齟齬を持つ時空の仮想被覆と主 G 束

沼津: 2017.3.6. 大森英樹

$SU(2){=}S^3{=}\coprod_{x\in S^2} S^1_x$: 普通の Hopf 束

$S^{(\frac{1}{2})}$=double covering group として $\coprod_{x\in S^2} S_x^{(\frac{1}{2})}$ を考えると,

これが多様体になったとすると, $SU(2)$ の 連結 double cover ということになるから, 貼合わせがどこかで噛合わなくなる (i.e. 齟齬をきたす) 筈:

齟齬をちゃんと定義したい.

$\{V_i\}_{i\in I}{=}$ S^2 の単純開被覆　単体複体と見る. 正 4 面体

$c_0(V_i){=}\phi_i : V_i \to S^{(\frac{1}{2})}$ 局所自明化　(0 cochain)V_i からの連続写像

$c_1(V_{ij}){=}\phi_{ij}{=}\phi_j\phi_i^{-1} : V_{ij}{=}V_i{\cap}V_j \to S^{(\frac{1}{2})}$; 貼り合わせ写像

(1 cochain)$V_i \cap V_j$ からの連続写像

$c_2(V_{ijk}){=}\phi_{ijk} : V_{ijk}{=}V_i{\cap}V_j{\cap}V_k \to \{\pm 1\}$　齟齬の部分

(2 cochain)　$V_i{\cap}V_j{\cap}V_k$ からの連続写像

齟齬の部分は 2 $\mathbb{Z}_2$ cocycle $c_2(S^2, S^{(\frac{1}{2})})$ となる.

$c_2(S^2, S^{(\frac{1}{2})}){=}\delta(c_1(S^2, S^{(\frac{1}{2})}))$ だと $c_1(S^2, S^{(\frac{1}{2})})(V_{ij}){=}\phi_j\phi_i^{-1}$ だから

$\delta(c_1)(V_{ijk}){=}\phi_j\phi_k^{-1}(\phi_i\phi_k^{-1})^{-1}\phi_i\phi_k^{-1}{=}1$ となり齟齬が消えるので,

$$[c_2(S^2; S^{(\frac{1}{2})})]{\neq}0 \ \in H^2(S^2, S^{(\frac{1}{2})})$$ Čech cohomology class

の筈でこのようなものを $S^{(\frac{1}{2})}{=}SO(2)^{(\frac{1}{2})}$ として

$$SU^{(\frac{1}{2})}(2){=}\coprod_{x\in S^2} SO(2)_x^{(\frac{1}{2})}$$ 齟齬付き主 $SO(2)^{(\frac{1}{2})}$ 束と呼ぶ

あたかも $SU(2){=}S^3$ の double covering group のように見える局所 Lie 群の集まり.　群もどきとも呼ぶ.

$\sqrt{1}$=$\mathbf{1}^{(\frac{1}{2})}$ として

$$SU^{(\frac{1}{2})}(2)=\coprod_{x\in S^3}\mathbf{1}_x^{(\frac{1}{2})}\quad \exists\text{closed path } x(t) \text{ s.t. } \mathbf{1}_{x(1)}=-\mathbf{1}_{x(0)}$$

としてみる.

これが多様体になったとすると, $SU(2)$=S^3 の連結な double cover ということになるから, 貼合わせがどこかで齟齬をきたす筈:

$\forall\ell\in\Omega(S^3)$ に対し $\coprod_{x\in\ell}\mathbf{1}_x^{(\frac{1}{2})}$ は 1 周で $\pm$ が出るので, それを $\mathbf{1}_\ell^{(\frac{1}{2})}$ と定義する.

$$\coprod_{\ell\in\Omega(S^3)}\mathbf{1}_\ell^{(\frac{1}{2})},\quad \Omega(S^3) \text{ 上の } \mathbf{1}^{(\frac{1}{2})}\text{束}$$

を考えるとここの貼合わせに齟齬が生じていている筈

$$[c_2(\Omega(S^3);\mathbf{1}^{(\frac{1}{2})}(x))]\neq 0\quad \text{Čech cohomology class}$$

となる. これを $\coprod_{x\in S^3}\mathbf{1}^{(\frac{1}{2})}(x)$ の Stiefel Whitney class w^2 と呼ぶ.

