Heisenberg algebra の真空表現

大森 英樹

Weyl algebra $(W_{2m}[\hbar];*)$ over $\mathbb{C}$

$\boldsymbol{u}$=$(u_1,\cdots,u_m,v_1,\cdots,v_m)$, $[u_i,v_j]=-i\hbar\delta_{ij}$, where $\hbar>0$.

Heisenberg algebra $(\mathcal{H}_{2m}[\nu];*)$ over $\mathbb{C}$

$\boldsymbol{u}$=$(u_1,\cdots,u_m,v_1,\cdots,v_m)$, $[u_i,v_j]=-i\nu\delta_{ij}$, $\nu\in$ center.

ほとんど、同じようなもので、特に、ν を可逆元としたときには同型として扱っても良いが、自己同型写像に違いがでる。

1 径数変換群 を次で定義：$E_t:\mathcal{H}_{2m}[\nu]\to\mathcal{H}_{2m}[\nu,\nu^{-1}]$

$$E_t(\nu)=e^{2t}\nu,\quad E_t(u_i)=e^tu_i,\quad E_t(v_i)=e^tv_i,\quad i=1,\dots,m,\quad t\in\mathbb{R}.$$

E_t は自己同型 $E_t:\mathcal{H}_{2m}[\nu,\nu^{-1}]\to\mathcal{H}_{2m}[\nu,\nu^{-1}]$

これは Weyl algebra $W_{2m}[\hbar]$ の自己同型ではない。

無限小生成元を $D=\frac{d}{dt}E_t\Big|_{t=0}$ とすれば,

$$D(\nu)=2\nu,\quad D(u_i)=u_i,\quad D(v_i)=v_i,\quad i=1,\dots,m.$$

Suppose D is given by (virtual) Hamiltonian τ:

$$D=\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(\frac{1}{i}\tau).$$

τ を Heisenberg algebra $\mathcal{H}_{2m}[\nu,\nu^{-1}]$ に添加する（以下のように置く）

$$[i\tau,\nu]=-2\nu^2,\quad [i\tau,u_i]=-\nu{*}u_i,\quad i=1,\dots,2m. \tag{1}$$

特に $[\nu^{-1},\tau]{=}2i$ （正準共役）

この system は微分幾何で言う接触構造の局所的標準形を Deformation quantization したときに現れる。τ は接触多様体の局所座標関数 (時間座標) として現れる。

E_t-不変な元で作る代数 $\mathcal{A}$ を考え、その行列表現を作りたい.

量子論では変数を束縛するというのは自由ではないが、これは $S^{2m-1}{=}\{\sum_{k=1}^m(u_k^2{+}v_k^2){=}1\}$ なる曲面で考えていることに対応する。このような奇数次元で接触構造は現れる。

この代数は $E_t\rho{=}e^t\rho$ なる可逆元があれば、次で生成される：

$$\rho^{-2}{*}\nu,\ \ \rho^{-1}{*}u_1,\cdots,\rho^{-1}{*}u_m,\ \ \rho^{-1}{*}v_1,\cdots,\rho^{-1}{*}v_m \tag{2}$$

これらは 自己共役作用素 の中では極めて考えにくい
$e_*^{it\tau}$, $t \in \mathbb{R}$ one parameter group of unitary operators とすると
$A_t{=}e_*^{it\tau}{*}\nu^{-1}{*}e_*^{-it\tau}$ satisfies the equation

$$\frac{d}{dt}A_t{=}\mathrm{ad}(i\tau)A_t, \quad A_0{=}\nu^{-1}.$$

ところが $[\nu^{-1},\tau]{=}2i$ なのだから,

$$e_*^{it\tau}{*}\nu^{-1}{*}e_*^{-it\tau}{=}e^{t\mathrm{ad}(i\tau)}\nu^{-1}{=}\nu^{-1}{+}2t{=}\nu^{-1}(1{+}2\nu t).$$

すると $\nu^{-1}{+}2t$ となって、 これが $\forall t{\in}\mathbb{R}$ で可逆. これは $i\nu$ self-adjoint に反する.

