{C}^N,\ u_j^\dagger u_k = \delta_{j\,k}$$

m 次元部分空間への射影

$$P = XX^\dagger = \sum_{j=1}^{m} u_j u_j^\dagger$$

$$[\Delta P, P] = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad z = x + \sqrt{-1}y$$

解：

$$X = \left(e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{k+m-1}\right), \quad k = 1, \ldots, N-m+1$$

Volume 130B, number 1,2 PHYSICS LETTERS 13 October 1983

GENERAL CLASSICAL SOLUTIONS OF THE COMPLEX GRASSMANNIAN AND CP^{N-1} SIGMA MODELS

Ryu SASAKI
Research Institute for Theoretical Physics, Hiroshima University, Takehara, Hiroshima 725, Japan

Received 11 May 1983
Revised manuscript received 6 July 1983

Z. Phys. C – Particles and Fields 24, 163–170 (1984)

Local Theory of Solutions for the Complex Grassmannian and CP^{N-1} Sigma Models

Ryu Sasaki
Research Institute for Theoretical Physics, Hiroshima University, Takehara, Hiroshima, 725 Japan

Received 7 November 1983

前略　はじめまして。私は九大・理・数の助手をしています。先日の「場の量子論」での講演を聞き，手紙を書きました。実は私も2次元 Grassmann model に興味をもっていて Din-Zakrewski 達の論文を読んでいました。
Din-Zakrewski 達の解を利用して Dirac eq. の解を構成しています（もっともこれも彼らの $\mathbb{C}P^N$ model でのそれの trivial な拡張だけですが）。その Note の copy を同封します。… もっとも佐々木さんもご存知だと思いますが…。
　ところでお願いなのですが，講演の原稿の copy を送っていただけませんか。また九大に来られて講演していただければ最高ですが。
宜しくお願いします。
草々

RESEARCH INSTITUTE FOR THEORETICAL PHYSICS
HIROSHIMA UNIVERSITY
TAKEHARA HIROSHIMA 725 JAPAN

1983.6.8

藤井様

お手紙とノートを有難うございます。
同じ興味を持っていたので、京都で深く議論ができなかったのは残念でした。

私は今、genericな解が京都で話したものになるという証明を考えています。大部分は理解できたと思っていますが、未だ細かい所がいくつか残っています。Grassmann σ-模型に結合したDirac方程式も藤井さんのノートのような形で一般解が求まると思っていますが、私は未だ計算していません。

九大でお話をさせて頂く機会があればよろこんで行き度いと思っております。数学の方達から多くのことを学べると期待しております。私は今年は講義の義務が無いので、

6月16~20日, 7月7~8日, 8月12~14日を除いて, いつでも空いています。

京都でのスライドのコピーと、同内容のプレプリントを同封しました。
会ってお話できるのを楽しみにしております。

佐々木隆

藤井さんの最初の論文

Progress of Theoretical Physics, Vol. 71, No. 2, February 1984

Classical Solutions for the Supersymmetric Grassmannian Sigma Models in Two Dimensions. I

Kazuyuki FUJII, Takao KOIKAWA*,† and Ryu SASAKI**

Department of Mathematics, Kyushu University, Fukuoka 812
**Research Institute for Fundamental Physics Kyoto University, Kyoto 606*
***Research Institute for Theoretical Physics Hiroshima University, Takehara, Hiroshima 725*

(Received September 16, 1983)

Progress of Theoretical Physics, Vol. 71, No. 4, April 1984

Classical Solutions for the Supersymmetric Grassmannian Sigma Models in Two Dimensions. II

Kazuyuki FUJII and Ryu SASAKI*

Department of Mathematics, Kyushu University, Fukuoka 812
**Research Institute for Theoretical Physics Hiroshima University, Takehara, Hiroshima 725*

(Received November 18, 1983)

今日の話

2階Fuchs型微分方程式の有理解

$$y = \frac{q(x)}{p(x)} \qquad p(x)q(x) : \text{polynomial in } x$$

分母が多重零点を持つもの

$$p(x) = (x - x_0)^m [1 + O(x - x_0)], \qquad m \geq 2$$

→ $\rho = -m$ の確定特異点　が作れるか？

- $m = 1,$ 多添え字直交多項式, ∞個の例
- $m = 2,$ 見かけの特異点の合流として作った
- $m \geq 3,$??????

