真空全体の作るLorentz多様体

大森英樹

2016, 沼津, 3:7,8,9,

1　$*$積

相変わらず$*$積の定義から始めます：$\mathbb{C}$の元を係数として持つ$u_1,\cdots,u_n$の多項式の全体を$\mathbb{C}[\boldsymbol{u}]$。$\forall\, n\times n$定数行列$\Lambda$に対して、$*_\Lambda$積を

$$f *_{\Lambda} g = f e^{\frac{i\hbar}{2}(\sum \overleftarrow{\partial_{u_i}}\Lambda^{ij}\overrightarrow{\partial_{u_j}})} g = \sum_k \frac{(i\hbar)^k}{k!2^k}\Lambda^{i_1j_1}\cdots\Lambda^{i_kj_k}\partial_{u_{i_1}}\cdots\partial_{u_{i_k}} f\, \partial_{u_{j_1}}\cdots\partial_{u_{j_k}} g$$

$(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}], *_{\Lambda})$は結合代数。　$I_0^K = e^{\frac{i\hbar}{4}\sum K^{ij}\partial_{u_iu_j}}$がintertwiner

命題 1 $e^{\frac{i\hbar}{4}\sum K^{ij}\partial_{u_iu_j}} : (\mathbb{C}[\boldsymbol{u}]; *_{\Lambda}) \to (\mathbb{C}[\boldsymbol{u}]; *_{\Lambda+K})$は同型対応である。つまり、代数構造は$\Lambda$の歪対称部分のみで決定される。

$$e^{\frac{i\hbar}{4}\sum K^{ij}\partial_{u_iu_j}}\Big(\big(e^{-\frac{i\hbar}{4}\sum K^{ij}\partial_{u_i}\partial_{u_j}} f\big) *_{\Lambda} \big(e^{-\frac{i\hbar}{4}\sum K^{ij}\partial_{u_iu_j}} g\big)\Big)$$
$$= f e^{\frac{i\hbar}{2}(\sum \overleftarrow{\partial_{u_i}} *_{\Lambda} K^{ij} *_{\Lambda} \overrightarrow{\partial_{u_j}})} g = f *_{\Lambda+K} g$$

つまり、対称行列を使って積公式を変形しても、得られる代数はもとのものと変わらない。

$\boxed{\text{以下では}\ n=2,\ \boldsymbol{u}=(u,v),\ \Lambda\ \text{の歪対称部分は}\ J\ \text{に固定し},\ *_\Lambda\ \text{を}\ *_K\ \text{と書く}}$

真空の定義

$*$積に関して次のような特殊な性質がある元を真空とよぶ:

a) $\varpi(\boldsymbol{x})*\varpi(\boldsymbol{x})=\varpi(\boldsymbol{x})$ (冪等元). 真空には逆元というものはない.

b) $(\gamma u+\delta v)*\varpi(\boldsymbol{x})=0=\varpi(\boldsymbol{x})*(\alpha u+\beta v)$, $\quad [\alpha u+\beta v, \gamma u+\delta v]=-i\hbar.$

つまり真空は生成元の一方を消してしまう.

真空の全体 $=\mathcal{V}$

$$:\mathcal{V}:_0=\{2e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2u\circ v)}; ab-c^2=1\} \quad \text{(ワイル表示)}$$

$:\mathcal{V}:_0\ni 2e^{-\frac{2}{i\hbar}\tilde{u}\tilde{v}}$:Weyl 表示 (K=0 表示) で書かれた典型的真空

必要に応じて相互変換 $I_0^K(2e^{-\frac{2}{i\hbar}\tilde{u}\tilde{v}})$ で変換する. $K_0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ を正規順序表示のパラメータと呼ぶ. 紛らわしい式だが

$$:\varpi_{00}:_{K_0}=I_0^{K_0}(2e^{-\frac{2}{i\hbar}\tilde{u}\tilde{v}})=e^{-\frac{1}{i\hbar}\tilde{u}\tilde{v}}. \tag{1}$$

$$:\mathcal{V}:_0\approx SL(2;\mathbb{C})/SO(2;\mathbb{C})\approx SO(1,3)/SO(1,1)\times SO(2)$$

$M_0=SO(1,3)/SO(1,1)\times SO(2)$ は 1+3 Lorentz 多様体.

