接触多様体の量子化の多様性　2020.3.9. 静岡大学, C.309　大森英樹

接触多様体 M(dim $2m$+1)= 特性ベクトル場, Poisson 括弧積があって $C^\infty(M)$ が Liouville 括弧積 $\{f,g\}_c$ で Lie 環となるもの.

接触多様体の「変形量子化」= μ 制御代数 $\mathcal{A}_\mu$(結合代数) を構成すること.

構成法は面倒なので構成されたもののほうから話す.

制御子 μ =作用素の「階数」をきめるための基準になる作用素.

μ 自身は -1 階と見ているが, μ^{-1} は微分作用素としては 2 階, 普通の関数は 0 階の作用素.

μ 制御代数 $\mathcal{A}_\mu$

(A.0): 位相結合代数

(A.1): $[\mu,\mathcal{A}_\mu]\subset\mu{*}\mathcal{A}_\mu{*}\mu$.　$[\mu^{-1},\mathcal{A}_\mu]\subset\mathcal{A}_\mu$

(A.2): $[\mathcal{A}_\mu,\mathcal{A}_\mu]\subset\mu{*}\mathcal{A}_\mu$.　$\mathcal{A}_\mu/\mu{*}\mathcal{A}_\mu$ は可換環.

(A.3): $\mathcal{A}_\mu{=}B\oplus\mu{*}\mathcal{A}_\mu$.　$\mathcal{A}_\mu{=}B\oplus\mu{*}B\oplus\mu^2{*}B\oplus\cdots\oplus\mu^{n-1}{*}B\oplus\mu^n{*}\mathcal{A}_\mu$

(A.4): $\mu{*}:\mathcal{A}_\mu\to\mu{*}\mathcal{A}_\mu$ one-to-one, onto.

特性微分: $\mathrm{ad}(\mu^{-1}):\mathcal{A}_\mu\to\mathcal{A}_\mu$

特性ベクトル場 = $\mathrm{ad}(\mu^{-1})$ が B に引起こす微分.

Poisson 括弧積 (B 上の双微分): $\{f,g\}{=}\mu^{-1}{*}[f,g]\ \mathrm{mod}\mu$.　$f,g\in B$.

Liouville 括弧積 $\{f,g\}_c$: $[\mu^{-1}{*}f,\mu^{-1}{*}g]$ の 1 階部分.　$f,g\in B$.

3 次元接触多様体では局所的には

$$\{f,g\}_c{=}f\partial_z g{-}g\partial_z f{+}\mu(\partial_x f\partial_y g{-}\partial_x g\partial_y f)$$

$M{=}\mathbb{R}^3$ の場合の変形量子化の問題とは:次のようなことだと思うことにする.

与えられているもの:

$B{=}C^\infty(\mathbb{R}^3)$, 特性ベクトル場 : $B{\to}B$, Poisson 括弧 $\{\ ,\ \}$.

構成するもの:

(a): Poisson 括弧 $\Longrightarrow$ u,v 生成の Weyl 代数

多様体に条件をつけてないからこれだけでよい.$[u,v]{=}i\hbar$.

(b): 特性ベクトル場 $\Longrightarrow$ u,v 空間に作用する微分作用素 D,
or D の symbol e.g.$D{=}z{+}\frac{1}{\hbar}2u{\circ}v$

昔はこれだけで「量子化された接触構造」と呼んでいた.

(c): 制御子 μ $\Longrightarrow$ D^{-1}

symbol(D^{-1}) さえあれば微分幾何には困らないから D^{-1} まで考える必要は無い?

接触ベクトル場の全体は Liouville 括弧積で無限次元の Lie 環になるのだから無限次元の Lie 群が欲しい!

X に対し $\exp tX$, $e_*^{t(z+\frac{1}{\hbar}2u\circ v)}$, 群の元を作らねばならない.

生ずる問題.

(1): 複素係数に拡張すると $e_*^{t(z+\frac{1}{\hbar}2u\circ v)}$ に分岐特異点があらわれる.

