$SU(2)$-vacuum と正則表現空間

2013/3/7 沼津　大森 英樹 (東京理科大 嘱託教授)

非可換代数の親玉=微積分の代数=Weyl 代数

超越的に拡大したところでは同じもの

超越的に拡大するところで,「ordering problem」に類似の「表示の問題」(超越的に拡大したものの性質が表示に依存) が生ずる.

Weyl 代数の積公式は

$$f*_{_K}g=fe^{\frac{i\hbar}{2}\sum_{ij}\overleftarrow{\partial}_i\Lambda_{ij}\overrightarrow{\partial}_j}g, \quad \Lambda=K+J$$

K は任意の対称行列で, これを入れても代数構造は不変だが、元の表示が変わる.

任意の K を使うのが、我々の第一の立場

特に 2 次式の指数関数で奇妙な性質の違いが現れる.

拡張された Weyl 代数の中に Clifford 代数や, Töplitz 代数が入っていたり、2 価の元が現れたりする. さらに, $SL(2,\mathbb{R})$ の double cover の複素化に見えるような群等も現れる.

$g\in SL(2,\mathbb{C})$ で $\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle$ の指数関数を考える. Generic K-表示で, $e_*^{t\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle_*}$ を書くと

$$:e_*^{\frac{t}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle_*}:_{_K}=\frac{1}{\sqrt{\det(\cos tI-(\sin t){}^tgKg)}}e^{\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g\frac{\sin t}{\cos tI-\sin t\,{}^tgKg},\boldsymbol{u}g\rangle}.$$

但し $\boldsymbol{u}=(u,v)$, $[u,v]=-i\hbar$, $K=\forall$ 対称行列,

$\forall K$, K-ordered expression of $e_*^{(s+it)\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle}$ の t に関する周期性に奇妙な違いが現れる. $\exists[a,b]$ **(exchanging interval)** s.t.

$$:e_*^{(s+it)\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle}:_{_K}=\begin{cases}\text{alternating } 2\pi\text{-periodic} & s<b\\ 2\pi\text{-periodic} & a<s<b\\ \text{alternating } 2\pi\text{-periodic} & b<s\end{cases}$$

ordering	exchange interval	singular points
$K=0$ (Weyl ordering)	$a=b=\frac{\pi}{2}$	$t=\frac{\pi}{2}+\pi n$
$K=K_0$(normal ordering)	$a=b=\infty$	$\emptyset$
generic K	$a<b$	π-periodic along two lines parallel to imaginaly axis

真空 = G-invariant idempotent element. (G= mainly one param.gr.)

Ordering	Notation	Definition	Condition	Name
K: generic	ϖ_{00}	$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_*^{(s+it)\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle-\frac{1}{2}s}dt$	$s\ll 0$	vacuum
K: generic	$\overline{\varpi}_{00}$	$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_*^{(s+it)\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle+\frac{1}{2}s}dt$	$s\gg 0$	bar-vacuum
K: special	$\varpi_*(0)$	$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_*^{(s+it)\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle}dt$	$a<0<b$	pseudo-vacuum

Regular representation spaces w.r.t. the vacuums related to $e_*^{(s+it)\frac{1}{i\hbar}u\circ v}dt$

Vacuum	Property	Reg. Rep. Sp.	Idempotent
ϖ_{00}	$v{*}\varpi_{00}{=}0{=}\varpi_{00}{*}u$	$\mathbb{C}[u]{*}\varpi_{00}$	$\varpi_{00}{*}\varpi_{00}{=}\varpi_{00}$
$\overline{\varpi}_{00}$	$u{*}\overline{\varpi}_{00}{=}0{=}\overline{\varpi}_{00}{*}v$	$\mathbb{C}[v]{*}\overline{\varpi}_{00}$	$\overline{\varpi}_{00}{*}\overline{\varpi}_{00}{=}\overline{\varpi}_{00}$
$\varpi_*(0)$	$u{\circ}v{*}\varpi_{00}{=}0$	$(\mathbb{C}[u]+\mathbb{C}[v])\varpi_*(0)$	$\varpi_*(0)\varpi_*(0){=}\varpi_*(0)$

$SU(2)$-vacuum

一方, $g=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in SL(2,\mathbb{C})$ と置くと

$$\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle_*{=}(u,v)\begin{bmatrix}a^2{+}b^2 & ac{+}bd\\ ac{+}bd & c^2{+}d^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}{=}(a^2{+}b^2)u^2{+}(c^2{+}d^2)v^2{+}2(ac{+}bd)u{\circ}v.$$

上は特に $\mathfrak{su}_1(2)J$ の形の 2 次式を含む. ($\mathfrak{su}_1(2)$ は行列式 1 の traceless skew-hermitian matrices)
そこで,

$$\begin{bmatrix}a^2{+}b^2 & ac{+}bd\\ ac{+}bd & c^2{+}d^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha{+}i\beta & i\gamma\\ i\gamma & \alpha{-}i\beta\end{bmatrix},\quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\quad \alpha{+}i\beta{=}\sqrt{1{-}\gamma^2}\,e^{i\theta},\quad |\gamma|\le 1.$$

とし、この集合を $\tilde{S}^2$ とする. $\alpha^2{+}\beta^2{+}\gamma^2{=}1$ に注意. 当然 $\tilde{S}^2{\cong}S^2{=}SU(2)/SO(2)$ である.