命題 2 どんな退化 2 次式 $p(u,v)$ にも $p(u,v)*\varpi(\boldsymbol{x})=0$ となる真空がある. 逆に $p(u,v)*\varpi(\boldsymbol{x})=0$, *or* $\varpi(\boldsymbol{x})*p(u,v)=0$ となる $*$ 2 次式 $p(u,v)$ は退化 2 次式に限る.

$\boxed{\text{部分群による動座標系}}$

$SL(2,\mathbb{C})$ の複素 2 次元部分群

$$\tilde{\mathfrak{T}}=\left\{\begin{bmatrix} e^{z} & w \\ 0 & e^{-z}\end{bmatrix}; z, w\in\mathbb{C}\right\}$$

は $\tilde{\mathfrak{T}}\cap SO(2,\mathbb{C})=\{\pm 1\}$ であり,

$$SL(2,\mathbb{C})/\{\pm 1\}\approx\tilde{\mathfrak{T}}\times SO(2,\mathbb{C})/\{\pm 1\}$$

であるが, Lie 群 $\tilde{\mathfrak{T}}$ は普通に左から $M=SL(2,\mathbb{C})/SO(2,\mathbb{C})$ に作用していて不動点はないから

$\tilde{\mathfrak{T}}=M$ と思うことができる.

$\mathfrak{g}$: $G=\tilde{\mathfrak{T}}$ の Lie 環,

指数写像 $\exp:\mathfrak{g}\to G$ は $I_2\in SL(2;\mathbb{C})/SO(2;\mathbb{C})$ を原点とする M の局所座標系となる.

これは各点 $\boldsymbol{x}$ で考えられ, $\Gamma_{\boldsymbol{x}}=gSO(2;\mathbb{C})g^{-1}$ として

$$g\tilde{\mathfrak{T}}g^{-1}\cap\Gamma_{\boldsymbol{x}}=\{\pm 1\},\ SL(2,\mathbb{C})\approx g\tilde{\mathfrak{T}}g^{-1}\times\Gamma_{\boldsymbol{x}}/\{\pm 1\}$$

だから上と同じ理由で $g\tilde{\mathfrak{T}}g^{-1}=M$ と思うことができるので, $G_{\boldsymbol{x}}=g\tilde{\mathfrak{T}}g^{-1}$, Lie 環を $\mathfrak{g}_{\boldsymbol{x}}$ とし,

指数写像を $\exp_{\boldsymbol{x}}:\mathfrak{g}_{\boldsymbol{x}}\to G_{\boldsymbol{x}}$ とすると,

$(\exp_{\boldsymbol{x}}:\mathfrak{g}_{\boldsymbol{x}})$ は $M=SL(2,\mathbb{C})/\Gamma_{\boldsymbol{x}}$ の $\boldsymbol{x}$ を原点とする局所座標系.

真空の全体 :$\mathcal{V}$:$_0$ の各点 $\boldsymbol{x}$ は $\Gamma_{\boldsymbol{x}}$ に対応し, $\boldsymbol{x}$ を原点とする局所座標系 $(\exp_{\boldsymbol{x}}:\mathfrak{g}_{\boldsymbol{x}})$ を持っている.

これを (左からの) 動局所座標系と呼ぶ. 座標変換は正則

全く同様に $\Gamma_{\boldsymbol{x}}\backslash SL(2,\mathbb{C})$ も群 $G_{\boldsymbol{x}}$ と思え, $\exp'_{\boldsymbol{x}}(tX)=\exp(-tX)$ として $\exp'_{\boldsymbol{x}}:\mathfrak{g}_{\boldsymbol{x}}\to G_{\boldsymbol{x}}$ も $\boldsymbol{x}$ を原点とする局所座標系と思える. これを $(\exp'_{\boldsymbol{x}}:\mathfrak{g}_{\boldsymbol{x}})$ と書いて (右からの) 動局所座標系と呼ぶ.