このようなものは Weyl 代数で 2 次式の指数関数で作る群で普通に現れる:

$$Sp_{\mathbb{C}}^{(\frac{1}{2})}(m)=\coprod_{x\in Sp(m;\mathbb{C})}\mathbf{1}_x^{(\frac{1}{2})}\quad (\text{単連結でない局所群の集まり})$$

S^3 の部分を一般の単連結多様体 M として

$$M^{(\frac{1}{2})}=\coprod_{x\in M}\mathbf{1}_x^{(\frac{1}{2})}\quad \exists\text{closed path } x(t) \text{ s.t. } \mathbf{1}_{x(1)}=-\mathbf{1}_{x(0)}$$

で

$$[c_2(\Omega(M);\mathbf{1}^{(\frac{1}{2})}(x))]\neq 0,\quad i.e.\ w^2(M;\mathbf{1}^{(\frac{1}{2})}(x))\neq 0$$

となるものを virtual double covering space of M(齟齬付き double cover と呼ぶ)

話を時空の方へもっていく:

$$時空=\frac{SO(1,3)}{SO(1,1)\times SO(2)}\approx\frac{SL(2,\mathbb{C})}{SO(2,\mathbb{C})}\approx\mathbb{R}^2\times S^2\quad \text{Lorentz 多様体}$$

$$\approx\{au^2{+}bv^2{+}2cuv;\, ab{-}c^2{=}1, a,b,c{\in}\mathbb{C}\}$$

$$\approx\{2e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)};\, ab{-}c^2{=}1, a,b,c{\in}\mathbb{C}\}$$

$$\approx 真空の全体:\ \varpi(\boldsymbol{x}){*_0}\varpi(\boldsymbol{x}){=}\varpi(\boldsymbol{x});\ \exists(\alpha u{+}\beta v){*_0}\varpi(\boldsymbol{x}){=}0$$

$$\approx M_0{=}{:}\mathcal{V}{:}_0\ \text{記号だけ}$$

命題 1 $:\mathcal{V}:_0$ の各点に $Weyl$ 代数が付いていて $Weyl$ 代数束ができている.

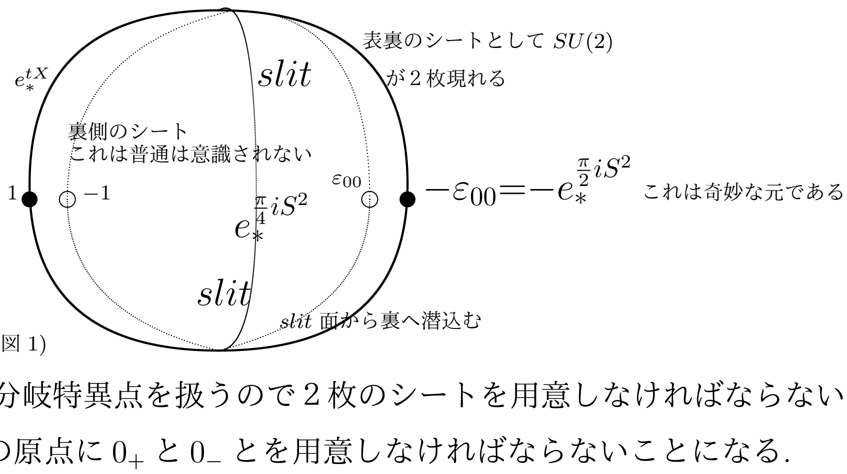
$\boldsymbol{i}_0{=}\frac{1}{i\hbar}2u{\circ}v$; 均質空間の原点, $\quad 2e_*^{\boldsymbol{i}_0}{=}2e_*^{\frac{1}{i\hbar}2u\circ v}{\in}{:}\mathcal{V}{:}_0$

