変形量子化にまつわる新しい問題

大森 英樹 2019 年 1 月 25 日 (慶応), 3 月 6 日 (静岡)

ここ 10 年ほどこんなことばかりやっております：
Deformation expression $\supset$ Deformation quantization

手早く説明するための notion として
μ-regulated algebra という結合代数
以下の (A.0)~(A.4) の公準を満たすものである:

(A.0) $(\mathcal{A}, *)$ は位相結合代数である (位相のことはここでは気にしなくてよい).

(A.1) **制御子**と称する $\mathcal{A}$ の元 μ があって $[\mu, \mathcal{A}] \subset \mu{*}\mathcal{A}{*}\mu$.

(A.2) $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \subset \mu{*}\mathcal{A}$.

(A.3) $\mu{*}\mathcal{A}$ は閉部分空間であり, その補空間 B が存在して $\mathcal{A}{=}B \oplus \mu{*}\mathcal{A}$ となる.

(A.4) $\mu{*}a{=}0$ ならば $a{=}0$, つまり $\mu{*} : \mathcal{A} to \mu{*}\mathcal{A}$ が全単射.

Taylor 展開の要領で (A.3) より：
$\mathcal{A}{=}B{\oplus}\mu{*}B{\oplus}\cdots{\oplus}\mu^n{*}B \oplus \mu^{n+1}{*}\mathcal{A}$
展開の 2 項目に Poisson 構造, contact 構造が出てくる.

記号 $\mathcal{A}^{-\infty}{=}\bigcap_n \mu^n{*}\mathcal{A}$ (flat part/smoothing part)

Deformation quantization では smoothing part は無視して μ-regulated algebra を構成すれば良かった. $\mathcal{A}/\mathcal{A}^{-\infty}$ を formal μ-regulated algebra と言う.
全ての Poisson manifold は defromation quantizable, 我々のはかなり弱くて
すべての symplectic manifold は defromation quantizable.

同形の概念

$\{\mathcal{A},\mu,B\}$ と $\{\hat{\mathcal{A}},\mu,\hat{B}\}$ が同形とは

(a)：$\mathcal{A}/\mathcal{A}^{-\infty}\cong\hat{\mathcal{A}}/\hat{\mathcal{A}}^{-\infty}$ (形式的同形)

(b): $\mathcal{A}\cong\hat{\mathcal{A}}$ (本義同形)

形式的同形でも本義同形に持ち上がらないものはあるが, 問題にならなかった.

そもそも積公式が formal or 収束冪級数環での公式だった

$$f *_\Lambda g = f e^{\frac{i\hbar}{2}(\sum_{ij}\overleftarrow{\partial_{u_i}}\Lambda^{ij}\overrightarrow{\partial_{u_j}})} g$$

$\Lambda{=}K{+}J$

これの積分形というのもある

$$(f{*_\Lambda}g)(\boldsymbol{u}) = os\text{-}\iint f(\boldsymbol{u}{+}\boldsymbol{\xi})e^{\frac{2i}{\hbar}\langle\boldsymbol{\xi},\Lambda^{-1}\boldsymbol{\eta}\rangle}g(\boldsymbol{u}{+}\boldsymbol{\eta})\frac{1}{\det\Lambda}\,d\!\!\bar{}\,\boldsymbol{\xi}\,d\!\!\bar{}\,\boldsymbol{\eta}$$

これだと smoothing part まで計算可能.

Weyl manifold

$\forall$ symplectic manifold が deformation quantizable の我々の証明

(1): 局所座標関数で与えられる Poisson 構造 $\{x_i,y_j\}{=}\delta_{ij}$ が 2 項目に組込まれた $i\hbar$-regulated algebra ($*$-積) を作るのは容易. $[x_i,y_j]{=}i\hbar\delta_{ij}$ を基本交換関係とする代数を作れば良い.

i.e. 局所 symplectic 構造は deformation quantizable.

