複素計量を持つローレンツ多様体

2015/3/9 沼津　大森 英樹

非可換代数の親玉=微積分の代数=Weyl 代数

超越的に拡大したところでは同じもの

超越的に拡大するところで,「ordering problem」に類似の「表示の問題」(超越的に拡大したものの性質が表示に依存) が生ずる.

Weyl 代数の積公式は

$$f*_K g = f e^{\frac{i\hbar}{2}\sum_{ij}\overleftarrow{\partial}_i \Lambda^{ij}\overrightarrow{\partial}_j} g, \quad \Lambda = K + J$$

但し $\boldsymbol{u}=(u,v)$, $[u,v]=-i\hbar$, $K=\forall$ 対称行列,

K は任意の対称行列で, これを入れても代数構造は不変だが、元の表示が変わる.

2 次式の指数関数に表示で動く分岐特異点が現れる.

$g\in SL(2,\mathbb{C})$ で $\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle$ の指数関数を考える. K-表示で, $e_*^{t\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle_*}$ を書くと

$$:e_*^{\frac{t}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle_*}:_K = \frac{1}{\sqrt{\det(\cos t I - (\sin t)\,{}^t\!gKg)}} e^{\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g \frac{\sin t}{\cos t I - \sin t\, {}^t\!gKg}, \boldsymbol{u}g\rangle}.$$

$$\begin{aligned}\det(\cos t I - (\sin t)\,{}^t\!gKg) &= \cos^2 t - \mathrm{tr}({}^t\!gKg)\cos t\sin t + \sin^2 t\det K\\ &= (\cos t - \mu\sin t)(\cos t - \mu^{-1}\sin t) \quad (\text{for the case} \quad \det K = 1)\\ &= (\cos t - i\nu\sin t)(\cos t - i\nu^{-1}\sin t) \quad (\text{for the case} \quad \det K = -1)\end{aligned}$$

$\det K$ の正, 負が指数関数の周期性にかなり影響する

$\forall K$, K-ordered expression of $e_*^{(s+it)\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle}$ の t に関する周期性に微妙な違いが現れる. $\exists[a,b]$ **(exchanging interval)** s.t.

$$:e_*^{(s+it)\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle}:_K = \begin{cases}\text{alternating } \pi\text{-periodic} & s<b\\ \pi\text{-periodic} & a<s<b\\ \text{alternating } \pi\text{-periodic} & b<s\end{cases}$$

剛体球面$=\ \{g\,{}^t\!g;\, g{\in}SU(2)\} = \left\{\begin{bmatrix}\alpha{+}i\beta & i\gamma\\ i\gamma & \alpha{-}i\beta\end{bmatrix},\quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\}$

これで作る 2 次式 $(\alpha{+}i\beta)u_*^2{+}(\alpha{-}i\beta)v_*^2{+}2i\gamma u{\circ}v$ の全体を $\tilde{S}^2$, $\alpha^2{+}\beta^2{+}\gamma^2{=}1$ に注意.

定理 $\forall A{\in}\tilde{S}^2$ に対して $:e_*^{e_*^{it\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}A,\boldsymbol{u}\rangle}}:_K$ が π-periodic になるような表示 K はない.

K を剛体球面にとると, 例外 $K^\dagger$ を除いて $:e_*^{it\frac{1}{i\hbar}\langle\boldsymbol{u}A,\boldsymbol{u}\rangle}:_K$ が π-periodic になる

その例外については

$$:e_*^{it\frac{1}{i\hbar}\langle\boldsymbol{u}K^\dagger,\boldsymbol{u}\rangle}:_K=\frac{1}{\cos t{-}\sin t}e^{\frac{1}{i\hbar}\frac{\sin t}{\cos t-\sin t}\langle\boldsymbol{u}K^\dagger,\boldsymbol{u}\rangle}$$

分岐しない特異点がでるが alternatingπ-periodic になる.

ところがこれの iK-表示は

$$:e_*^{it\frac{1}{i\hbar}\langle\boldsymbol{u}K^\dagger,\boldsymbol{u}\rangle}:_{iK}=e^{it}e^{\frac{1}{i\hbar}e^{it}\sin t\langle\boldsymbol{u}K^\dagger,\boldsymbol{u}\rangle}$$

これも alternating π-periodic

$\pm t$ に関して非対称！

さらに

$\mathbb{R}\tilde{S}^2\oplus\mathbb{R}\tilde{S}^2\ni\forall Z=xX+iyY,\ X,Y\in\tilde{S}^2$ で

$$\det Z{=}x^2{-}y^2{+}2ixy\langle X,Y\rangle$$

$\mathrm{Re}\det Z=x^2-y^2$ が上の空間の $(+++---)$ Minkowski 計量

$x^2{-}y^2{=}1$, $x^2{-}y^2{=}-1$ のどちらも一葉で, Z から $-Z$ に移動可能

このため $:e_*^{it\frac{1}{i\hbar}\langle\boldsymbol{u}Z,\boldsymbol{u}\rangle}:_{iK}$ の符号が決定できないところが出る. これは困ることなので......

iK-表示で現れる Minkowski 空間

iK を固定すると,
空間　$\mathbb{R}K^{\dagger}\oplus i\mathbb{R}\tilde{S}^2$ には $\mathrm{Re}(\det Z)$ で $+---$ 型の Minkowski 計量が入り

しかも light cone の内側では $:e_*^{it\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}Z,\boldsymbol{u}\rangle}:_{iK}$ の符号が決定できる.
さらに $\pm t$ に関する非対称性で時間方向の向きも決められ, light cone の内側方向に出る $*$ 指数関数の特異点も分かる.