共変微分と測地線

$\forall \boldsymbol{x}$ で, この点を原点として局所座標系 $(\mathfrak{g}_{\boldsymbol{x}}; \exp_{\boldsymbol{x}})$ がある. 共変微分とは動座標系による微分

定義. 点 $\boldsymbol{x}$ における共変微分とは $\boldsymbol{x}$ を原点とする局所座標系 $(\mathfrak{g}_{\boldsymbol{x}}; \exp_{\boldsymbol{x}})$ による微分 (偏微分/全微分) のことである. この微分法を $\tilde{\nabla}$ と書く.

$$\text{e.g. } \frac{\tilde{\nabla}}{dt}\phi\Big|_{\boldsymbol{x}} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi(\exp_{\boldsymbol{x}} tX).$$

共変微分が与えられると測地線という概念が得られる.

M 上の曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ が $\tilde{\nabla}_{\dot{\boldsymbol{x}}(t)}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=0$ を満たすとき測地線と呼ぶ.

注意 1. 共変微分は動局所座標系を与えて決まるものだから, 当然, 右と左で違ったもので, 測地線も左作用での測地線とか, 右作用での測地線とか用語を使い分けるべきものである.

また, $\tilde{\nabla}_{\dot{\boldsymbol{x}}(t)}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=0$ は力学的には加速度 0 と理解されることが多いが, この場合は単に (複素数的) "まっすぐ" ということを定義したのみで力学的加速度とは関係ない.

命題 3 各点 $\boldsymbol{x}$ で $\forall X \in \mathfrak{g}_{\boldsymbol{x}}$ に対し $\exp_{\boldsymbol{x}} tX$, $t \in \mathbb{R}$, は測地線となる. つまり $G_{\boldsymbol{x}} = g\tilde{\mathfrak{T}}g^{-1}$ の 1 径数部分群の左からの作用で $\boldsymbol{x}$ から出る曲線は (左作用での) 測地線となる. *i.e.* $\tilde{\nabla}_X X = 0$.

一方, $\boldsymbol{x}$ での isotropy 群が $\Gamma_{\boldsymbol{x}}$ だから

命題 4 $\forall h \in \Gamma_{\boldsymbol{x}}$ で $h\mathfrak{g}_{\boldsymbol{x}}h^{-1} = \mathfrak{g}_{\boldsymbol{x}}$, $hG_{\boldsymbol{x}}h^{-1} = G_{\boldsymbol{x}}$ であり指数写像 $\exp_{\boldsymbol{x}} : \mathfrak{g}_{\boldsymbol{x}} \to G_{\boldsymbol{x}}$ も $\Gamma_{\boldsymbol{x}}$ の元による随伴作用で不変である.

これより $\boldsymbol{x}$ から出る左作用での測地線の族は $\boldsymbol{x}$ を頂点とする $\mathrm{Ad}(\Gamma_{\boldsymbol{x}})$ 不変な集合であることが分かる.

2 次式への転置随伴作用

ここまでは $SL(2,\mathbb{C})$ の元の左とか右からの作用での話.

以下では標準的真空点 $\varpi(I_{\boldsymbol{x}}){\in}\mathcal{V}$ で考える.

$$:\varpi(I_{\boldsymbol{x}}):_0=2e^{\frac{1}{\hbar}(u_{\boldsymbol{x}}^2+v_{\boldsymbol{x}}^2)},\quad \Gamma_{\boldsymbol{x}}=SO(2,\mathbb{C})$$