(2'): C^∞ 多様体 $\Longleftrightarrow$ 座標近傍上の C^∞ 関数の貼合わせ (C^∞ 同形)

(2): Weyl 多様体 $\Longleftrightarrow$ 座標近傍上の代数 $U_\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ の貼合わせ (formal 同形)

貼合わせとコサイクル条件

M の単純開被覆を $\{V_i\}_{i\in I}$ (任意個数の共通部分が単位開球体 D と同相)

$V_{ij}{=}V_i{\cap}V_j$ を 1 単体 $V_{ijk}{=}V_i{\cap}V_j{\cap}V_k$ を 2 単体.... 等

各 V_i 上で $V_i(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i)$ を作る $[x_k,y_l]{=}i\hbar\delta_{kl}$ を基本交換関係とする代数

$\phi_{ij}:V_{ij}\to V_{ji} \Longrightarrow \tilde\phi_{ij}:V_{ij}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i)\to V_{ji}(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y}_j)$ 形式同形で作る,

$\tilde\phi_{ji}{=}\tilde\phi_{ij}^{-1}$ これは微分方程式が逆向きにも解けることからすぐ作れる

V_{ijk} 上で $\tilde\phi_{ij}\tilde\phi_{jk}\tilde\phi_{ki}=1$ となるように補正する.($\hbar^k$ 毎に補正！)

$c_{ijk}{=}\tilde\phi_{ij}\tilde\phi_{jk}\tilde\phi_{ki}$ とし $\{c_{ijk}\}{=}\delta\{e_{ij}\}$(2 coboundary) となるように補正する. この補正が一般に形式同形でしかできない. deformation quantizable を言うだけならこれで十分.

疑問その１): 収束冪級数環の中で貼りあうのでは？

そうなる例もある.

疑問その２): 本当にこんな補正は必要なのか？

なにもしないで貼合うのでは？

$\tilde\phi_{ij}\tilde\phi_{jk}\tilde\phi_{ki}\neq 1$ でも $c_{ijk}{=}\tilde\phi_{ij}\tilde\phi_{jk}\tilde\phi_{ki}$ は 2 cocycle にはなっているのだから束になっていなくてもコホモロジーとしての意味があるのでそれで十分だという考えもある (gerbe).

S^2 上のWeyl代数束には齟齬がでる.

Hopf 束 $0\to S^1\to S^3\to S^2\to 0$ は $(z:z')$ で作られ, $U(1)$ 束としての特性数は 1.

$[u,v]=i\hbar$ を基本交換関係とする Weyl 代数の $*$ 2 次式と $*$ 指数関数を使って $S^3=SU(2)$ と, その部分群を使っても構成できる. $\mathfrak{su}(2)=\{\frac{1}{i\hbar}u^2, \frac{1}{i\hbar}v^2, \frac{2i}{i\hbar}u{*}v\}$

$$S^3=\coprod_{x\in S^2}\mathrm{Ad}(e_*^{\{\frac{1}{i\hbar}(au_x^2+bv_x^2)}); a^2+b^2=1\} \qquad \text{Hopf 束}$$

そこで $W(u_x,v_x)$: 積分形の $*$ 積公式の入った Weyl 代数 (本義 Weyl 代数) として

直和集合：$\coprod_{x\in S^2}W(u_x,v_x)\}$ を考える. (局所自明化, 接続係数ありとする)

S^2 は symplectic 多様体だから上の結果により

$\coprod_{x\in S^2}W(u_x,v_x)\}$ は形式的 Weyl 代数束として貼合う

これが本義 Weyl 代数束として貼合ったとすると……

生成元どうしも貼合う (?) と思われるから S^2 上に生成元で作る 2 次元ベクトル束 $\coprod_{x\in S^2}\{u_x,v_x\}$ ができる筈

この束の接続を $\acute{\nabla}_X\begin{bmatrix}u_{\boldsymbol{x}}\\ v_{\boldsymbol{x}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{\boldsymbol{x}}(X) & 0\\ 0 & -a_{\boldsymbol{x}}(X)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{\boldsymbol{x}}\\ v_{\boldsymbol{x}}\end{bmatrix}$ とすると

$$\acute{\nabla}_X\begin{bmatrix}u_{\boldsymbol{x}}^2\\ v_{\boldsymbol{x}}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a_{\boldsymbol{x}}(X) & 0\\ 0 & -2a_{\boldsymbol{x}}(X)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{\boldsymbol{x}}^2\\ v_{\boldsymbol{x}}^2\end{bmatrix}$$

曲率形式も 2 倍されるがこちらが Hopf 束の接続

Chern number $\frac{1}{2}$ というベクトル束はないので $\coprod_{x\in S^2}\{u_x,v_x\}$ はベクトル束にはならない. 局所自明化付きの直和集合

つまり Weyl 多様体は formal な貼合わせしかできないらしい.