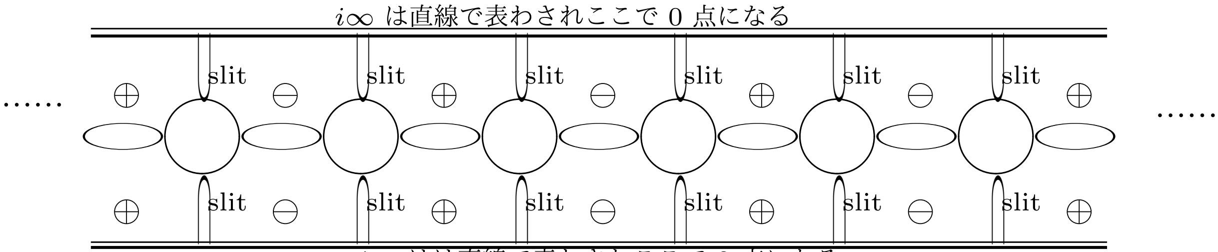
実係数に限れば何とかなる.

(2): 制御子は D^{-1} で作る:

$$(z{+}\frac{1}{\hbar}2u{\circ}v)_*^{-1}{=}\int_{-\infty}^{0}e_*^{it(z+\frac{1}{\hbar}2u\circ v)}dt.$$

積分路の取り方が分岐特異点の迂回のしかたで色々出てくる.

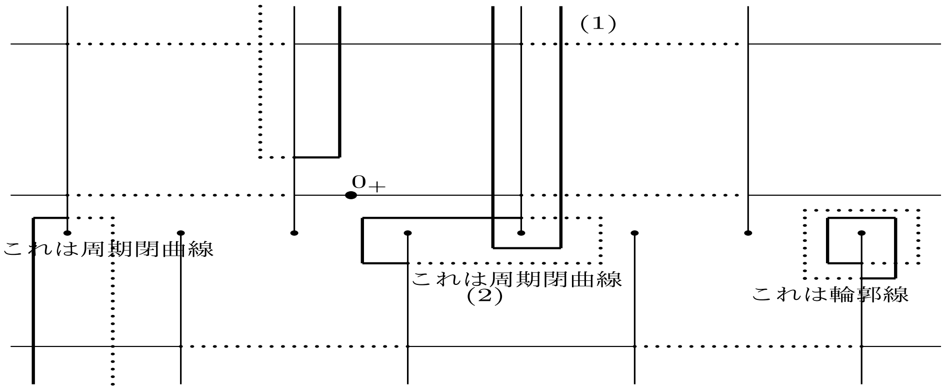
制御子が無数に作れる.



この現象はこれまで数学でも物理でも問題視されたことがない. その理由は Weyl 代数の積公式を Moyal とか正規順序積とかに限定しないで一般の積公式 $:\ :_K$ 公式にしないと見えないからである.

いろんな径路 γ に沿う積分で作った $z+\frac{1}{\hbar}2u{\circ}v$ の逆元を $\mu_{C\pm}(z)$ とする. "差" の部分を見えるように書く.

$$\mu_{C+}(z)=\int_{-\infty}^{0} e_*^{it(z+\frac{1}{\hbar}2u\circ v)}dt+\int_C e_*^{\xi(z+\frac{1}{\hbar}2u\circ v)}d\xi, \quad C\in\mathfrak{C}, \quad \mathrm{Im}\, z<1, \qquad (1)$$

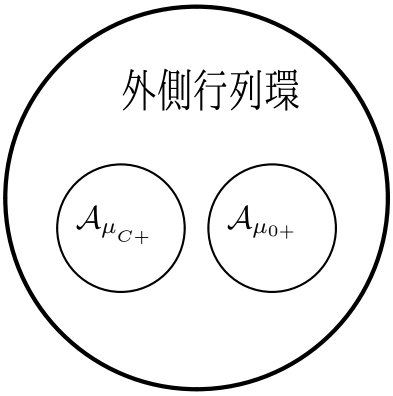


(図 5)

これも $\mathcal{R}_{-i\infty}^{+i\infty}$ と表わす

結合律のある代数の中に 2 つの逆元は同居できないから制御子が違えば μ 制御代数は違うものである.

違うのは制御子だけで他の材料は同じもので代数を作っているので 同形か, 同形でないか判定できるか ??