定理 Nice expression と称する K の族があり, $\forall g\,{}^tg\in\tilde{S}^2$ について one parameter subgroup $:e_*^{(s+it)\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle}:_K$ は その K で $a<0<b$, i.e. $:e_*^{it\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle}:_K$ が 2π-periodic. 但し例外が一つあり, その one parameter subgroup $:e_*^{it\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle}:_K$ は特異点を持つ. (この特異点は分岐しているので, 回避のしかたで周期は 2π だったり 4π だったりする.)

このことを使って全体で積分する（例外点は積分に影響しない）

$$\Omega_*{=}\int_{(t,g)\in SU(2)}:e_*^{\frac{t}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle_*}:_K d\mu{=}\frac{1}{8\pi^2}\int_{(g\,{}^tg)\in\tilde{S}^2}\int_0^{2\pi}:e_*^{\frac{t}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle_*}dtd(g\,{}^tg):_K$$

where $d\mu$ is the invariant volume form with total volume 1. これを $SU(2)$**-vacuum** と呼ぶことにする.

$$e_*^{t\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle_*}{*}\Omega_*{=}\Omega_*,\quad (\mathfrak{su}(2)J){*}\Omega_*{=}\{0\}.$$

作用素表現 {=} 真空表現 {=} 正則表現

これまでの「真空」では、「真空に当てて生き残るもの」の方が「配位空間上の関数空間」だが..........

$$e_*^{t\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle_*}*\Omega_*{=}\Omega_*, \quad (\mathfrak{su}(2)J)*\Omega_*{=}\{0\}.$$

これまでの真空では複素係数だったが, ここで生き残るのは実係数で

$$2\text{ 次式全体 }*\Omega{=}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})J)*\Omega{=}(\mathfrak{h}_0(2)J)*\Omega,$$

$\mathfrak{h}_0(2)$=traceless hermite matrices.

補空間は一意的ではない. $*\Omega$ で何が生き残るか, そこにどんな代数構造が入るかが問題.$\mathfrak{h}_0(2)J)$ の展開環の問題ではない.

複素係数 ⇒ 実係数

Lemma $\mathfrak{h}_0(2){=}i\mathfrak{su}(2)$ は $[|X,Y|]{=}i[iX,iY]$ で Lie algebra over $\mathbb{R}$.
$\mathfrak{h}(2){=}\mathbb{R}\oplus\mathfrak{h}_0(2)$ も同様

$$\mathfrak{h}(2){=}\left\{\begin{bmatrix} x_0{+}x_3 & x_1{+}ix_2\\ x_1{-}ix_2 & x_0{-}x_3\end{bmatrix}; x_i{\in}\mathbb{R}\right\} \quad = \text{hermite 行列全体}$$

$$\det X{=}x_0^2{-}(x_1^2{+}x_2^2{+}x_3^2), \quad \text{Minkowski-計量}$$

Lorentz 群の作用 $X\to AXA^*$, $A{\in}SL(2,\mathbb{C})$.

実係数で展開環を作り位相完備化するが全体像は不明. 偶数次の hermite $*$-積の元全体となる?

補空間は一意的ではないので要注意. Laplace 変換を使って X^{-1},$\sqrt{X}$ も作る

$\widetilde{Env}.(\mathfrak{h}(2);[|X,Y|])\supset\{u{*}v^{-1},\frac{1}{2}v^2\}$ (Cohen-Rankin, これは Weyl 代数と同形)
さらに $\supset\{x_0{+}x_1u{+}x_2iv{+}\sigma\frac{1}{2\hbar}(u^2{-}v^2);[\ ,\ ]_*\}$ $\quad x_0,x_1,x_2,\sigma\in\mathbb{R}$

mod smoothing elements ?