$M{=}\tilde{\mathfrak{T}}{=}G_{\boldsymbol{x}}$ であったが, この群が $u_{\boldsymbol{x}}^2{+}v_{\boldsymbol{x}}^2$ をどのように動かすのかを見るために $\tilde{\mathfrak{T}}$ を M の中では $SO(2,\mathbb{C})$ の効果が消えてしまう $x^2{+}y^2$ の動き (軌道) としてみる. $\tilde{\mathfrak{T}}$ の 1 径数部分群を $Q(t)$ としたとき見るべきものは $Q(t)$ の M への左からの作用ではなく,

$$(u,v){}^tQ(t)Q(t)\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\ \text{である.}$$

一般には $A{\to}{}^tQ(t)AQ(t)$ 転置随伴作用

するとこの作用の軌道は行列の集合としては

$$\tilde{\mathfrak{T}}^{2\sharp}{=}\{{}^tXX;X{\in}\tilde{\mathfrak{T}}\}{=}\ \Big\{\begin{bmatrix}e^{2z}&we^{z}\\we^{z}&e^{-2z}{+}w^2\end{bmatrix};z,w{\in}\mathbb{C}\Big\}{=}\Sigma_1\backslash\Big\{\begin{bmatrix}0&\pm i\\\pm i&b\end{bmatrix}\Big\}.$$

$\Big\{\begin{bmatrix}0&\pm i\\\pm i&b\end{bmatrix}\Big\}$ を $\tilde{\mathfrak{T}}^{2\sharp}$ の**除外集合**と呼ぶ. Σ_1 は 1 枚の座標系 (軌道) では覆えないのである.

実はこれは $2e^{\frac{1}{\hbar}(u^2+v^2)}$ への (転置随伴でなく) 随伴作用として書直せる.

2 次の指数関数の真空への随伴作用

$Q(t){\in}\tilde{\mathfrak{T}}$ であるがこれを 2 次式 $\langle\boldsymbol{u}Q(t),\boldsymbol{u}\rangle$ とみると $J{=}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ として

$$[\frac{1}{i\hbar}\langle\boldsymbol{u}Q(t),\boldsymbol{u}\rangle,\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}]{=}2JQ(t)\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$$

で ${}^tJJ{=}I$ だから

$$(u,v)4\,{}^tQ(t)Q(t)\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\ \text{を}\ e\ \text{の肩にあげたものは}$$

$$e^{t\mathrm{ad}(\frac{1}{i\hbar}\langle\boldsymbol{u}Q,\boldsymbol{u}\rangle)}\big(2e^{\frac{1}{\hbar}(u^2+v^2)}\big){=}\mathrm{Ad}(e_*^{t\frac{1}{i\hbar}\langle\boldsymbol{u}Q,\boldsymbol{u}\rangle})\big(2e^{\frac{1}{\hbar}(u^2+v^2)}\big)\qquad(2)$$

と理解される.

i.e. これは一般に言えることで $:\varpi(I_{\boldsymbol{x}}):_0=2e^{\frac{1}{\hbar}(u^2+v^2)}$ が整関数だから

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(e_*^{t\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}Q,\boldsymbol{u}\rangle}){:}\varpi(I_{\boldsymbol{x}}){=}e^{t\mathrm{ad}\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}Q,\boldsymbol{u}\rangle}{:}\varpi(I_{\boldsymbol{x}}){:}_0\\ ={:}e_*^{t\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}Q,\boldsymbol{u}\rangle}{*}\varpi(I_{\boldsymbol{x}}){*}e_*^{-t\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}Q,\boldsymbol{u}\rangle}{:}_0\end{aligned}$$

便利だから Lie 群論的記述を用いているが, $e^{t\mathrm{ad}(Q)}$ の形でしか使わない.

ここまでの話は全部 $*$ 指数関数の随伴作用で考えているので, 実質は行列群の話である.