外側行列環

これは可能な μ 制御代数全部を含むものを別枠で作ることで解決する．これは識別標識がついていて区別はできるが全部を含むものである．「身長」という標識をつけて全人間を並べる．個人を作っている素材は全部共通だが，「身長」を比例定数として全人間は相似形だということにはならない，といったような標識をつけて並べる．こうして同形でないものが無数にあることが示せる．

定理 1 $z \notin i\mathbb{Z}$ として，$k, l \in \mathbb{Z}$ とするとシフト階乗関数で

$$\widetilde{D}_{k,l}(z) = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{iz}{2})_k(\frac{1}{2}+\frac{iz}{2})_\ell(i\hbar)^{|k|}(i\hbar)^{|l|}}}\zeta^k{\star}\mathfrak{C}_*(z){\star}\hat{\zeta}^l, \quad \widetilde{D}_{0,0}(z) = \mathfrak{C}_*(z)$$

は (k,l) 行列要素となる．$I = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{D}_{k,k}(z)$ は単位行列である．

$\ell(C) \neq 1$ だとこの部分が $\ell(C)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{D}_{k,k}(z)$ となり，$\ell(C)\widetilde{D}_{k,k}(z)$ は冪等でなくなる．

$\mathfrak{C}_*(z)$=逆元の差として現れる周期閉曲線全体からまとめて作る冪等元．i.e. $\mathfrak{C}_*(z)$ は指数関数 $e_*^{\xi(z+\frac{2}{\hbar}u\circ v)}$ の “Riemann 面” $\mathcal{R}_{-i\infty}^{+i\infty}$ 内のコンパクトな周期閉曲線 $\mathfrak{C}$ を代表する冪等元

$$\zeta^k = \begin{cases} u^k, & k \geq 0 \\ v^{|k|}, & k < 0, \end{cases} \qquad \hat{\zeta}^\ell = \begin{cases} v^\ell, & \ell \geq 0 \\ u^{|\ell|}, & \ell < 0, \end{cases} \tag{2}$$

シフト階乗関数：

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1), \quad (a)_0 = 1,$$

$$(a)_{-n} = (a-1)(a-2)\cdots(a-n).$$

$\mathfrak{C}_*(z)$ の性質：

$$\mathfrak{C}_*(z){\star}\mathfrak{C}_*(z){=}\mathfrak{C}_*(z), \quad \mathfrak{C}_*(z){*}\mathfrak{C}_*(z'){=}0, \ (z \neq z')$$
$$\partial_z\mathfrak{C}_*(z){=}0.$$

これは $\mathbb{C}$ の部分集合全体の作る Boole 代数の表現 [1]p.1931 になっている．つまり部分集合 U に対し $\mathfrak{C}_*(U){=}\{\mathfrak{C}_*(z); z{\in}U\}$ と定義すると次が成り立つ：

$$\mathfrak{C}_*(U{\cap}V){=}\mathfrak{C}_*(U){\star}\mathfrak{C}_*(V), \quad \mathfrak{C}_*(U{\cup}V){=}\mathfrak{C}_*(U){+}\mathfrak{C}_*(V){-}\mathfrak{C}_*(U{\cap}V)$$

このことは $\mathfrak{C}_*(z)$ は $\int f(z)\mathfrak{C}_*(dz)$ のようなスペクトル分解の時にスペクトル測度のように測度論的に関数を扱う時の測度として使えることを示している．

$$\mu_{0+}(z){=}\int_{-\infty}^{0} e_*^{it(z+\frac{1}{\hbar}2u\circ v)}dt, \quad \ell(C)\mathfrak{C}_*(z){=}\int_C e_*^{\xi(z+\frac{1}{\hbar}2u\circ v)}d\xi, \quad \ell(C){=}\int_C d\xi.$$

$\mu_{_{C+}}(z){=}\mu_{0+}(z){+}\ell(C)\mathfrak{C}_*(z)$, $\mu_{_{C-}}(z){=}\mu_{0-}(z){+}\ell(C)\mathfrak{C}_*(z)$ のような記号にする．

命題 1 $\partial_z\mu_{C+}(z)$ には積分路の違いは現れず, $\partial_z\mathfrak{C}_*(z){=}0$ であり, $\mu^n_{C+}(z)=\mu^n_{0+}(z)$ が $\forall n\geq 2$ で成立する.