$$T_{\boldsymbol{i}_0}M_0{=}\mathbb{R}\boldsymbol{i}_0\oplus\mathbb{R}iS^2{=}L^{1+3}(\boldsymbol{i}_0)\quad Minkowski\,空間$$

$$S^2{=}\{\alpha(u^2{+}v^2){+}i\beta(u^2{-}v^2){+}2i\gamma u{\circ}v;\, \alpha,\beta,\gamma{\in}\mathbb{R}; \alpha^2{+}\beta^2{+}\gamma^2{=}1\}$$

$\mathbb{R}iS^2$ を空間部分と呼ぶ.

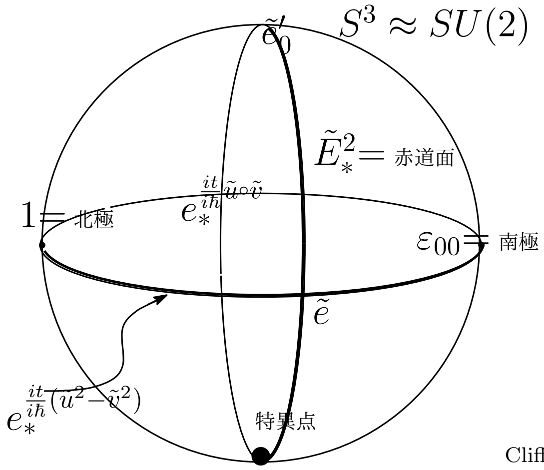
命題 2 $:e_*^{itS^2}:_{iK}\cong SU^{(\frac{1}{2})}(2),\quad \varepsilon_{00}{=}e_*^{\frac{\pi}{2}iS^2},\quad :\varepsilon_{00}^2:_{iK}{=}-1$



(図 1)

分岐特異点を扱うので 2 枚のシートを用意しなければならないのだが, 指数関数の原点に 0_+ と 0_- とを用意しなければならないことになる.

K 表示で見ると



Clifford 環とか行列を使う普通の構成では ε_{00} の部分は -1 となっていて, $SU^{(\frac{1}{2})}(2)$ のようなものは現れない

命題 3 時空 M_0 の各点に $\varepsilon_{00}(\boldsymbol{x})$ が付いているのだが

$$(\varepsilon_{00}(\boldsymbol{x}))^2{=}-1, \quad \varepsilon_{00}(\boldsymbol{x}){=}\sqrt[4]{1}{=}\mathbf{1}^{(\frac{1}{4})}$$

であるが**符号は定まらない２価の元**なので齟齬付きの $i\varepsilon_{00}$ 束,

$$\coprod_{x\in M_0} i\varepsilon_{00}(\boldsymbol{x}),$$

になっていてこれの定める *cohomology* 類 $[c_2(\Omega(M_0);i\varepsilon_{00}(\boldsymbol{x}))]\neq 0$ の $H^2(\Omega(M_0),\mathbf{1}^{(\frac{1}{2})}){=}H^2(\Omega(M_0);\mathbb{Z}_2)$ の元である.