$\mathcal{V}$ の 1 点 $\boldsymbol{x}$ には Weyl 代数とともに真空 $\varpi(\boldsymbol{x})$ が付いているので, これにいろんな Weyl 代数の元を $\mathrm{Ad}(e_*^Q):\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ の形で作用する. 随伴作用で真空が真空に移されるのは明らかだが

真空への片側からの作用

随伴作用だけを見ていると考えにくいが

命題 5 $SL_{\mathbb{C}}^{(\frac{1}{2})}(2)*\varpi(I_{\boldsymbol{x}})=\mathbb{C}_{\times}\mathcal{V}$ である. これはここでは証明しない.

e.g.

$$:e_*^{a\tilde{u}_{\boldsymbol{x}}^2}*\varpi_{00}:_0=e^{-\frac{2}{i\hbar}\tilde{u}_{\boldsymbol{x}}(\tilde{v}_{\boldsymbol{x}}-i\hbar a u_{\boldsymbol{x}})} \tag{3}$$

片側だけの作用で真空点を真空点に動かすこともあるが, 2 次式が非退化だと $\frac{1}{i\hbar}\tilde{u}_{\boldsymbol{x}}{\circ}\tilde{v}_{\boldsymbol{x}}*\varpi_{00}=\frac{1}{2}\varpi_{00}$ で, $e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2\tilde{u}_{\boldsymbol{x}}\circ\tilde{v}_{\boldsymbol{x}}}*_0\varpi(\boldsymbol{x})=e^t\varpi(\boldsymbol{x})$ のように振幅部分を動かす部分が必ず出る.

真空点 $\varpi_{00}(\boldsymbol{x})$ に振幅部分を変えずに片側から働くのは 2 次式が退化していて結果的に

$$\boxed{\text{片側からの作用で随伴作用になる場合だけである}}$$

$:v*\varpi(\boldsymbol{i}_0):_0=0=:\varpi(\boldsymbol{i}_0)*u:_0$, $\frac{1}{i\hbar}u{\circ}v*\varpi(\boldsymbol{i}_0)=\varpi(\boldsymbol{i}_0)$ ($\circ$ は対称積) だから左側だけからの作用であっても結局随伴作用と同じで $e_*^{t\frac{1}{i\hbar}u^2}*\varpi(\boldsymbol{i}_0)=\mathrm{Ad}(e_*^{t\frac{1}{i\hbar}u^2})\varpi(\boldsymbol{i}_0)$ となる. 真空の性質の **b**) より実は次が分かる:

命題 6 次のものは片側からの作用になる：

$$:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}(u+iv)_*^2}*\varpi(I_{\boldsymbol{x}}):_0=\mathrm{Ad}(e_*^{t\frac{1}{i\hbar}(u+iv)_*^2}):\varpi(I_{\boldsymbol{x}}):_0$$

$$:\varpi(I_{\boldsymbol{x}}):_0*e_*^{-t\frac{1}{i\hbar}(u-iv)_*^2}=\mathrm{Ad}(e_*^{t\frac{1}{i\hbar}(u-iv)_*^2}):\varpi(I_{\boldsymbol{x}}):_0$$

2 番めのは右からだけの作用となる.

定理 1 $*$ 2 次の指数関数の M への作用で $\mathrm{Ad}(e_*^{t\frac{1}{i\hbar}\langle\boldsymbol{u}Q,\boldsymbol{u}\rangle})\varpi(\boldsymbol{x})$ が測地線になるのは $\det Q=0$ の場合だけである. $i.e.\langle\boldsymbol{u}Q,\boldsymbol{u}\rangle*\varpi(\boldsymbol{x})=0$ または $\varpi(\boldsymbol{x})*\langle\boldsymbol{u}Q,\boldsymbol{u}\rangle=0$

注意. ここで注意しなければならないのは真空への右からの作用を左からの作用に直すためには抱合的反自己同形 ι を使わねばならないが一般に $:\varpi(\boldsymbol{x})^{\iota}:_0\neq:\varpi(\boldsymbol{x}):_0$ であること, $i^{\iota}=-i$ なのでパラメータ t は実数でなければならず複素化できないことである.

注意. 上の条件だと Q を $e^{z}Q$ に替えても成立する. しかし $e^{x}Q$ ではパラメータが変わるだけの曲線であり, $e^{i\theta}Q$ で θ を動かすと始点は不動で初期方向が変化し実 2 次元の錘面になる.