$A{\in}SU(2)$ の時, 左辺は $A(\mathfrak{h}(2);[|X,Y|])A^{-1}$ で不変だが, 右辺は

$$f(u,v)\to{:}e_*^{\frac{t}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle'_*}*f(u,v)*{:}e_*^{-\frac{t}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle'_*}, \quad \forall g\in S'$$

と変換される. 従って適当に生成元を変換して

$$\{x_0{+}x_1e^{\frac{\pi i}{4}}u{+}x_2e^{-\frac{\pi i}{4}}iv{+}\sigma\frac{1}{2i\hbar}(u^2{+}v^2);[\ ,\ ]_*\}$$

等と考えても良い. これらは実 Lie 環で adjoint inv. な Lorentz 計量が入る. これらの展開環 /$\mathbb{R}$ は $(\mathfrak{h}(2);[|X,Y|])$ の普遍展開環 (/$\mathbb{R}$) 一致はしない. $*$-積で考えるときには「$*$-同形な実 Lie 環の展開環の族」として考えねばならない. Light-cone frame 毎に考えてる感じ.

Lorentz 共変の, Lie 環の族が得られた. 配位空間上の代数が非可換になってる

一つ一つは複素化して展開環を考えて良い.

第二量子化の精神に従えばこれも表現されねばならない、しかし nice expression なので pseudo-vacuum のみが現れる.

擬真空による表現

物理では normal ordering, Weyl ordering しか使わないので, 擬真空は現れない. しかも, これは物理的にはあまり歓迎されない都合の悪い元のようにも見える. しかし, これは conformal field theory につながっている

$\mathfrak{K}_0$-表示 ($e_*^{it\frac{1}{i\hbar}(u\circ v)}$ が 2π 周期となる表示), ($\mathfrak{K}_0 \supset$ Nice Expressions) で

$$\varpi_*(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_*^{it\frac{1}{i\hbar}(u\circ v)}dt, \qquad \text{(冪等元これを擬真空と呼ぶ)}$$

普通の真空と違って, 「消えるもの」「消え残るもの」が違う

$$(u\circ v)*\varpi_*(0)=0=\varpi_*(0)*(u\circ v), \quad \mathbb{C}[u,v]*\varpi_*(0)=(\mathbb{C}[u]+\mathbb{C}[v])*\varpi_*(0)$$

半逆元 $u^{\bullet}=v*(\frac{1}{i\hbar}u*v)_*^{-1}$, $\quad (\frac{1}{i\hbar}u*v)^{-1}=-\int_0^{\infty} e_*^{s\frac{1}{i\hbar}u*v}ds$ を使うと

$$u*u^{\bullet}=1,\ u^{\bullet}*u=1-\overline{\varpi}_{00},\ \overline{\varpi}_{00}*\overline{\varpi}_{00}=\overline{\varpi}_{00},\ u*\overline{\varpi}_{00}=0=\overline{\varpi}_{00}*u^{\bullet},$$

$(u^{\bullet})^k*\overline{\varpi}_{00}*u^{\ell}$ は (k,ℓ)-matrix element.

さらに $:v^n*\varpi_*(0):_K=\alpha_n(K):(u^{\bullet})^n*\varpi_*(0):_K$ 表示依存

正則表現空間は: $\mathbb{C}\{u^{\bullet},u]=\{\cdots,(u^{\bullet})^n,(u^{\bullet})^{n-1},\cdots u^{\bullet},1,u,\cdots,u^n,\cdots\}$

正則表現は両側無限行列だが、正則表現空間が生成する代数は

$$\mathcal{A}=\Big(\mathbb{C}\{u^{\bullet},u]\oplus\{(u^{\bullet})^k*\overline{\varpi}_{00}*u^{\ell};k,\ell\in\mathbb{N}\}\Big)*\varpi_*(0).$$

非可換結合代数 $\mathcal{A}$ で行列環 $\mathcal{M}$ を両側 ideal とするものが得られる.

$$(u^{\bullet})^n=\sum_k (u^{\bullet})^{n+k}*\overline{\varpi}_{00}*u^k, \quad u^n=\sum_k (u^{\bullet})^k*\overline{\varpi}_{00}*u^{n+k}.$$

$\mathbb{C}[z,z^{-1}]$ Laurent polynomials として

$$0\to\mathcal{M}\to\mathcal{A}\to\mathbb{C}[z,z^{-1}]\to 0.$$

As $[\mathcal{M},\mathcal{M}]\subset[\mathcal{A},\mathcal{A}]=\mathcal{M}$, $[\mathcal{M},\mathcal{M}]$ is a Lie ideal of $\mathcal{A}$. As $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, $n>1$, are simple Lie algebras, we see $\mathcal{M}/[\mathcal{M},\mathcal{M}]\cong\mathbb{C}$. The projection $\mathcal{M}\to\mathcal{M}/[\mathcal{M},\mathcal{M}]$ is given by taking the trace. We have a Lie algebra extension of

$$0\to\mathbb{C}\to\mathcal{A}/[\mathcal{M},\mathcal{M}]\to\mathbb{C}[z^{-1},z]\to 0,$$

where $\mathbb{C}[z^{-1},z]$ is viewed as abelian Lie algebra.