これは都合の良いことなのだが,

$\mathbb{R}K^{\dagger}\oplus\mathbb{R}\tilde{S}^2\ni\forall Z=xK^{\dagger}+iyY,\ Y\in\tilde{S}^2$ なので

$$\det Z{=}x^2{-}y^2{+}2ixy\langle K^{\dagger},Y\rangle$$

退化光円錐:　light cone の内側にさらに $\langle K^{\dagger},Y\rangle{=}0$ の部分が出る.

退化光円錐の物理的意味は不明だが

$*$-指数関数の性質

Light-cone の内側	虚軸方向に周期性あり	実軸方向に指数急減少	特異点 2 列
非退化 light-cone 上	ある方向に周期性あり	ある方向に指数急減少	特異点 2 列
退化 light-cone 上	周期性なし	実軸方向に $\lvert t\rvert^{-1/2}$ 減少	特異点 1 つ

$$:e_*^{tw^2}:_{iK}{=}\frac{1}{\sqrt{1{-}t\tau}}e^{\frac{t}{1-t\tau}w^2}$$

Light-cone frame が退化 light-cone を使って作れる

質量 0 のスカラー粒子は本当にあるのだろうか？このとき電磁場のスカラー粒子描像 (光子) は質量 0 なのだろうか？

$x=0$ のとき空間部分にある $iyY,Y\in\tilde{S}^2$ で指数関数 $:e_*^{y\frac{1}{\hbar}\langle\boldsymbol{u}Y,\boldsymbol{u}\rangle}:_{iK}$ は楕円関数 $dn(\xi,k)$ を使って書かれる.(k は "質量" に関係？)

$\det Z{=}x^2{-}y^2{+}2ixy\langle K^\dagger, Y\rangle$ を計量テンソルと思う

$$(g_{ij}){=}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}{+}i\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=g_{ij}^{(re)}{+}ig_{ij}^{(im)}$$

複素計量テンソル

M を 4 次元実 C^∞-多様体とし, 局所座標系を (x^0, x^1, x^2, x^3) とし, これをまとめて $\boldsymbol{x}$ と表わす. 複素対称テンソル $(g_{ij}(\boldsymbol{x}))$ を考え, 実部, 虚部を

$$g_{ij}(\boldsymbol{x})dx^i dx^j{=}g_{ij}^{(r)}(\boldsymbol{x})dx^i dx^j{+}\boldsymbol{i}g_{ij}^{(\iota)}(\boldsymbol{x})dx^i dx^j$$

とする. $g_{ij}^{(r)}(\boldsymbol{x})$ は非退化な実対称テンソルで, 逆行列を $g_{(r)}^{ij}(\boldsymbol{x})$ とし, M の $(+---)$ 型のローレンツ計量を与る場合を考える.

$\boldsymbol{x}{\in}M$ で $T_{\boldsymbol{x}}M$ の中で $g_{ij}^{(r)}(\boldsymbol{x})X^iX^j{=}0$ の部分を光円錐, $g_{ij}(\boldsymbol{x})X^iX^j{=}0$ の部分を退化光円錐と呼ぶ. 以下では次を仮定する:

(1) $$\det(g_{ij}){=}0, \quad \operatorname{rank}(g_{ij}^{(\iota)}){=}2.$$

$G_2 : T_M{\to}T_M$ を $G_2(\boldsymbol{x})^i_j{=}g_{(r)}^{ia}(\boldsymbol{x})g_{aj}^{(\iota)}(\boldsymbol{x})$ で定義すると, これは内積 $g_{ij}^{(r)}$ に関して対称な線形写像であり, $\det(g_{ij}){=}0$ なので

$$I{+}iG_2 : \mathbb{C}T_M \to \mathbb{C}T_M$$

には $(I{+}iG_2)Z{=}0$ となる複素ベクトル $Z{\neq}0$ がある. $Z{=}X{+}iY$ とし実部, 虚部をみると

$$(I{+}iG_2)(X{+}iY){=}0,\ X{=}G_2Y,\ Y{=}{-}G_2X$$

となり, $X, Y{\neq}0$ で $(I{+}G_2^2)X{=}0{=}(I{+}G_2^2)Y$ となる. G_2 は I から見ると対称行列でないが G_2^2 は X, Y を固有値 -1 の固有ベクトルとして持ち, X と Y は一次独立となる. X, Y で張られる平面を E_2, その ($g_{ij}^{(r)}$ に関する) 直交補空間を F_2 とし, 基底ををとり直すと

(2) $$(g_{ij}^{(\iota)}){=}\begin{bmatrix}a&\pm\sqrt{1{+}a^2}&0&0\\\pm\sqrt{1{+}a^2}&a&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

となる.