疑問その1) $\mathcal{A}^{-\infty}$ が出てこない関数環(収束冪級数環)で貼合わないか??

これは無理

任意の 正数 $p\,(>0)$ に対して $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m})$ なる部分空間を

$$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m}) = \{f \in Hol(\mathbb{C}^{2m}) \mid \|f\|_{p,s} = \ \sup |f|\, e^{(-s|\xi|^p)} < \infty, \forall s > 0\}$$

で定義する. 但し $|\xi| = (\sum_i |x_i|^{2m})^{1/2}$ である.
これは収束半径が >0 の関数の族

定理 0.1 ΨDO 積公式, $\bar{\Psi} DO$ 積公式, モイヤル積公式のいずれも次のような空間にまで拡張できる：

(i) $0 < p \leq 2$ に対しては, 空間 $(\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m}), *)$ は 位相結合代数となる.

(ii) $p > 2$ 及び $\hbar \in \mathbb{R}$ の場合には上の三つの積公式は $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \geq 1$ なる任意の p' に対して

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m}) \times \mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^{2m}) \to \mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m}), \\ &\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^{2m}) \times \mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m}) \to \mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m}), \end{aligned}$$ なる連続双線形写像に拡張される.

系 0.1 f, g, h のうち二つが $\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^{2m})$ の元、残りが $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m})$ の元のとき,
結合律 $f * (g * h) = (f * g) * h$ が成立する.

$e_*^{*2\text{ 次式}}$ は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^{2m})$ で積で閉じない.
貼合わせには $\mathrm{Ad}(e_*^{2\text{ 次式}})$ を使うので どうやらこれも使えないらしい！

この $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^{2m})$ で作られた代数を $\mathcal{A}^{-\infty}$ が出るように拡張するしかたが沢山あると $\mathrm{mod}\mathcal{A}^{-\infty}$ では同形なのに本義同形でないものが作られる.

$\tilde{\phi}_{ij}\tilde{\phi}_{jk}\tilde{\phi}_{ki}=1+c_{ijk},\, c_{ijk}\in\mathcal{A}^{-\infty}$ としかできなかったら?

貼合わせが齟齬をきたしたら?

$\{V_i(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i):i{\in}I\}$ は formal algebra bundle($\hbar$ 冪で展開した代数) としては貼合って M 上の algebra bundle となるのに, 本義 algebra bundle とはならない, つまり

本義 ($\hbar$ で展開しない)algebra bundle は点集合としては定義できない?

こんなこと本当に起こる例があるの？ 本義で貼合う例は無論作れる.

$\mathcal{A}^{-\infty}$ がどんなものかよく分からない.

2nd cohomology の元として定義できるというが.......

問題の本質が鮮明でない. 貼合わせが formal なのと 本義なのと, どこを見たらこの違いが鮮明になるのか ??

もっと細分化された Weyl 多様体の概念がある??

mod$\mathcal{A}^{-\infty}$ の貼合わせでは一つの Weyl 多様体だが, $\mathcal{A}^{-\infty}$ まで考えて貼合わせると exotic なものが沢山現れる ??

とにかく $\mathcal{A}^{-\infty}\neq\{0\}$ となる μ 制御代数で考えないといけない.

$i\hbar$ 制御代数の枠内で, さらに半逆元しか持たない μ 制御代数を考える. $\mu^{\bullet}{*}\mu=1$, $\mu{*}\mu^{\bullet}{=}1{-}\varpi$

$$[\mu,\mu^{\bullet}]{=}\varpi{=}i\hbar a$$

ϖ は冪等元だから, $\varpi{=}(i\hbar)^n a^n$ となり $\varpi\in\mathcal{A}^{-\infty}$ これとは別に (A.4) で $a{*}\mu{=}a$ のような元があると $\mathcal{A}^{-\infty}\neq\{0\}$ となる.

$\mu^{\bullet k}\varpi\mu^{l}$ は (k,l) 行列要素となってこのようなものが $\mathcal{A}^{-\infty}$ に出てくる.

形式的同形が本義同形に上がらない例を作る

必然的に $\mathcal{A}^{-\infty}\neq\{0\}$ となる代数でないと問題の本質はみえてこない.