記号を少し見やすくして

$$\hat{u}_{-n}=(u^{\bullet})^n, \quad \hat{u}_m=u^m.$$

Consider the linear subspace $\mathcal{A}_0$ in $\mathcal{A}/[\mathcal{A},\mathcal{A}]$, but we denote these as

$$\cdots+a_n\hat{u}_{-n}+\cdots+a_1\hat{u}_{-1}+a_0+b_1\hat{u}_1+\cdots+b_m\hat{u}_m+\cdots \quad \text{(finite sum)}.$$

$\mathcal{A}_0$ generates a meta abelian Lie algebra (free Boson) Lie algebra $\mathbb{C}\oplus\mathcal{A}_0$

$$[|X,Y|]=\mathrm{Tr}[X,Y], \quad [|\mathrm{Tr}[X,Y],Z|]=0, \quad [|\hat{u}_m,\hat{u}_n|]=m\delta_{m+n,0}$$

$$0\to\mathbb{C}\to\mathbb{C}\oplus\mathcal{A}_0\to\mathbb{C}[z^{-1},z]\to 0.$$

Hence $\mathbb{C}\oplus\mathcal{A}_0$ is a central extension of the (abelian) Lie algebra $\mathbb{C}[z^{-1},z]$.

$\mathcal{A}_0$ の展開環 $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ は無限生成の Weyl algebra.

Elements can be expressed univalently as linear combinations of

$$\hat{u}_{-m}^{\alpha_m}\bullet\cdots\bullet\hat{u}_{-1}^{\alpha_1}\bullet\hat{u}_0\bullet\hat{u}_1^{\beta_1}\bullet\cdots\bullet\hat{u}_n^{\beta_n}, \quad \text{(called normal ordering)}$$

by using the commutation relations.

There is a natural homomorphism π of $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ onto $\mathbb{C}[z^{-1},z]$ such that $\mathrm{Ker}\,\pi$ is the ideal $\mathcal{I}$ generated by $[|\widetilde{\mathcal{A}}_0,\widetilde{\mathcal{A}}_0|]$ i.e.

$$0\to\mathcal{I}\to\widetilde{\mathcal{A}}_0\to\mathbb{C}[z^{-1},z]\to 0.$$

The Fock representation of $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ is given by setting the vacuum $|0\rangle$ by $\hat{u}_n|0\rangle=0$ for $n\geq 0$. This is equivalent with $u^n{*}\varpi_{00}=0$.

$SU(2)$-vacuum は壊れやすい！実現しにくい

Generic な表示では $SU(2)$ の one parameter subgroup で　$g^tg\in\tilde{S}^2$ の部分が 3 っに分かれて

$$:e_*^{it\frac{1}{2i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle}:_K=\begin{cases}\text{alternating } 2\pi\text{-periodic} & a<b<0\\ 2\pi\text{-periodic} & a<0<b\\ \text{alternating } 2\pi\text{-periodic} & 0<a<b\end{cases}$$

の全部が現れる.

$a<0<b$ の場合に擬真空表現だった.　他の場合に何が現れるか？

性質がばらばらになるため、これまで 2 項演算できていたものが二項演算できなくなり, いくつかを組み合わせないと演算できなくなる.

Configuration space は物理では、ほとんど「真空表現」の表現空間として現れる．この時使われる「真空」もほとんど拡張された Weyl 代数の中で作られる．

(A): Schrödinger 表現の時に出てくる真空：

$$s \ll 0, \quad \varpi_{00}{=}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_*^{(s+it)\frac{1}{i\hbar}(u\circ v-\frac{1}{2})}dt, \quad (\text{Generic な表示})$$

Cauchy の積分定理より ϖ_{00} は s に無関係となり, 冪等元となる

$$\varpi_{00}{*}\varpi_{00}{=}\varpi_{00}.$$

$$v{*}\varpi_{00}{=}0, \quad {:}u{*}\varpi_{00}{:}_K = 2u{:}\varpi_{00}{:}_K$$

初等量子論（物理）での記号：$\varpi_{00}{=}|0\rangle\langle 0|, \quad |0\rangle{=}$真空,

$\mathbb{C}[u]{*}\varpi_{00}$（表現空間), $\phi(u)|0\rangle =$ 状態 (配位空間上の関数)

(B): (A) の共役 (共役真空)：

$$s \gg 0, \quad \overline{\varpi}_{00}{=}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_*^{(s+it)\frac{1}{i\hbar}(u\circ v+\frac{1}{2})}dt, \quad (\text{Generic な表示})$$

Cauchy の積分定理より $\overline{\varpi}_{00}$ は s に無関係となり, 冪等元となる

$$\overline{\varpi}_{00}{*}\overline{\varpi}_{00}{=}\overline{\varpi}_{00}, \quad u{*}\overline{\varpi}_{00}{=}0,$$