R. Sasaki & K. Takemura, "Global solutions of certain second order differential equations with a high degree of apparent singularity," SIGMA **8** (2012) 085,
C.-L. Ho, R. Sasaki & K. Takemura,
"Confluence of apparent singularities in multi-indexed orthogonal polynomials: the Jacobi case," J. Phys. **A46** in press

方法：ダルブー変換とパラメタの微調整

副産物：重み関数 $w(x) = \dfrac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{(ax+b)^4 d(x)^2}$, $d(x)$: 多項式

を持つ直交多項式系

あらすじ

１．Fuchs型微分方程式：おさらい
２．シュレディンガー方程式のダルブー変換

３．多重ダルブー変換

４．Poschl-Tellerポテンシャルと Jacobi多項式解

５．`たね‘として「仮想状態解」を使う

６．パラメタの微調整で分母の多重零点（合流）

(2階）Fuchs型微分方程式

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + A(x)\frac{dy(x)}{dx} + B(x)y(x) = 0, \ \ A, B: \ \ \mathrm{meromorphic}$$

確定特異点： A 高々1次の極

$x = x_0$ $$A(x) = \frac{\alpha}{x - x_0} + O(x - x_0)$$

B 高々2次の極 $$B(x) = \frac{\beta}{(x - x_0)^2} + \frac{\gamma}{x - x_0} + O(x - x_0)$$

局所解：
$$\begin{aligned} y(x) = & c_1(x - x_0)^{\rho_1}\left(1 + O(x - x_0)\right) \\ & + c_2(x - x_0)^{\rho_2}\left(1 + O(x - x_0)\right) \end{aligned}$$

特性指数： $0 = \rho(\rho - 1) + \rho\alpha + \beta = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)$

Fuchs型： （∞を含めて）すべての特異点が確定

基本的に局所理論

シュレディンガー方程式のダルブー変換

任意の2階方程式：

独立・従属・変数変換でシュレディンガー型に

$$\mathcal{H}\psi(x)=\mathcal{E}\psi(x),\quad \mathcal{H}\stackrel{\text{def}}{=}-\frac{d^2}{dx^2}+U(x),\quad U(x),\mathcal{E}\in\mathbb{C},$$

`たね'の解　$\mathcal{H}\varphi_j(x)=\tilde{\mathcal{E}}_j\varphi_j(x),\quad j=1,\ldots,M$

$$\psi_1^{(1)}(x)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{d\psi(x)}{dx}-\frac{\partial_x\varphi_1(x)}{\varphi_1(x)}\psi(x)=\frac{\mathrm{W}[\varphi_1,\psi](x)}{\varphi_1(x)},$$

$$\varphi_{1,j}^{(1)}(x)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\mathrm{W}[\varphi_1,\varphi_j](x)}{\varphi_1(x)},\qquad j=2,\ldots,M$$

$$\mathcal{H}^{(1)}\psi_1^{(1)}(x)=\mathcal{E}\psi_1^{(1)}(x),\quad \mathcal{H}^{(1)}\varphi_{1,j}^{(1)}(x)=\tilde{\mathcal{E}}_j\varphi_{1,j}^{(1)}(x)$$

$$U^{(1)}(x)\stackrel{\text{def}}{=}U(x)-2\partial_x^2\log\varphi_1(x)$$

`たね'の零点：　$\varphi_1(x) = (x - x_0)\big(1 + O(x - x_0)\big)$

$x_0 : U(x)$ の非特異点

$$x \approx x_0, \qquad U(x) = U(x_0) + \frac{2}{(x - x_0)^2} + O(x - x_0)$$

⇒ 見かけの特異点　$\rho = -1,\ 2$

$\log(x - x_0)$　項現れず

多重零点無し

多重ダルブー変換

$$\psi^{(M)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{W}[\varphi_1,\ldots,\varphi_M,\psi](x)}{\mathrm{W}[\varphi_1,\ldots,\varphi_M](x)},$$

ロンスキアン

$$\mathrm{W}[f_1,\ldots,f_N](x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Det}\left(\frac{d^{k-1}f_j(x)}{dx^{k-1}}\right)_{1\le j,k\le N}$$

$$\mathcal{H}^{(M)}\psi^{(M)}(x) = \mathcal{E}\psi^{(M)}(x),$$

$$U^{(M)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} U(x) - 2\frac{d^2 \log \mathrm{W}[\varphi_1,\ldots,\varphi_M](x)}{dx^2}$$

$\mathrm{W}[\varphi_1,\ldots,\varphi_M](x)$ の多重零点

$$\mathrm{W}[\varphi_1,\ldots,\varphi_M](x) = (x-x_0)^m\big(1+O(x-x_0)\big)$$

$$x \approx x_0, \qquad U^{(M)}(x) = U(x_0) + \frac{2m}{(x-x_0)^2} + O(x-x_0)$$

$$m=3 \Rightarrow \rho = -2, 3, \quad m=6 \Rightarrow \rho = -3, 4, \ldots$$

2013年2月22日金曜日

Poschl-TellerポテンシャルとJacobi多項式解

$$U(x;g,h)=\frac{g(g-1)}{\sin^2 x}+\frac{h(h-1)}{\cos^2 x}-(g+h)^2,$$

$$g>0,\quad h>0,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

確定特異点：$x=0,\ \rho=g,1-g;\quad x=\pi/2,\rho=h,1-h,$

固有関数の完全系

$$\mathcal{H}\phi_n(x;g,h)=\mathcal{E}_n(g,h)\phi_n(x;g,h)$$

$$\phi_n(x;g,h)=(\sin x)^g(\cos x)^h P_n^{(g-1/2,h-1/2)}(\eta(x)),$$

$$\eta(x)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\cos(2x),$$

$$\mathcal{E}_n(g,h)=4n(n+g+h),\qquad n=0,1,2,\ldots,$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+1)_k}{k!(\alpha+1)_k}\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^k$$