注意. $\frac{1}{\hbar}(u^2+v^2)^{\iota}=\frac{1}{\hbar}(u^2+v^2)$ で, $(\frac{2i}{\hbar}u{\circ}v)^{\iota}=\frac{2i}{\hbar}u{\circ}v$ である. しかし ι は他にも色々工夫できる.

2 次の指数関数の右からだけの作用で測地線がでるのは退化 2 次式の場合だけで, その測地線は null 測地線であることが分かるが、ところが退化 2 次式は $(au+bv)^2$ の形だから上の注意で実 2 次元の錘面にしかならず次元が足りない！

null になる感覚的理由：$\exp_* tX=\mathrm{Exp}tX$ 満たすべき微分方程式が t に関して左辺は 1 階, 右辺は 2 階.

$$\boxed{SL(2,\mathbb{C})/\{\pm 1\}\to SO(1,3)}$$

:$\mathcal{V}$:$_0$ を $SL(2,\mathbb{C})$ の商空間として扱っているときには複素 2 次元多様体として扱っているので接続も測地線も複素化されていて指数関数のパラメータ t も複素数なので言わば「複素時間」のような感じになり, 逆に力学的意味はつかみにくい. 力学的意味を考えるためには最低でも “時間” という概念が設定できるような所に持込まねばならないわけで, そのために実 1 次元的 “時間” が出てくる $SO(1,3)$ の方に (複素構造を無視して) 移行する. 「時間とは？」を考えたいからである.

まず $\tilde{\mathfrak{T}}$ の部分群 $\tilde{\mathfrak{T}}_0=\begin{bmatrix} e^z & 0 \\ 0 & e^{-z}\end{bmatrix}$, $\tilde{\mathfrak{T}}_0\subset SL(2,\mathbb{C})$ を考える.
$\Omega=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1\end{bmatrix}$ と置くと $\Omega\tilde{\mathfrak{T}}_0\Omega^{-1}=SO(2,\mathbb{C})$ なので,
$SL(2,\mathbb{C})/\tilde{\mathfrak{T}}_0$ も考えられる. $\tilde{\mathfrak{T}}\cap SO(2,\mathbb{C})=\{\pm 1\}$ だったから

$$SL(2,\mathbb{C})/\tilde{\mathfrak{T}}_0\cong SO(1,3)/SO(1,1)\times SO(2)$$

である.

Lie 群 $\Omega^{-1}\tilde{\mathfrak{T}}\Omega$ は普通に左から $\tilde{M}=SL(2,\mathbb{C})/\mathfrak{T}_0$ に作用して
$\Omega^{-1}\tilde{\mathfrak{T}}\Omega\approx SL(2,\mathbb{C})/\mathfrak{T}_0$

Lie 群 $\Omega^{-1}\tilde{\mathfrak{T}}\Omega$ 自身を $\tilde{M}$ と思うことができる.

この Lie 群を G, その Lie 環を $\mathfrak{g}$ として,

$\exp:\mathfrak{g}\to G$ を $\tilde{M}$ の局所座標系とすることができる.

一方, $\tilde{\mathfrak{T}}/\{\pm 1\}\subset SL(2,\mathbb{C})/\{\pm 1\}$ でもあるから $\tilde{\mathfrak{T}}/\{\pm 1\}$ を $SO(1,3)$ の部分群とみなせるように変形する:

$I_{1,3}=diag\{1,-1,-1,-1\}$ とする.

$$SO(1,3)=\{A\in SL(4,\mathbb{R});{}^tAI_{1,3}A=I_{1,3}\}$$

$SO(1,3)$ へ

$\mathfrak{h}=\begin{bmatrix} x_0+x_1 & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3 & x_0-x_1 \end{bmatrix}$ を 2×2 のエルミート行列の全体とし，そこへの $X\in SL(2,\mathbb{C})$ を $H\to {}^t\bar{X}HX$ と表現する (これを † 随伴作用と呼ぶ).