これは, u, v の立場を入れ替えたもので, 物理では Hilbert 内積に関する共役変数をつかったときに使われる．

$\mathbb{C}[v]{*}\overline{\varpi}_{00}$（表現空間)

(C): 複素真空 (Wick-真空)：$\varpi_0{=}\lim_{t\to\infty} e_*^{-tz*\bar{z}}$; (generic な表示)

但し　$z = u{+}iv, \ \bar{z} = u{-}iv, \ [z, \bar{z}]_* = -2\hbar, \quad \bar{z}{*}\varpi_0{=}0$

$\mathbb{C}[z]{*}\varpi_0$（表現空間)

古典的量子論での表現空間はこれに尽きる．全部拡張された Weyl 代数の中で (generic な表示で) 書かれる．

As any automorphism $\psi : \widetilde{\mathcal{A}}_0 \to \widetilde{\mathcal{A}}_0$ leaves $\mathcal{I}$ invariant, ψ must cause an isomorphism of $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$, that is, a holomorphic mapping of $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ onto itself leaving $\mathbb{C}[z^{-1}, z]$ invariant. This is not a Möbius transformation. On the other hand, any derivation $D : \widetilde{\mathcal{A}}_0 \to \widetilde{\mathcal{A}}_0$ satisfies

$$D[|X,Y|]{=}[|DX,Y|]{+}[|X,DY|] \quad \text{and hence} \quad D\mathcal{I} \subset \mathcal{I},$$

D yields a derivation/complex vector field $\tilde{D}$ on $\mathbb{C}[z^{-1}, z]$. Note that $z^{n+1}\partial_z$ is a derivation of $\mathbb{C}[z^{-1}, z]$. The integral curve $\psi_t(z)$ starting at z is given by the differential equation

$$\frac{d}{dt}\psi_t(z){=}(\psi_t(z))^{n+1}, \quad \psi_0(z){=}z.$$

But the solution is

$$\psi_t(z) = \frac{z}{\sqrt[n]{1{-}ntz^n}}, \ (n \geq 1), \quad {=}ze^t, \ (n{=}0), \quad = \sqrt[|n|]{z^{|n|}{-}n^{-1}t}, \ (n \leq -1).$$

These are not in the group $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$, except the case $n = 0$. Exponential functions have multivalued nature in general just like $*$-exponential functions of quadratic forms. It is natural to expect that the Lie algebra of all derivations on $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ generate a *blurred covering group* of $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$, which is known to be $\mathbb{R}_+{\times}2\pi i\mathbb{Z}$.

It is sometimes convenient to introduce the formal sum $J(z)$

(1)
$$J(z){=}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}_n z^{-n-1}, \quad \hat{u}_n{=}\mathrm{Res}_{z=0} z^n J(z).$$

We see

$$[|J(z), J(w)|]{=}\frac{1}{z}\partial_w \sum_{n>0}(\frac{w}{z}){-}\frac{1}{w}\partial_z \sum_{n>0}(\frac{z}{w}).$$

To treat "functions" such as residues, it is convenient to use the notion of formal distributions. This is the notion based on the calculations of residues by regarding Laurent polynomials as "test functions". Formal distributions are used extensively in conformal field theory. Lie bracket in Proposition **??** may be characterized by $\mathrm{Res}(f(z)g'(z))$, or $\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}(e^{im\theta})'e^{in\theta}d\theta$.

Let $L_0{=}-\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}_{-k}{\circ}\hat{u}_k$ where $X{\circ}Y{=}\frac{1}{2}(X{\bullet}Y{+}Y{\bullet}X)$. Then $[|L_0, \hat{u}_m|]_{\bullet}{=}m\,\hat{u}_m$. Hence $L_0 : \widetilde{\mathcal{A}}_0 \to \widetilde{\mathcal{A}}_0$ is a derivation corresponding to $z\partial_z$. Similarly, for every $n \in \mathbb{Z}$, let

(2)
$$L_n{=}-\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}_{n-k}{\circ}\hat{u}_k,$$

Then, we see

$$[|L_n, \hat{u}_m|]{=}m\hat{u}_{m+n}, \quad [|L_{-n}, \hat{u}_m|]{=}m\hat{u}_{m-n}, \quad e.t.c.$$

Hence L_n, $n\in\mathbb{Z}$, are derivations on $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ corresponding naturally to $z^{n+1}\partial_z$. It is easy to see that

$$[|L_k,[|L_\ell,\hat{u}_m|]|]=[|L_\ell,[|L_k,\hat{u}_m|]|]=[|(k-\ell)L_{k+\ell},\hat{u}_m|].$$

Hence $\{\mathrm{ad}(L_n);n\in\mathbb{Z}\}$ is a representation of the Lie algebra $\mathbb{C}[z,z^{-1}]\partial_z$ of all Laurent polynomial vector fields.