$\mathfrak{C}_*(z)$ が z に関して整関数なので $\mu_{C\pm}(z){=}\mu_{0\pm}(z){+}\ell(C)\mathfrak{C}_*(z)$ の関数論的特徴は $\mu_{0\pm}(z)$ で代表されてしまう. 前前回の玉突補題で次のようなことは分かっている：

$$u{*}\mu_{0+}(z){=}\mu_{0+}(z{-}2i){*}u,\quad \mu_{0+}(z){*}v{=}v{*}\mu_{0+}(z{-}2i),\quad \mathrm{Im}z<1 \tag{3}$$

v°, v を使った玉突補題で $\mu_{0+}(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{2i\mathbb{N}_0{+}i\}$ に解析接続され $\mathbb{C}\setminus\{2i\mathbb{N}_0{+}i\}$ 上の $Hol(\mathbb{C}^2)$ 値の正則関数になっている. $(2n{+}1)i$ は位数 1 の特異点で留数は $v^{\circ 2n}{*}\varpi_{00}{*}v^{2n}$ である [2] p.163. $\mu_{C-}(z)$ も $\mathbb{C}\setminus\{-2i\mathbb{N}_0{-}i\}$ に解析接続され $Hol(\mathbb{C}^2)$ 値の正則関数になっていて $-(2n{+}1)i$ は位数 1 の特異点で留数は $v^{2n}{*}\overline{\varpi}_{00}{*}v^{\circ 2n}$ である. 以下では $\mu_{0+}(z)$, $\mu_{C+}(z)$ のみで話をするが, $\mu_{0-}(z)$, $\mu_{C-}(z)$ の場合でも符号に気をつければ話は全く平行に進む.

ところで, 微積の良く知られている公式に次のようなものがある:
$\frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x{+}c)^{-1}{=}(x{+}c)^{-(n+1)}$, $(x{+}c)^{-k}(x{+}c)^{-\ell}{=}(x{+}c)^{-(k+\ell)}$

計算は積分演算子と他の演算子との交換だけだからこの公式は上の $*$ 指数関数でも成立していて, $\int_{-\infty}^{0\gamma}$ は積分路が γ の意味とすると部分積分で

$$(z{+}\frac{2}{\hbar}u{\circ}v){*}\int_{-\infty}^{0\gamma}e_*^{\xi(z+\frac{2}{\hbar}u\circ v)}d\xi{=}\int_{-\infty}^{0\gamma}(z{+}\frac{2}{\hbar}u{\circ}v){*}e_*^{\xi(z+\frac{2}{\hbar}u\circ v)}d\xi{=}\ 1$$

となるので $\int_{-\infty}^{0\gamma}e_*^{\xi(z+\frac{2}{\hbar}u\circ v)}d\xi{=}(z{+}\frac{2}{\hbar}u{\circ}v)^{-1}_{\gamma*}$ と考え

$$(z{+}\frac{2}{\hbar}u{\circ}v)^{-1}_{\gamma*+}{=}\int_{-\infty}^{0}e_*^{it(z+\frac{2}{\hbar}u\circ v)}dt{+}\int_C e_*^{\xi(z+\frac{2}{\hbar}u\circ v)}d\xi,\quad \forall C\in\mathfrak{C}$$

としたのである. するとやはり部分積分で $(z{+}\frac{2}{\hbar}u{\circ}v){*}\partial_z(z{+}\frac{2}{\hbar}u{\circ}v)^{-1}_{\gamma*+}{=}{-}(z{+}\frac{2}{\hbar}u{\circ}v)^{-1}_{\gamma*+}$ だからこれを $\partial_z(z{+}\frac{2}{\hbar}u{\circ}v)^{-1}_{\gamma*+}{=}{-}(z{+}\frac{2}{\hbar}u{\circ}v)^{-2}_{\gamma*+}$ と読んだのである. ところがこの部分積分を $\int_C d\xi$ を使って書いた式のほうで読むと $(z{+}\frac{2}{\hbar}u{\circ}v){*}\partial_z\mathfrak{C}_*(z){=}{-}\mathfrak{C}_*(z)$ という式が成立しているように見える. これは危ない式で $[\partial_z, z{+}\frac{2}{\hbar}u{\circ}v]f{=}f$ だから勝手に入替えることはできないのに積分記号の中では (矛盾ではないが) $[\partial_z, z{+}\frac{2}{\hbar}u{\circ}v]{=}0$ であるかに見える計算になっているのである.