ヤコビ多項式

` たね'の「仮想状態解」

` たね' も多項式解が欲しい $\Longrightarrow$ 有理解

ポテンシャルの離散対称性：

特性指数の取り換え $g \leftrightarrow 1-g \quad \text{and/or} \quad h \leftrightarrow 1-h$

$$\tilde{\phi}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{v}}(x;g,h) \stackrel{\text{def}}{=} (\sin x)^{g}(\cos x)^{1-h} P^{(g-1/2,1/2-h)}_{\mathrm{v}}(\eta(x)),$$

$$\tilde{\mathcal{E}}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{v}}(g,h) = -4(g+\mathrm{v}+1/2)(h-\mathrm{v}-1/2);$$

$$\tilde{\phi}^{\mathrm{II}}_{\mathrm{v}}(x;g,h) \stackrel{\text{def}}{=} (\sin x)^{1-g}(\cos x)^{h} P^{(1/2-g,h-1/2)}_{\mathrm{v}}(\eta(x)),$$

$$\tilde{\mathcal{E}}^{\mathrm{II}}_{\mathrm{v}}(g,h) = -4(g-\mathrm{v}-1/2)(h+\mathrm{v}+1/2);$$

$$\tilde{\phi}^{\mathrm{III}}_{\mathrm{v}}(x;g,h) \stackrel{\text{def}}{=} (\sin x)^{1-g}(\cos x)^{1-h} P^{(1/2-g,1/2-h)}_{\mathrm{v}}(\eta(x)),$$

$$\tilde{\mathcal{E}}^{\mathrm{III}}_{\mathrm{v}}(g,h) = -4(\mathrm{v}+1)(g+h-1-\mathrm{v})$$

$$\infty = (\tilde{\phi}^{\mathrm{I}},\tilde{\phi}^{\mathrm{I}}) = (1/\tilde{\phi}^{\mathrm{I}},1/\tilde{\phi}^{\mathrm{I}}) = (\tilde{\phi}^{\mathrm{II}},\tilde{\phi}^{\mathrm{II}}) = (1/\tilde{\phi}^{\mathrm{II}},1/\tilde{\phi}^{\mathrm{II}}) = \infty$$

$$(\tilde{\phi}^{\mathrm{III}},\tilde{\phi}^{\mathrm{III}}) = \infty, \quad (1/\tilde{\phi}^{\mathrm{III}},1/\tilde{\phi}^{\mathrm{III}}) < \infty$$

`たね' $\mathrm{W}[\tilde{\phi}_{\mathrm{v}_1},\ldots,\tilde{\phi}_{\mathrm{v}_M}](x),\quad \mathcal{D}\stackrel{\text{def}}{=}\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_M\}$

を使って 固有関数の完全系を多重ダルブー変換する

$$\frac{\mathrm{W}[\tilde{\phi}_{\mathrm{v}_1},\ldots,\tilde{\phi}_{\mathrm{v}_M},\phi_n](x)}{\mathrm{W}[\tilde{\phi}_{\mathrm{v}_1},\ldots,\tilde{\phi}_{\mathrm{v}_M}](x)}=(1-\eta)^{\Lambda}(1+\eta)^{\Sigma}\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{D};n}(\eta)}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta)}$$

$\mathcal{P}_{\mathcal{D};n}(\eta)$： 多添え字直交多項式

$\Xi_{\mathcal{D}}(\eta)$：分母多項式，一般には単純零点を持つ

$\dfrac{\mathcal{P}_{\mathcal{D};n}(\eta)}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta)}$： 2階のFuchs型微分方程式の有理解