Rankin-Cohen の上半平面代数：

$z=x+iy, \bar{z}=x-iy$ とし y についての Laurent 多項式環 $C^{\omega}(\mathbb{R}_x)[y,y^{-1}]$ に次のような積が入っている**結合代数**である:

$$f(x)y^m{*}g(x)y^n=\sum_{k\geq 0}\hbar^k J_k^{m,n}(f,g)y^{m+n-k},$$

$$J_k^{m,n}(f,g)=\sum_{i+j=k}\frac{\sqrt{-1}^k}{2^{2k}k!}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{(2m-i)!}{(2m-k)!}\frac{(2n-j)!}{(2n-k)!}f^{(i)}g^{(j)}$$

$[x,y]=-i\hbar$ で, y^{-1} まで計算できるようにした収束冪級数環上の代数である.($\mathcal{A}^{-\infty}$ は出ない)

これは次のようにして作れる： u,v の Weyl 代数で

$$x=u{*}v^{-1},\quad y=\frac{1}{2}v^2$$

次のようにしても上と収束冪級数環上のと同形になる：

$$x=v^{-1}{*}u,\quad y=\frac{1}{2}v^2$$

これを半逆元 v° を使って拡張する: $v{*}v^{\circ}=1$, $v^{\circ}{*}v=1-\varpi$

$$x=u{*}v^{\circ},\quad y=\frac{1}{2}v^2$$

$$x=v^{\circ}{*}u,\quad y=\frac{1}{2}v^2$$

この 2 つは同形でない.

$$[u{*}v^{\circ},v^2]=-2i\hbar-i\hbar v^{\circ}{*}\varpi{*}v,\ \ (1+\frac{1}{2}u{*}\varpi{*}v)(1-\frac{1}{3}u{*}\varpi{*}v)=1$$

$$[v^{\circ}{*}u,v^2]=-2i\hbar+i\hbar\varpi,\quad (1-\frac{1}{2}\varpi)(1+\varpi)=1$$

単位円盤上の代数は上半平面上の代数のテープリッツ拡大とみることができ, その拡大が色々ある. 半逆元は色々作れる.

Outsider 的物理の勧め

齟齬のほうに物理的意味がある

$\coprod_{x\in M} S^1_x$ (単連結 S^1 束) に対し, 直和集合 $\coprod_{x\in M} S_x^{(\frac{1}{2})}$ は束にならない.

しかし局所自明化はある.

起こっているのは 2 価の元の貼合わせ

V_{ijk} 上で $$\tilde{\phi}_{ij}\tilde{\phi}_{jk}\tilde{\phi}_{ki} = \sqrt{1} = \pm 1.$$

2 価の元のまま計算できる！ こんな感じ！ $\frac{1}{\sqrt{x}}e^x\frac{1}{\sqrt{y}}e^y = \frac{1}{\sqrt{xy}}e^{x+y}$

$*$ 2 次式の指数関数

$$:e_*^{t\zeta_*^2}:_\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\tau t}}\,e^{\frac{t}{1-\tau t}\zeta^2},\ t\tau \neq 1.$$

単位元が $\sqrt{1}$ の 2 価の元の "1 係数群 " で指数法則は 2 価の元のまま成立する.

スケール変換で

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{-t}}{\sqrt{1-\tau t}}\,e^{\frac{t}{1-\tau t}\zeta^2} &= \frac{1}{\sqrt{\tau}}e^{-\frac{1}{\tau}\zeta^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{4}\tau}e^{it\zeta}dt \quad \text{Fourier 変換}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{it\zeta}dt = \delta_*(\zeta)\end{aligned}$$

のように書いて, $*$ **デルタ関数**と呼んでおく (これも 2 価の元).

局所自明化を持つ直和集合でも微分幾何は何も困らない. しかし齟齬があると gauge 変換というのが定義できない. 齟齬が出たらそれを測度 0 の部分集合に押付けることのほうが先に必要になる

Smoothing part で起こる齟齬は古典的量子化では捉えきれないと思われる.

わざと齟齬付きにする方法

Chern-Weil の定理の悪用.

齟齬のないベクトル束で特性類が奇数のものから始める, その frame bundle の接続の係数を $\frac{1}{2}$ 倍する. 曲率形式が $\frac{1}{2}$ 倍されるようにする.

接続係数が定数倍されていても平行移動は定義でき曲率形式は計算できる. すると特性類が半整数という束はないから齟齬が起きるはず.

M を n 次元多面体とすると齟齬は $n-1$ 次元 skeleton(測度 0) に押付けられる. ここを無視して Yang-Mills 汎関数は考えられる.

