2次式の$*$-指数関数の奇妙な性質

大森英樹

Weyl代数 : $(u, v) = (u_1, u_2)$

$$u_i *_K u_j = u_i u_j + \frac{i\hbar}{2}(K_{ij} + J_{ij})$$

$J = \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix}$, $K = \mathbb{C}$-対称行列
(表示パラメータ)

$K = 0$: Weyl ordering
積公式 : Moyal product formula

$K = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$: normal ordering
積公式 : ΨDO-積公式

$K \in SU(2) \cap$ 対称 : 剛体表示

K : open dense : generic な表示

相互変換公式 (intertwiner)

$$I_K^{K'}(f) = e^{\frac{i\hbar}{4}\sum_{ij}(K'-K)_{ij}\partial_i\partial_j} f$$

$*$-2次式 $Q(u) = a u_*^2 + b v_*^2 + 2c\, u \circ v$

$a, b, c \in \mathbb{C}, \quad ab - c^2 = 1$

$:e_*^{t\frac{1}{\hbar}Q(u)}:_K$ の generic な性質

[G.1] 実軸上には特異点はない

両側に $e^{-|t|}$ のオーダーで急減少

$\therefore \displaystyle\int_{-\infty}^{0} :e_*^{t\frac{1}{\hbar}Q(u)}:_K dt, \quad -\int_{0}^{\infty} :e_*^{t\frac{1}{\hbar}Q(u)}:_K dt$: 収束

[G.2] 特異点は2重分岐特異点で虚軸に平行な2本の直線 $a+it$, $b+it$ $(a<b)$ に沿って π-周期で現われる

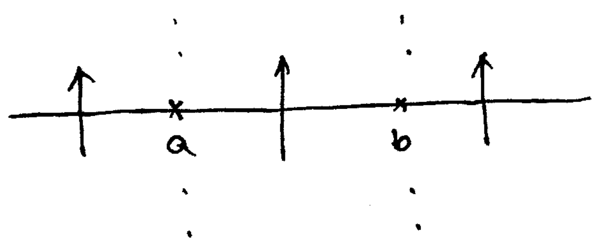
a, b, 特異点の位置は K に依存

[G.3] $:e_*^{(s+it)\frac{1}{\hbar}Q(u)}:_K$ は

(a) $a<s<b$ ならば t について π-周期的

(b) $s<a$, or $b<s$ ならば π-交代周期的

特に (a) の 特[illegible]



[G.4] $: e_*^{2\pi i \frac{1}{K} Q(u)} :_K = 1$

$$: e_*^{\pi i \frac{1}{K} Q(u)} :_K = \sqrt{1} = \pm 1$$

$$: e_*^{\frac{\pi}{2} i \frac{1}{K} Q(u)} :_K = \frac{1}{\sqrt{\det K}} e^{-\frac{1}{K}\langle u \frac{1}{K}, u\rangle}$$

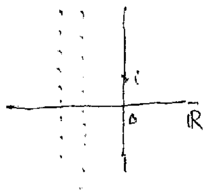
Q(u) によらずに表示だけできまる

$$\varepsilon_\infty = e_*^{\frac{\pi}{2} i \frac{1}{K} Q(u)} \quad \text{(polar element)}$$

[A] Q(u)の全体は連結集合なのに

$\varepsilon_\infty^2 = \pm 1$ で符号はきめられない

$: e_*^{\pi i \frac{1}{K} Q(u)} :_K = -1$ となるような元があると



Q(u)を変えると特異点列が動く

必ず虚軸を横切る

$\varepsilon_\infty^2 = 1$ となっている Q(u) を探す....

(Q(u)を"実数"に制限する)

そこで $Q(\mathfrak{u})$ を "剛体球面" に制限

$$Q(\mathfrak{u}) = \alpha(u_*^2 - v_*^2) + \beta\, 2u\cdot v + \gamma \frac{1}{i}(u_*^2 + v_*^2)$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$$

[B] 剛体球面全体にわたって

$$:\varepsilon_\infty^2:_K = 1$$

となるような表示は存在しない。

◎ しかし、$K \in SU(2)$ の対称 (剛体表示) とすると

$Q(\mathfrak{u}) = \langle \mathfrak{u}\frac{1}{K}, \mathfrak{u}\rangle$ という "例外" を除いて

$$\varepsilon_\infty^2 = 1, \text{ i.e. } :e_*^{\pi i \frac{1}{i} Q(\mathfrak{u})}:_K = 1$$

◎ $:e_*^{t\frac{1}{i}\langle \mathfrak{u}\frac{1}{K}, \mathfrak{u}\rangle}:_K$ は $t = \frac{\pi}{4}$ or $-\frac{\pi}{4}$ で

分岐しない単純特異点。

(tの "向き" が指定できる)

◎ $\int_0^\pi \mathrm{amp}:e_*^{t\frac{1}{i}Q(\mathfrak{u})}:_K dt$ は 完全積円積分

$\varepsilon_\infty^2 = -1$ で安定している所は …… ?

そこで 表示を剛体表示, K に固定し,

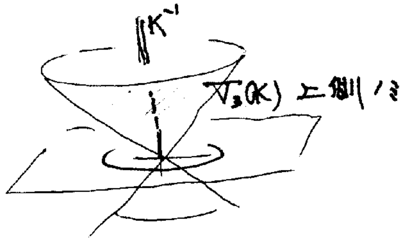
$$Q(w) \in \left\{ \begin{array}{l} \xi(u_+^2 - v_+^2) + \eta\, 2u \cdot v + \zeta \frac{1}{i}(u_+^2 + v_+^2) \\ \qquad \xi, \eta, \zeta \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) > 0 \end{array} \right\}$$

実部と虚部に分けて

$$V_3(K) = \left\{ \begin{array}{l} a\langle w \frac{1}{K}, w \rangle + ib\,(\text{剛体球面}) : a^2 - b^2 > 0 \\ \qquad a, b \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

[C] $V_3(K)$ 上では $:\varepsilon_\infty^2:_K = -1$ と安定している

$V_3(K) \subset$ Minkowski 空間



⊙ K (剛体表示)を固定する ≒ Euclid 幾何的なものに目を向ける

すると K^{-1} が "時間" (剛体一) が対応し

これと i(剛体球面) と合わせて Minkowski 空間が見える

$$\left\{ :e_*^{t\frac{1}{i\hbar}Q(u)}:_K \quad \begin{array}{l} t\in\mathbb{R} \\ Q(u)\in 剛体球面 \\ K\in 剛体表示 \end{array} \right\}$$ は何に見えるか

$\mathbb{G}$ = 特異点付の SU(2) or SO(3)

K = fix すると

$:\mathbb{G}:_K$ 上 closed 2-form (Hol($\mathbb{C}^2$)-valued)

$$:e_*^{\frac{t}{i\hbar}\langle u g, u g\rangle}:_K$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det\left(\cos t\, I - (\sin t)\, g^{\dagger} g K\right)}}\, e^{\frac{1}{i\hbar}\left\langle u \frac{\sin t}{\cos t\, I - (\sin t)\, g^{\dagger} g K} g^{\dagger} g,\, u\right\rangle}$$

$g \in SL(2\mathbb{C})$ or $g \in SU(2)$