一方 $\rho_*^2{=}\sum_{i=1}^m(u_i^2{+}v_i^2)$ のようなものとしてみると、
$[\tau,\rho_*^2{*}\nu^{-1}]{=}0$ なのだから、$[\tau,\rho_*^2]{*}\nu^{-1}{+}\rho_*^2 2i{=}0$,

$$[i\tau,\rho_*^2]{=}2\nu{*}\rho_*^2, \quad [i\tau,[i\tau,\rho_*^2]]{=}0, \quad \cdots.$$

つまり、方定式

$$\frac{d}{ds}e_*^{is\tau}{*}\rho_*^2{*}e_*^{-is\tau}{=}\mathrm{ad}(i\tau)e_*^{is\tau}{*}\rho_*^2{*}e_*^{-is\tau}$$

の実解析解は $e_*^{is\tau}{*}\rho_*^2{*}e_*^{-is\tau}{=}(1{+}2\nu t){*}\rho_*^2$.

これを書き直すと $\rho_*^{-2}{*}e_*^{is\tau}{*}\rho_*^2{=}(1{+}2\nu s)e_*^{is\tau}$.
i.e. $\mathrm{Ad}(\rho^{-2})$ は固有値 $(1{+}2\nu s)$, $\forall s$, の固有ベクトル $e_*^{is\tau}$, $\forall s$, を持つ。

これらは数学的矛盾というわけではなく、物理の要請に合わないということ

一方, Deformation Quantization という (気楽な) Theory があって, ここでは作用素表現を経由しないで量子化を考える。(作用素表現は最後。)

自由にワイル代数 $W_{2m}[\hbar]$ を位相両側 $W_{2m}[\hbar]$-加群に拡張する.

$\sqrt[*]{\sum_{i=1}^m(u_i^2{+}v_i^2)}$ といったものも代数的に無理なく考えられればそれで良いというような考え方をする。

どんなことをすればよいのかを大急ぎで、ざっと解説する：
量子化したい幾何構造を Heisenberg の要請にあわせてある結合代数の中に埋め込む。

1 μ-regulated algebra

$(\mathcal{A};*)$ 位相 結合 代数 with 1 over $\mathbb{C}$. $\mathcal{A}$ が μ-制御代数であるとは,
$\exists\mu\in\mathcal{A}$, called a *regulator*, and $(\mathcal{A},\mu)$ satisfies the following:

(A.1) $[\mu,\mathcal{A}]\subset\mu{*}\mathcal{A}{*}\mu$.

(A.2) $[\mathcal{A},\mathcal{A}]\subset\mu{*}\mathcal{A}$. ($\mathcal{A}$ が modulo μ で可換.)

(A.3) $\exists B$ (閉部分空間) such that $\mathcal{A}=B\oplus\mu{*}\mathcal{A}$ (位相直和).

(A.4) 写像 $a\to\mu{*}a$, $a\to a{*}\mu$ が $\mu{*}:\mathcal{A}\to\mu{*}\mathcal{A}$, $\;{*}\mu:\mathcal{A}\to\mathcal{A}{*}\mu$ とみて線形同型

By the properties (A.3), (A.4), $\mathcal{A}$ is decomposed for every N into

$$\mathcal{A}=B\oplus\mu{*}B\oplus\cdots\oplus\mu^{N-1}{*}B\oplus\mu^{N}{*}\mathcal{A}. \tag{3}$$

We set $\mathcal{A}^{-\infty}{=}\bigcap_k\mu^k{*}\mathcal{A}$. Then, $\mu\notin\mathcal{A}^{-\infty}$.

これの最初の方の項にいろんな微分幾何的構造が出せる。

$\forall a,b\in B$ について, (3) の分解で

$$a*b\sim\sum_{k\geq 0}\mu^k*\pi_k(a,b),\quad \pi_k(a,b)\in B. \tag{4}$$

$\pi_0(a,b)=a{\cdot}b$ は可換結合代数を与える, π_1 の歪対称部分 π_1^- は biderivation $B\times B\to B$ となる. $\pi_1^-(a,b){=}\{a,b\}$ と書いて Poisson bracket product と言う.