However, note that

$$\begin{aligned}L_n{\bullet}L_{-n}-L_{-n}{\bullet}L_n &= \frac{1}{4}\sum_{k,\ell}(\hat{u}_{-k}{\circ}\hat{u}_{k+n}){\bullet}(\hat{u}_{-(\ell+n)}{\circ}\hat{u}_\ell)-\frac{1}{4}\sum_{k,\ell}(\hat{u}_{-(\ell+n)}{\circ}\hat{u}_\ell){\bullet}(\hat{u}_{-k}{\circ}\hat{u}_{k+n})\\ &=2nL_0-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\hat{u}_{-k}{\bullet}\hat{u}_k=2nL_0-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}k(n-k).\end{aligned}$$

Thus,

$$[|L_n,L_{-n}|]_{\bullet}=2nL_0+\frac{1}{12}(n-1)n(n+1). \tag{3}$$

It is easy to see that if $n+m\neq 0$, then $[|L_n,L_m|]_{\bullet}=(n-m)L_{n+m}$.

This implies that L_n, $n\in\mathbb{Z}$, generates a Lie algebra which is nontrivial central extension of $\mathbb{C}[z,z^{-1}]\partial_z$. $\mathbb{C}[z,z^{-1}]\partial_z$ is called the Witt Lie algebra in the conformal field theory. Denoting $\mathbb{C}[z,z^{-1}]\partial_z$ by $\mathfrak{g}$ for simplicity, any central extension of $\mathfrak{g}$ is caused by a Chevalley 2-cocycle ω, i.e. skew-symmetric bilinar form $\omega:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$ such that $d\omega=0$, that is,

$$\sum_{cyclic}\omega(X,[Y,Z])=0,\quad [|X,Y|]=[X,Y]+\omega(X,Y).$$

The Chevalley 2-cohomology group of the Witt Lie algebra is known to be 1 dimensional. The standard one is known as the Virasoro Lie algebra given by

$$[L_n,L_m]=(n-m)L_{n+m}+\frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0}. \tag{4}$$

Denote this Lie algebra by $Vir(c)$. Note here that there is no obstruction to restrict our system to the real coefficients.

$(\mathfrak{h}(2);[|X,Y|])$ の普遍展開環

この展開環は 2×2-Hermite 行列の基底を Pauli-matrix を使って

$$I{=}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \sigma_1{=}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \sigma_2{=}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\quad \sigma_3{=}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

としたとき, $I^2{=}I$, $\sigma_i^2{=}I$ 等にはならず, 単に I を center とし, 関係式

$$\sigma_1{*}\sigma_2-\sigma_2{*}\sigma_1{=}2\sigma_3,\ \ \sigma_2{*}\sigma_3-\sigma_3{*}\sigma_2{=}2\sigma_1,\ \ \sigma_3{*}\sigma_1-\sigma_1{*}\sigma_3{=}2\sigma_2,$$

で生成される非可換無限次元結合代数である. $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ と同形の Lie 環だから, 上の展開環は $\zeta{=}\sigma_1^2{+}\sigma_2^2{+}\sigma_3^2$ を center に持つ.

$$(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C});[\ ,\ ]_{mat})\cong(\text{斉次 2 次式 }Q(u,v);[\ ,\ ]_{*})$$

だから,

$$he_1{=}\frac{1}{i\hbar}u{\circ}v,\ \ he_2{=}\frac{1}{2\hbar}(u^2{+}v^2),\ \ he_3{=}\frac{1}{2i\hbar}(u^2{-}v^2),$$

は $\mathfrak{K}_{re}$-表示に限らず, 任意の表示で $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ と同じ交換関係を満たす:

$$[he_1,he_2]_*{=}2he_3,\quad [he_2,he_3]_*{=}2he_1,\quad [he_3,he_1]_*{=}2he_2.$$

従って位相環として適宜拡大したところで $e^{t(\sigma_3\pm i\sigma_1)}$ とラプラス変換で

$$(\sigma_3{+}i\sigma_1)^{1/2}{=}\frac{1}{\sqrt{2i\hbar}}(u{+}iv),\quad (\sigma_3{-}i\sigma_1)^{1/2}{=}\frac{1}{\sqrt{2i\hbar}}(u{-}iv)$$

から u,v を求めれば ($\mathfrak{K}_{re}$-表示で求められる筈)

$$[u{+}iv,u{-}iv]_*{=}c(I,\zeta)\in\text{center}(\text{この表示は重要らしい}),$$

$$\frac{1}{i\hbar}[\sigma_2,u{+}iv]{=}i(u{+}iv),\quad \frac{1}{i\hbar}[\sigma_2,u{-}iv]{=}-i(u{-}iv).$$

$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}{=}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-pt}dt$

上の Lie 環を持つ Lie 群がそのまま Lie 環上に群構造を定義して得られる. しかもこれには adjoint invariant な Minkowski metric が入る. さらにこの計量は原点では $\mathfrak{h}(2)$ 上のものと一致する. 従って上は「$*$-同形な Lie 群の族」と思えるが, これは light-cone frame に対応している.