確定特異点は $\pm1,\infty$ と $\Xi_{\mathcal{D}}(\eta)$ の零点

パラメタの微調整で分母の多重零点を実現

⇒ 見かけの特異点の合流

分母多項式 $\Xi_{\mathcal{D}}(\eta)$ の判別式 $D(g,h):g,h$ の多項式

その適当な零点になるように $g=g(h),\ \mathrm{or}\ h=h(g)$

を決める　あるいは適当な有理解 (g_0,h_0) をとる

具体例：　8個の｀たね′と微調整

$$[\tilde\phi^{\mathrm{I}}_2,\tilde\phi^{\mathrm{III}}_1];g=\frac{3(h-3)}{4h-9},\quad [\tilde\phi^{\mathrm{II}}_1,\tilde\phi^{\mathrm{II}}_2,\tilde\phi^{\mathrm{III}}_1];g=\frac{3(5h+3)}{4h+3},$$

$$[\tilde\phi^{\mathrm{I}}_1,\tilde\phi^{\mathrm{III}}_2];g=\frac{h}{4h-9},\quad [\tilde\phi^{\mathrm{II}}_1,\tilde\phi^{\mathrm{III}}_2];g=\frac{9h}{4h-1},$$

$$[\tilde\phi^{\mathrm{II}}_2,\tilde\phi^{\mathrm{III}}_1];g=\frac{9(h-1)}{4h-3},\quad [\tilde\phi^{\mathrm{I}}_1,\tilde\phi^{\mathrm{I}}_2,\tilde\phi^{\mathrm{III}}_1];g=-\frac{3(h-3)}{4h-15},$$

$$[\tilde\phi^{\mathrm{II}}_1,\tilde\phi^{\mathrm{III}}_1,\tilde\phi^{\mathrm{III}}_2];g=\frac{3(5h-8)}{4h-7},\quad [\tilde\phi^{\mathrm{I}}_1,\tilde\phi^{\mathrm{III}}_1,\tilde\phi^{\mathrm{III}}_2];g=\frac{7h-24}{4h-15},$$

$\Xi_{\mathcal{D}}(\eta)$　すべて3次の零点、同じ場所で
$\mathcal{P}_{\mathcal{D};n}(\eta)$　単純零点を持つ

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{D};n}(\eta)}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta)}\to y_n(\eta)=\frac{P_{\mathcal{D};n}(\eta)}{w(\eta)}$$

$w(\eta)$　2次の零点　　$\rho=-2$

第1の例：$g=\dfrac{3(h-3)}{4h-9}$, $y_n(\eta)=\dfrac{P_{\mathcal{D};n}(\eta)}{w(\eta)}$ の方程式

$$
\begin{aligned}
&(1-\eta^2)y_n''(\eta)+(h-g-2-(g+h-1)\eta)\,y_n'(\eta)\\
&+\Big\{(n+1)(n+g+h-1)\\
&\quad+\frac{6(2h-3)}{2(h-3)\eta-2h+3}+\frac{18(4h-9)}{(2(h-3)\eta-2h+3)^2}\Big\}y_n(\eta)=0,
\end{aligned}
$$

多項式 $P_{\mathcal{D};n}(\eta)$ の直交性条件

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}d\eta\ \frac{(1-\eta)^{g-1/2}(1+\eta)^{h-5/2}}{(2h\eta-6\eta-2h+3)^4}P_{\mathcal{D},n}(\eta;h)\ P_{\mathcal{D},m}(\eta;h)\\
&\qquad\qquad=K_n(h)\delta_{nm},\quad n,m=-2,0,1,2,\ldots,
\end{aligned}
$$

おわりに

$\rho = -3$ の例は作れていない

6次の零点を持つ｀たね′が必要

有理関数解の特性指数 $-\rho$ の最大値は？

多分有界だろう 何が決めているのか??

参考文献

D.Gomez-Ullate, N.Kamran and R.Milson,``A conjecture on exceptional orthogonal polynomials "Found. Comput. Math. In press, arXiv:1203.6857[math-ph]

monodromy-free Schroedinger operators

J.J.Duistermaat and F.A.Gr"unbaum, ``Differential equations in thespectral parameter," Commun. Math. Phys. 103 (1986) 177-240.
A.A. Oblomkov, ``Mondromy-free Schr"odinger operators with quadratically increasing potentials,"Theor. Math. Phys. 121 (1999) 1574--1584.
J.Gibbons and A.P. Veselov, ``On the rational monodromy-free potentials with sextic growth," J. Math. Phys. 50 (2009) 013513 (25pp), arXiv:0807.3502[math-ph].

Entertainment

微調整のlinear fractional curveの行列式

$$g = \frac{3(h-3)}{4h-9},\ -27+36=9; \quad g = \frac{3(5h+3)}{4h+3},\ 45-36=9;$$

$$g = \frac{h}{4h-9},\ -9; \quad g = \frac{9h}{4h-1}, \quad -9$$

$$g = \frac{9(h-1)}{4h-3},\ -27+36=9; \quad g = -\frac{3(h-3)}{4h-15},\ -45+36=-9$$

$$g = \frac{3(5h-8)}{4h-7},\ -105+96=-9; \quad g = \frac{7h-24}{4h-15},\ -105+96=-9$$

3次の零点と関係？？？