齟齬付きのまま, Gauge 変換というのは定義できない. とても一般論を作る段階とは見えない. 齟齬があるため新しく見えてくるものは何だろう ??

始めから齟齬付きの "群" で探す

1 次式の $*$ 指数関数では何事も起きない.

$\mathfrak{sp}(n;\mathbb{C})$=$\{*2$ 次式が交換子で作る Lie 環 $\}$

$Sp(n;\mathbb{C})^{(\frac{1}{2})}=\{e_*^{*2 \text{ 次式}}\}$ (局所 Lie 群の集まりとして定義できる)

$$\pi : Sp(n;\mathbb{C})^{(\frac{1}{2})} \to Sp(n;\mathbb{C})$$

(単連結な群の double cover に見える.) 単位元が $\pm e$ で 2 価の元で作る Lie 群.

$$\exp_* : \mathfrak{sp}(n;\mathbb{C}) \to Sp(n;\mathbb{C})^{(\frac{1}{2})}$$

(指数写像を考えるときには単位元は e のみ)

手頃な齟齬は 2 次式の指数関数で起こる.

普通の数学には現れない “物理っぽく” 見える元

(1): 真空の集合 $M_0=\{2e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cu\circ v)}; ab-c^2=1\}$ (普通の関数)

$M_0\approx\mathbb{R}^2\times S^2$, 1+3 Lorentz 多様体 $\frac{SO(1,3)}{SO(1,1)SO(2)}\approx\frac{SL(2,\mathbb{C})}{SO(2,\mathbb{C})}$

$\varpi\in M_0$ は Moyal 積公式で $\varpi*_0\varpi=\varpi$(冪等元)
で Weyl 代数の生成元を引連れている.

$\exists au+bv, cu+dv$ s.t. $(au+bv)*\varpi=0=\varpi*(cu+bv)$, $[au+bv, cu+dv]=-i\hbar$.

$\varpi=\lim_{t\to\infty} e^t e_*^{t\frac{1}{i\hbar}\text{非退化 2 次式}}$ 真空は指数関数の極限

$$\mathbf{e}_n=\frac{1}{\sqrt{(i\hbar)^n n!}}u^n, \quad \mathbf{e}_n^\dagger=\frac{1}{\sqrt{(i\hbar)^n n!}}v^n$$

と置けば, $\varpi_{00}=2e^{2\frac{1}{i\hbar}u*v}$ として $\mathbf{e}_m*\varpi_{00}*\mathbf{e}_n^\dagger$ は (m,n) 行列要素 (真空表現行列) である.

M_0 上の Weyl 生成元の貼合わせには齟齬があったが, 真空表現行列は貼合う. M_0 上に真空表現行列束が作れる. 見たい齟齬が見えていない

(2): 極地元 $\varepsilon_{00}=e_*^{\pi\frac{1}{i\hbar}\text{判別式 1 の 2 次式}}$,

ε_{00} は一つの 1 径数群の中の元で $\varepsilon_{00}^2=-1$, $\therefore \varepsilon_{00}=\pm ia$ (連結だからどちらかに決まる, e.g. ia とする), ところが $\varepsilon_{00}^{-1}=-\varepsilon_{00}$, $\therefore\varepsilon_{00}$ は 2 価の元. なのに Weyl 代数の生成元と反交換する.

$\coprod_{x\in M_0}\{\varepsilon_{00}(x)\}$ $\mathbb{Z}_2$ 直和集合, M_0 は単連結だから齟齬をきたす筈.
任意の接続に関して平行で, 曲率形式も 0. Yang-Mills 汎関数値も 0.

$S_{\mathbb{R}}^{m-1}=\{\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^m; (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=1\}$ とする. $\forall\boldsymbol{a}\in S_{\mathbb{R}}^{m-1}$ に対し $\varepsilon_{00}(\boldsymbol{a})=e_*^{\frac{\pi}{\hbar}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})\circ(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v})}$ も正規順序極地元

$\{:\varepsilon_{00}(\boldsymbol{a})*\varepsilon_{00}(\boldsymbol{b}):_{K_0}; \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in S_{\mathbb{R}}^{m-1}\}$ は $SO(m)$ の連結な 2 重被覆群 $Spin(m)$ を生成. Clifford 環を使わないで $Spin(m)$ が作れる