Polar element ε_{00} の分裂

これまでは主に $\mathfrak{K}_{re}$ という表示で考えてきた．ところが次のような表示 (これは $\mathfrak{K}_s$ に近い)

$$\mathfrak{K}_{im}=\begin{bmatrix} i\rho & c' \\ c' & \rho \end{bmatrix}, \quad \rho>0,\ c'=c+i\theta,\ c\in\mathbb{R}, \quad \theta\neq 0 \quad \text{but small.}$$

のもとでは ε_{00} にあたるものが３っつに分裂する

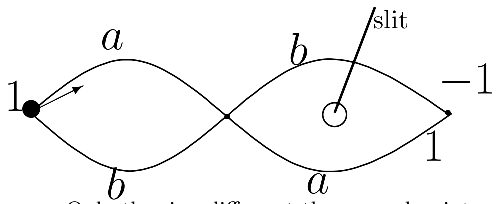
定理. $\mathfrak{K}_{im}$-表示のもとで S' は３っつの開集合 S'_0, S'_+, S'_- で $S'=\overline{S'_0\cup S'_+\cup S'_-}$ に　分裂し，

$$\begin{cases} g\in S_0 & e_*^{2\pi\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle}=1: \quad \text{特異点は実軸の両側} \\ g\in S_+ & e_*^{2\pi\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle}=-1: \quad \text{特異点は実軸の上２列} \\ g\in S_- & e_*^{2\pi\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}g,\boldsymbol{u}g\rangle}=-1: \quad \text{特異点は実軸の下２列} \end{cases}$$

のようになる．これらはすべて one parameter group に乗っているから、その square root を上から，ε_0, ε^*, ε' と書く．　($g\in$\{ 境界線 \} だと one parameter gr. は特異点を持つ.)

$$(\varepsilon_0)^2=1, \quad (\varepsilon^*)^2=-1, \quad (\varepsilon')^2=-1$$

なのに，(完全に証明をつけてはいないが......) $(\varepsilon^*)^{-1}=\varepsilon'$ 特異点の列が実軸に対して同じ方向に出ることから，Cauchy の積分定理で示せる．



Only the sign differs at the crossed point

一見，これは矛盾にみえるが、特異点が分岐特異点な為に起こる現象で，この為一般の表示では ε_{00} は２価の元としてしか扱えないという現象が起こっていたし，２価の元のままで「群」の計算をすると，$SU(2)$ の double cover や，metaplectic group の「複素化」が現れて，これも捨てがたいのであるが，表示を制限して１価で扱うと、どうしてもこのようなことが起こるのである．

これを２項演算の要素としては使えない元が混在していると見る

ε_0, ε^*, ε' を要素とする代数系は作れない．しかし.....

(1) ε_0 を載せている $e_*^{t\frac{1}{2i\hbar}(u^2+v^2)}$ を使うと「擬真空」$\varpi_*(0)$ が作れる

(2) ε^* を載せている $e_*^{it\frac{1}{2i\hbar}(u^2-v^2)}$ を使うと「Schrödinger 真空」ϖ_{00} が作れる

(3) ε' を載せている $e_*^{it\frac{1}{i\hbar}u\circ v}$ を使うと「共役真空」$\overline{\varpi}_{00}$ が作れる

それぞれ正則表現が作れる.(各論にはそれぞれ数学的専門家がいて難解)　しかし全部一緒にしないと相対論的にならない．($\mathfrak{h}$; [| , |]) の項を思い出せ.)

Gauge 理論は理解できていないので, 以下はあてずっぽうだが......

ε_0, ε^*, ε' の平方根を e_1, e_2, e_3 とする.

これは $\mathfrak{K}_{re}$-表示のときは４元数群を生成していたものだが, ここでは２項演算の要素にはなれない.

ところが, これらのいくつか (e.g. ３っつ) を組み合わせると２項演算に使えるのである.

Gauge 理論による相互作用の書き方

Gauge 理論では, 2つの場の相互作用は、それぞれの場を最小作用で生み出すLagrangean の和を考え, その変分の式より導く.