: $\pm\, i\varepsilon_{00}(\boldsymbol{x}):_{iK}$ が M_0 上の粒子的存在のように見える.(名前を付けたい！鵺粒子？?)

$$\hat{\mathbf{1}}(x){=}\frac{1}{2}(1{+}i\varepsilon_{00}(x)), \quad \check{\mathbf{1}}(x){=}\frac{1}{2}(1{-}i\varepsilon_{00}(x))$$

$$1{=}\hat{\mathbf{1}}(x){+}\check{\mathbf{1}}(x), \quad \hat{\mathbf{1}}(x){*}\check{\mathbf{1}}(x){=}0$$

$$\varepsilon_{00}(x){=}\varepsilon_{00}(x){*}\hat{\mathbf{1}}(x)\boxplus\varepsilon_{00}(x){*}\check{\mathbf{1}}(x)$$

区別できないから並べて扱う

$$(\varepsilon_{00}(x)*\hat{\mathbf{1}}(x))^2{=}-\hat{\mathbf{1}}(x), \quad (\varepsilon_{00}(x)*\check{\mathbf{1}}(x))^2{=}-\check{\mathbf{1}}(x),$$

それぞれ複素数体 $\mathbb{C}_x$, $\overline{\mathbb{C}}_x$ と同型な体となる.

このことを $\forall x{\in}\mathcal{A}$ にあてはめ, x を

$$x{=}1{*}x{*}1{=}\hat{\mathbf{1}}{*}x{*}\hat{\mathbf{1}}{+}\hat{\mathbf{1}}{*}x{*}\check{\mathbf{1}}{+}\check{\mathbf{1}}{*}x{*}\hat{\mathbf{1}}{+}\check{\mathbf{1}}{*}x{*}\check{\mathbf{1}}$$

と書き, (行列ではないが) 行列ふうに書く：

$$x{=}1{*}x{*}1{=}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{1}}{*}x{*}\hat{\mathbf{1}} & \hat{\mathbf{1}}{*}x{*}\check{\mathbf{1}}\\ \check{\mathbf{1}}{*}x{*}\hat{\mathbf{1}} & \check{\mathbf{1}}{*}x{*}\check{\mathbf{1}}\end{bmatrix} \tag{1}$$

$$x{*}y{=}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{1}}{*}x{*}\hat{\mathbf{1}} & \hat{\mathbf{1}}{*}x{*}\check{\mathbf{1}}\\ \check{\mathbf{1}}{*}x{*}\hat{\mathbf{1}} & \check{\mathbf{1}}{*}x{*}\check{\mathbf{1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{1}}{*}y{*}\hat{\mathbf{1}} & \hat{\mathbf{1}}{*}y{*}\check{\mathbf{1}}\\ \check{\mathbf{1}}{*}y{*}\hat{\mathbf{1}} & \check{\mathbf{1}}{*}y{*}\check{\mathbf{1}}\end{bmatrix}$$

であるから, $\mathcal{A}$ の元が行列として表現されてはいるが, 各成分がどの程度独立なのかはっきりせず, 単に**行列成分の重ね合わせ**で表示しているだけとなっている.

齟齬がある $\Longleftrightarrow\exists\ \ell{\in}\Omega(M_0)$ s.t. 1 周で $\hat{\mathbf{1}}(x)$, $\check{\mathbf{1}}(x)$ が入替わる.

ε_{00} は Weyl 代数の生成元と反交換, これを利用して $\hat{\mathbf{1}}(x)$ と $\check{\mathbf{1}}(x)$ を入替えることができる.

以下では x は省略

$$\begin{aligned}\phi&{=}\tilde{v}^{-1}{*}\check{\mathbf{1}}{=}\tilde{v}^{-1}{*}\frac{1}{2}(1{-}i\varepsilon_{00}){=}\hat{\mathbf{1}}{*}\tilde{v}^{-1}\\ \psi&{=}\check{\mathbf{1}}{*}\tilde{v}{=}\frac{1}{2}(1{-}i\varepsilon_{00}){*}\tilde{v}{=}\tilde{v}{*}\hat{\mathbf{1}},\end{aligned} \tag{2}$$

と置く. $\hat{\mathbf{1}}{*}\check{\mathbf{1}}{=}0$ より $\phi^2{=}0{=}\psi^2$ であり, $\psi{*}\phi{=}\check{\mathbf{1}}$, $\phi{*}\psi{=}\hat{\mathbf{1}}$, $\phi{*}\psi{+}\psi{*}\phi{=}1$ となる. 特に $\phi{*}\psi$, $\psi{*}\phi$, ϕ, ψ は $2{\times}2$ 行列要素 $\begin{bmatrix}\phi{*}\psi & \phi\\ \psi & \psi{*}\phi\end{bmatrix}$ である.