一方, $(z{+}\frac{2}{\hbar}u{\circ}v)^{-1}{*}\mathfrak{C}_*(z)$ は発散だったが, $\partial_z\mathfrak{C}_*(z){=}\frac{1}{\ell(C)}\int_C\xi e_*^{\xi(z+\frac{2}{\hbar}u\circ v)}d\xi$ は成立している. ところが

$$\partial_z\mathfrak{C}_*(z){\star}\mathfrak{C}_*(z){=}\int_C\xi e_*^{\xi(z+\frac{2}{\hbar}u\circ v)}d\xi{\star}\mathfrak{C}_*(z){=}\int_C\xi\mathfrak{C}_*(z)d\xi{=}\int_C\partial_\xi\frac{1}{2}\xi^2\mathfrak{C}_*(z)d\xi{=}0$$

であり, 同様に $\mathfrak{C}_*(z){\star}\partial_z\mathfrak{C}_*(z){=}0$ ともなる. $\mathfrak{C}_*(z){=}\mathfrak{C}_*(z){*}\mathfrak{C}_*(z)$ なので, 微分すると

$$\partial_z\mathfrak{C}_*(z){=}\big(\partial_z\mathfrak{C}_*(z)\big){\star}\mathfrak{C}_*(z){+}\mathfrak{C}_*(z){\star}\big(\partial_z\mathfrak{C}_*(z)\big){=}0$$

となるのである. これは $\int_C\xi e_*^{\xi(z+\frac{1}{\hbar}2u\circ v)}d\xi{=}0$ ということでもある. 従って実際には

$$(z{+}\frac{2}{\hbar}u{\circ}v)\partial_z{*}\Big(\int_{-\infty}^{0}e_*^{it(z+\frac{2}{\hbar}u\circ v)}dt{+}\int_C e_*^{\xi(z+\frac{2}{\hbar}u\circ v)}d\xi\Big){=}{-}\int_{-\infty}^{0}e_*^{it(z+\frac{2}{\hbar}u\circ v)}dt$$

つまり $\partial_z\mu_{_{C+}}(z) = -\mu^2_{0+}(z)$ なのである．この公式はかなり注意しておかねばならない公式で $\mu_{_{C+}}(z){=}\mu_{0+}(z){+}\ell(C)\mathfrak{C}_*(z)$ だから $\partial_z\big(\mu_{0+}(z){+}\ell(C)\mathfrak{C}_*(z)\big){=}{-}\big(\mu_{0+}(z){+}\ell(C)\mathfrak{C}_*(z)\big)^2$ のように書いてしまうと

$$\big(\mu_{0+}(z){+}\ell(C)\mathfrak{C}_*(z)\big)^2{=}\mu^2_{0+}(z){+}2\mu_{0+}(z){*}\ell(C)\mathfrak{C}_*(z){+}\ell(C)^2\mathfrak{C}_*(z)$$

となり右側 2 項目の $\mu_{0+}(z){*}\mathfrak{C}_*(z)$ は前回の小出し積積分の計算で ∞ となってしまうのである．

C の項が無ければ代数的に計算したのと同じになるが $\mathfrak{C}_*(z)$ の項の為に奇妙に見える式である．しかし積分路をいつも代表の $(-\infty, 0]$ を基準にするか γ のままとするかは相対的なもので γ 自身を基準と考えても良いのである．そこで以下では上の混乱を予防する為に逆元 $\mu_{_{C+}}(z)$ を固定したときには $\big(\mu_{_{C+}}(z)\big)^n$ **はいつも微分で定義する**ことにする．すると次も成立する：

$$(-1)^n(z{+}\frac{2}{\hbar}u{\circ}v)^{-(n+1)}_{\gamma*+}{=}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}(z{+}\frac{2}{\hbar}u{\circ}v)^{-1}_{\gamma*+}{=}\int_{-\infty}^{0\gamma}\frac{\xi^n}{n!}e_*^{\xi(z+\frac{2}{\hbar}u\circ v)}d\xi.$$

参考文献

[1] Dunford Schwartz, Linear Operators, Part III, Wiley Interscience, 1971.

[2] 大森英樹:演算子的に見た微分積分の代数（I）, 現代数学社, 2018.

[3] 大森英樹:演算子的に見た微分積分の代数（II）, 現代数学社, 2019.