Minkowski 計量に関する Hodge $\star$

$$\delta\int_{\mathfrak{h}}(\|F\wedge\star F\|+\Phi\Phi^{*})d\mu=0$$

なる式を相互作用を定義する式としてもよいのかもしれない. しかし, これでは表示による違いがほとんど書きこめないうらみがある. 理由の一つは、被積分関数がほとんどの場合「エネルギー」と解釈されているものでなので, これが表示依存となるのは考えにくいためである. 「表示の物理的意味」を知りたい立場 (これが僕の原点だった) からは極めて不満である.(僕の軸足はあくまで「数学」の上にある. fiber が無限次元であることにも注意)

一方、Guage 原理は数学的には怖いことも言っていて, すべてを $U(1)$-bundle 上で考えると $e_*^{t(1+i\theta)\frac{1}{i\hbar}Q(u,v)}$ のように実軸に対し斜めに進む one parameter group も考慮しなければならなくなる.

すると, 分岐特異点の周りの「slit の壁」を通過する one parameter gr. が沢山現れるから, むしろこれで粒子の「生成消滅」「寿命」を考えたくなる.

何を考えれば物理になるのかが問題だが, 「特異点の周りでの挙動」,「時間の取り扱い」が問題になるだろう.

素粒子の理論とは？

素粒子はそれが満たす「場の方程式」の形で述べられ, その性質は電磁場との相互作用、他の粒子との相互作用、及び式の対称性で述べられる.

この考えだと ε_{00} のような元は $X = g\,{}^t g \in S^2 = SU(2)/SO(2)$ として

$$(i\partial_t + \frac{1}{\hbar}\partial_X) e_*^{\delta_\pi(t)\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}X, \boldsymbol{u}\rangle} = \delta'_\pi(t) e_*^{\delta_\pi(t)\frac{1}{i\hbar}\langle \boldsymbol{u}X, \boldsymbol{u}\rangle}, \quad X \in S^2 = SU(2)/SO(2)$$

という式を満たす粒子と解釈すべきものとなる. Fourier 変換は $\varepsilon_{00}\delta_0$ だが, これは light-cone の縁全体に support を持つものと理解したい (どうすれば数学的になるか？).

ε_0, ε^*, ε' の平方根が e_1, e_2, e_3 であった. これらも単独では２項演算の要素にはなれないものであった.

これに対し, ある「観察実験」(単なる冷やかし) をやってみたので、次にそれを載せよう：

素粒子の性質を特定するには、相互作用などを「観測」する. 相互作用の記述には結局何かの代数演算を使う.

２項演算できないものは、観測できない.

素粒子, 合成粒子

Fermion: (Clifford 代数で記述されるもの)

レプトン: 電子 (e_-, e_+), ニュートリノ (μ, ν, τ)

これらは単独で観測されている??

Quark: u, d, s, c, b, t, 及びこれらの反粒子 (これらは単独で観測されない.)

合成粒子: (中間子 (meson)) quark∗anti-quark (どれを組み合わせてもよい)

合成粒子: (バリオン) 3っつの quark の組み合わせ.

陽子 (uud), 中性子 (udd), $\Lambda(uds)$, $\Sigma(uuc, udc, ddc)$, etc.......

Boson: (Weyl 代数で記述できるもの)

(拡張された Weyl の中に Clifford もはいるし, 無限生成の Clifford 代数の中には Weyl 代数もはいる.)

光子 (photon), W-boson, Z-boson

グルオン (quark をくっつける糊)

Higgs Boson (理論的には質量 0 である guage 粒子に質量を与えるもの, この trick を Higgs-機構と呼ぶらしい.) (ほとんど「神学」としか言いようのない「宇宙開闢時の」「自発的対称性の破れ」で説明するので, 「神の粒子」と呼ばれるらしい. しかし,「最小作用の法則」が、かつて「神学」と呼ばれたことから考えると、変分原理による説明はいつでも「絶対者」を念頭に置いたものになるということは考えるべきことであり、この部分に「哲学的批判」は加えられるべきであると思う.)

Internet のブログで、「Quark 5個からなる新粒子発見」(大阪大学核物理研究センター教授, 中野貴志) というのを見つけた. このような exotic baryon の探求はかなり行われているものらしい.

演算の機構

ε_0, ε^*, ε' の平方根が e_1, e_2, e_3 であったから, これらは one parameter group 上に乗っているから, $t = 0$ からの径路を特異点を回避して決めれば一意的に計算可能なものである.

要素を考えるときには、原点までの path を同時に考えていないと不定性がでるので、∗-積を定義するときも原点までの path を考えて定義しないと一意的に定義できない。これでは、実際的でない。原点までの path をかなり限定して (使う path を格子として限定) それによる積を考えることにする。この格子は近似計算のための格子ではないので、slits との位置関係さえ保てば topological な変更は自由である.

したがって, すべてを path 付き (始点, 終点付き) で表示して path-cnnected product で扱えば groupoid として「演算は原理的には可能」となる.