これは実質 $SL(2,\mathbb{C})/\{\pm 1\}$ の作用であり，$\det H$ は $\mathfrak{h}$ の Minkowski 計量で $\det {}^t\bar{X}HX=\det H$ となる．この対応 Φ で $SL(2,\mathbb{C})/\{\pm 1\}$ は $SO(1,3)$ に同形に移される．Lie 環同志の対応 $d\Phi$: $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\to\mathfrak{so}(1,3)$ は　$d\Phi(X): H\to {}^t\bar{X}H+HX$ である．

$\mathfrak{h}$ の線形基底を

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

とし，これを縦に並べて ${}^t(\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ とし，上のやりかたで $\tilde{\mathfrak{T}}/\{\pm 1\}$ を $SO(1,3)$ の中に埋込むと

$$\Phi(\mathfrak{T}_0)=SO(1,1)\times SO(2)$$

実際 $\begin{bmatrix} e^{x+iy} & 0 \\ 0 & e^{-x-iy} \end{bmatrix}\in\mathfrak{T}_0$ について

$$\begin{bmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{-2x} \end{bmatrix}=\cosh 2x\mathbf{e}_0+\sinh 2x\mathbf{e}_1$$

$$\begin{bmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & -e^{-2x} \end{bmatrix}=\sinh 2x\mathbf{e}_0+\cosh 2x\mathbf{e}_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & e^{-2iy} \\ e^{2iy} & 0 \end{bmatrix}=\cos 2y\mathbf{e}_2+\sin 2y\mathbf{e}_3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & ie^{-2iy} \\ -ie^{2iy} & 0 \end{bmatrix}=-\sin 2y\mathbf{e}_2+\cosh 2y\mathbf{e}_3$$

の等式に注意して計算し，縦に並べた基底をさらに上下に ${}^t(G_2,F_2)$ と書いてやると

$$\begin{bmatrix} G_2' \\ F_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H(2x) & 0 \\ 0 & R(2y) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_2 \\ F_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

のようになり，$SO(1,1)\times SO(2)$ となる．

$$H(\tau)=\begin{bmatrix} \cosh\tau & \sinh\tau \\ \sinh\tau & \cosh\tau \end{bmatrix},\quad R(z)=\begin{bmatrix} \cos z & \sin z \\ -\sin z & \cos z \end{bmatrix}\in SO(2,\mathbb{C})$$

$\tilde{\mathfrak{T}}\cap SO(2,\mathbb{C})=\{\pm 1\}$, $(\Omega^{-1}\tilde{\mathfrak{T}}\Omega)\cap\tilde{\mathfrak{T}}_0=\{\pm 1\}$ だったから Φ によって $SO(1,3)$ に移して次が分かる:

命題 7 $M\cong SO(1,3)/SO(1,1)\times SO(2)$ であり, 片側からの作用だけ考えているときには実 Lie 群 $\Phi(\Omega^{-1}\tilde{\mathfrak{T}}\Omega)$ の群構造を持つ.

以後, $SO(1,3)/SO(1,1)\times SO(2)$ を M_0 とも書くことにする.

$d\Phi(\mathfrak{g})$ の計算

$\exp:\mathfrak{g}\to G$ が $\tilde{M}=SL(2,\mathbb{C})/\mathfrak{T}_0$, の原点中心の座標系だったから, $d\Phi(\mathfrak{g})$ は M_0 の原点での接空間と思える. $G=\Omega^{-1}\mathfrak{T}\Omega$ で, $\mathfrak{T}$ の Lie 環は $\{\left[\begin{smallmatrix} z & w \\ 0 & -z \end{smallmatrix}\right]; z,w\in\mathbb{C}\}$ だから, G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は次で与えられる:

$$\mathfrak{g}=\{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} iw & 2iz+w \\ -2iz+w & -iw \end{bmatrix}; z,w\in\mathbb{C}\} \tag{5}$$