ϕ, ψ は $(\phi{-}\psi)^2{=}-1$,

$$\varepsilon_{00}{*}\phi{=}-\phi{*}\varepsilon_{00}, \quad \varepsilon_{00}{*}\psi{=}-\psi{*}\varepsilon_{00} \tag{3}$$

であり, $\varepsilon_{00}^2{=}-1$ だから, (3) と合わせて

$$\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}{=}\{\varepsilon_{00},\ \phi{-}\psi,\ \varepsilon_{00}{*}(\phi{-}\psi)\}$$

M_0 の各点 x で $2{\times}2$ 行列環 $M_2(\mathbb{C})$, 群としては $SL(2,\mathbb{C})$ と同形なものが生成されている. $\Omega(M_0)$ は連結, 単連結なので...........

$\coprod_{x\in M_0} SL(2,\mathbb{C})_x$ では齟齬は消える.

ちゃんとした主束になる.

$SU(2)^{(\frac{1}{2})}{=}SO(2)^{(\frac{1}{4})}$ だから G を連結位相群 (任意) とし, $G^{(\frac{1}{2})}$ は G の連結 2 重被覆群 (群もどきでもよい) とする. $G{=}G^{(\frac{1}{2})}/\mathbb{Z}_2$

直和集合 $\coprod_{x\in M} G_x^{(\frac{1}{2})}$ を考える.

ここには $G^{(\frac{1}{2})}$ が右から作用できる.

$\phi_i : V_i{\times}G^{(\frac{1}{2})}{\to}\coprod_{x\in V_i} G_x^{(\frac{1}{2})}$ local trivialization

貼合せ写像 : $V_{ij}{=}V_i{\cap}V_j$ 上で $\phi_{ij}(x){=}\phi_i(x)^{-1}\phi_j(x) : V_i{\cap}V_j{\to}G^{(\frac{1}{2})}$

$\phi_{ji}(x){=}\phi_{ij}(x)^{-1}$ である.

しかし $V_{ijk}{=}V_i{\cap}V_j{\cap}V_k$ 上で齟齬をきたし, $\phi_{ij}(x)\phi_{jk}(x)\phi_{ki}(x){=}\sqrt{1}{=}\mathbf{1}^{(\frac{1}{2})}$ のようになるものを考える.

これは Čhech 2 cocycle $c_2(M, G^{(\frac{1}{2})}){\in}Z^2(M; G^{(\frac{1}{2})})$ 与える.

一方これは $\coprod_{x\in} G_x$ 束はできているものとして始めれば

$c_2(\Omega(M);\mathbf{1}^{(\frac{1}{2})}){\in}H^2(\Omega(M);\mathbb{Z}_2)$

命題 4 $\coprod_{x\in M} G_x^{(\frac{1}{2})}$ に齟齬がない $\Longleftrightarrow$ $\coprod_{x\in M} G_x^{(\frac{1}{2})}$ が主 $G^{(\frac{1}{2})}$ 束 $\Longleftrightarrow$ $\coprod_{x\in M} G_x$ の構造群が $G^{(\frac{1}{2})}$ に簡約できる.

向付できる実ベクトル束 V_M のとき $G{=}SO(m)$ として,

$\coprod_{x\in M} SO_x^{(\frac{1}{2})}(m)$ に齟齬がない $\Longleftrightarrow$Stiefel Whitney 類 $[c_2(V_M)] = 0$ $\Longleftrightarrow$ V に Spin$(m){=}SO^{(\frac{1}{2})}(m)$ 構造が入る.