Proposition 0.1. $E_M^2{=}\{\operatorname{Ker}(I{+}G_2^2(\boldsymbol{x})); \boldsymbol{x}{\in}M\}$ は T_M の平行部分束.

これは電磁波が横波であることと関係する?

ヌル測地線に２種類ある ??

質量０のスカラー粒子が２種類?? それとも非退化ヌル測地線は質量ありとするのか?

Geodesic と $*$ one paramenter group とは関係がない

$$\mathrm{Exp}sX{\neq}{:}\exp_* sX{:}_{iK}$$

しかし退化光円錐の所では

$$\mathrm{Exp}sX{=}{:}\exp_* sX{*}\varpi_{00}{:}_{iK}$$

と仮定したくなる.

おそらくこの構造は不安定で自然界には存在しない ??

真空 = G-invariant idempotent element. (G= mainly one param.gr.)

Ordering	Notation	Definition	Condition	Name
K: generic	ϖ_{00}	$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_*^{(s+it)\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle-\frac{1}{2}s}dt$	$s \ll 0$	vacuum
K: generic	$\overline{\varpi}_{00}$	$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_*^{(s+it)\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle+\frac{1}{2}s}dt$	$s \gg 0$	bar-vacuum
K: special	$\varpi_*(0)$	$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_*^{(s+it)\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle}dt$	$a<0<b$	pseudo-vacuum

Regular representation spaces w.r.t. the vacuums related to $e_*^{(s+it)\frac{1}{i\hbar}u\circ v}dt$

Vacuum	Property	Reg. Rep. Sp.	Idempotent
ϖ_{00}	$v{*}\varpi_{00}{=}0{=}\varpi_{00}{*}u$	$\mathbb{C}[u]{*}\varpi_{00}$	$\varpi_{00}{*}\varpi_{00}{=}\varpi_{00}$
$\overline{\varpi}_{00}$	$u{*}\varpi_{00}{=}0{=}\overline{\varpi}_{00}{*}v$	$\mathbb{C}[v]{*}\overline{\varpi}_{00}$	$\overline{\varpi}_{00}{*}\overline{\varpi}_{00}{=}\overline{\varpi}_{00}$
$\varpi_*(0)$	$u{\circ}v{*}\varpi_{00}{=}0$	$(\mathbb{C}[u]+\mathbb{C}[v])\varpi_*(0)$	$\varpi_*(0)\varpi_*(0){=}\varpi_*(0)$

作用素表現 {=} 真空表現 {=} 正則表現

これまでの「真空」では、「真空に当てて生き残るもの」の方が「配位空間上の関数空間」だが..........

$$e_*^{t\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle_*}*\Omega_*=\Omega_*,\quad (\mathfrak{su}(2)J)*\Omega_*=\{0\}.$$

これまでの真空では複素係数だったが, ここで生き残るのは実係数で

$$2\text{ 次式全体 }*\Omega=(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})J)*\Omega=(\mathfrak{h}_0(2)J)*\Omega,$$

$\mathfrak{h}_0(2)$=traceless hermite matrices.

補空間は一意的ではない. $*\Omega$ で何が生き残るか, そこにどんな代数構造が入るかが問題.$\mathfrak{h}_0(2)J)$ の展開環の問題ではない.

複素係数 ⇒ 実係数

Lemma $\mathfrak{h}_0(2)=i\mathfrak{su}(2)$ は $[|X,Y|]=i[iX,iY]$ で Lie algebra over $\mathbb{R}$.
$\mathfrak{h}(2)=\mathbb{R}\oplus\mathfrak{h}_0(2)$ も同様

$$\mathfrak{h}(2)=\left\{\begin{bmatrix}x_0+x_3 & x_1+ix_2\\ x_1-ix_2 & x_0-x_3\end{bmatrix};x_i\in\mathbb{R}\right\}\quad=\text{hermite 行列全体}$$

$$\det X=x_0^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2),\qquad \text{Minkowski-計量}$$

$$\text{Lorentz 群の作用 } X\to AXA^*,\ A\in SL(2,\mathbb{C}).$$

実係数で展開環を作り位相完備化するが全体像は不明. 偶数次の hermite $*$-積の元全体となる?

補空間は一意的ではないので要注意. Laplace 変換を使って $X^{-1},\sqrt{X}$ も作る

このことを使って全体で積分する（例外点は積分に影響しない）

$$\Omega_*=\int_{(t,g)\in SU(2)}:e_*^{\frac{t}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle_*}:_K d\mu=\frac{1}{8\pi^2}\int_{(g\,{}^tg)\in\tilde{S}^2}\int_0^{2\pi}:e_*^{\frac{t}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle_*}dtd(g\,{}^tg):_K$$

where $d\mu$ is the invariant volume form with total volume 1. これを $SU(2)$**-vacuum** と呼ぶことにする.

$$e_*^{t\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle_*}*\Omega_*=\Omega_*,\quad (\mathfrak{su}(2)J)*\Omega_*=\{0\}.$$