iz の部分と w の部分とにわけて $d\Phi(\mathfrak{g})$ を計算するのだが,

$$d\Phi(X)=\{H\to {}^t\bar{X}H+HX\}$$

であることに注意する. 丁寧に計算すると

$$\begin{bmatrix} 0 & i(w-\bar{w}) & w+\bar{w} & z+\bar{z} \\ i(w-\bar{w}) & 0 & i(z-\bar{z}) & -i(w-\bar{w}) \\ w+\bar{w} & -i(z-\bar{z}) & 0 & -(w+\bar{w}) \\ z+\bar{z} & i(w-\bar{w}) & w+\bar{w} & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

という $\mathfrak{so}(1,3)$ の部分 Lie 環が得られる. これで分かるように $SO(1,3)$ のほうで考えるときには測地線のパラメータは複素化できない. これに内積を定義して Minkowski 空間としよう.

$\boldsymbol{x}{\in}M_0$, $T_{\boldsymbol{x}}M_0$ は $*$ 2 次式で作る 1+3 Minkowski 空間で, e.g.

$$L^{1+3}(\boldsymbol{i}_0){=}\left\{X{=}\begin{bmatrix}x_1{+}ix_2 & x_0{+}ix_3\\ x_0{+}ix_3 & x_1{-}ix_2\end{bmatrix};{-}\mathrm{Re}\det X\right\}$$

であるが, 光円錐は Re det $X{=}0$ で与えられるだけなので, 光円錐の元に退化と非退化があることになり, これの物理的意味を探している.

退化光円錐を走る指数関数は null geidesic と解釈できるが非退化光円錐を走る指数関数は進行方向に加速度を持った曲線になるのでパラメータ t を変えると null 測地線となる.

計量接続

前の Φ を使うと $\Phi(SU(2)){=}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & SO(3)\end{bmatrix}$ が容易に分かるが, 真空 :$\mathcal{V}$:$_0$ を商多様体 $M_0{=}SO(1,3)/SO(1,1){\times}SO(2)$ として見るときには部分群 $SO(1,1){\times}SO(2)$ は 2 段に

$$\begin{bmatrix}H(2\tau) & \mathrm{O}\\ \mathrm{O} & R(2\theta)\end{bmatrix}$$

のように並べて扱う. $x_0^2{-}x_1^2{-}x_2^2{-}x_3^2$ なる不定値計量を持つ (Minkowski) ベクトル空間 E^{1+3} を考え自然な基底を $\mathbf{f}_0,\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3$ とし, $\mathbf{f}_0,\mathbf{f}_1$ の張る部分空間を H_2, $\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3$ の張る部分空間を E_2 とする.

$$\tilde{\nabla}_X\begin{bmatrix}\mathbf{f}_0(\boldsymbol{x})\\ \mathbf{f}_1(\boldsymbol{x})\\ \mathbf{f}_2(\boldsymbol{x})\\ \mathbf{f}_3(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \xi_{\boldsymbol{x}}(X) & 0 & 0\\ \xi_{\boldsymbol{x}}(X) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\theta_{\boldsymbol{x}}(X)\\ 0 & 0 & -2\theta_{\boldsymbol{x}}(X) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{f}_0(\boldsymbol{x})\\ \mathbf{f}_1(\boldsymbol{x})\\ \mathbf{f}_2(\boldsymbol{x})\\ \mathbf{f}_3(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}$$

とする. この形は $SO(1,1){\times}SO(2)$ で不変なので $S{\in}SO(1,3)$ による左からの作用で $M{=}SO(1,3)/SO(1,1){\times}SO(2)$ 上に $SO(1,3)$ 不変な接続が定義される. つまり $\forall g{\in}SO(1,3)$ に対し $\tilde{\nabla}_{gX}gY{=}\tilde{\nabla}_XY$ である. これは Lorentz 計量を不変にするので計量接続と呼ばれる.

偏光面のような 2 次元平面が平行になっているということからも光円錐が均質になっていないことが分かる.