The property (A.4) permits us to join the inverse μ^{-1} to the algebra $\mathcal{A}$. By setting $\mu{*}\mu^{-1}{=}\mu^{-1}{*}\mu{=}1$ and $[\mu^{-1},a]{=}-\mu^{-1}{*}[\mu,a]{*}\mu^{-1}$, $\mathrm{ad}(i\mu^{-1})$ gives a derivation of $\mathcal{A}$, and it is decomposed as

$$\mathrm{ad}(i\mu^{-1})(a)=\xi_0(a)+\mu{*}\xi_1(a){+}\cdots{+}\mu^k{*}\xi_k(a){+}\cdots,\quad a\in B \tag{5}$$

where ξ_0 is a derivation of $(B,\cdot)$. Hence ξ_0 is viewed as a vector field, which is called the 特性ベクトル場. The parameter of its integral curves is often viewed as the "time" in differential geometry.

Similarly, $(A.2)$ shows that $\mathrm{ad}(a{*}\mu^{-1})$ is an outer derivation of $\mathcal{A}$ for every $a{\in}\mathcal{A}$, and $(\mathcal{A}{*}\mu^{-1},[\ ,\ ])$ forms a Lie algebra over $\mathbb{C}$ containing $(\mathcal{A},[\ ,\ ])$ as a Lie ideal. The quotient Lie algebra $\mathcal{A}{*}\mu^{-1}/\mathcal{A}$ is called the Jacobi algebra whose bracket product is given by

$$\{f,g\}_c{=}f\xi_0(g){-}g\xi_0(f){+}\{f,g\},\quad f,g\in B.$$

ある幾何構造を含むように μ-制御代数が作れたとき、その幾何構造は量子化できたという。そして、この代数の真空表現というのを考える。

ρ^{-1} をどうやって作るか？　　$\rho^{-1}{=}i\int_{-\infty}^{0} e_*^{it\rho}dt$　　指数関数があれば都合がよい.

代数を超越的に拡張する（積公式の拡張）

$\boldsymbol{u}{=}(u_1,\cdots,u_m,u_{m+1},\cdots,u_{2m}){=}(\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde{\boldsymbol{v}})$.

$\forall K{\in}\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(2m)$, we set $\Lambda{=}K{+}J$, $J{=}\left[\begin{smallmatrix}0 & -I_m\\ I_m & 0\end{smallmatrix}\right]$.

多項式の空間 $\mathbb{C}[\boldsymbol{u}]$ に積 $*_{_K}$ を次で定義

$$f *_{_K} g = f e^{\frac{i\hbar}{2}(\sum \overleftarrow{\partial_{u_i}}\Lambda^{ij}\overrightarrow{\partial_{u_j}})} g = \sum_k \frac{(i\hbar)^k}{k!2^k}\Lambda^{i_1j_1}\cdots\Lambda^{i_kj_k}\partial_{u_{i_1}}\cdots\partial_{u_{i_k}}f\ \partial_{u_{j_1}}\cdots\partial_{u_{j_k}}g, \qquad (6)$$

$\hbar>0$. $K{=}0$ の時, 積公式 (6) は **Moyal 積公式**と呼ばれる. $\forall K$ で、代数はワイル代数と同型。

ここでは一次式の指数関数は自由に作れる

$$\frac{d}{dt}{:}f_t{:}_{_K}{=}{:}H_*{:}_{_K}*_{_K}{:}f_t{:}_{_K}, \quad {:}f_0{:}_{_K}{=}1.$$

$${:}e_*^{\frac{1}{i\hbar}\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u}\rangle}{:}_K{=}e^{\frac{1}{4i\hbar}\langle\boldsymbol{\xi}K,\boldsymbol{\xi}\rangle}e^{\frac{1}{i\hbar}\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u}\rangle}$$

$\frac{1}{4i\hbar}\langle\boldsymbol{\xi}K,\boldsymbol{\xi}\rangle{=}-\frac{1}{4\hbar}\langle\boldsymbol{\xi}(iK),\boldsymbol{\xi}\rangle$ だから Re(iK) positive def. (Siegel-class) なる表示は極めて都合が良い.

これを使うこともあるが、Generic な K で微分方定式を解いて指数関数を定義

$$(\frac{1}{i\hbar}\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle)_*^{-1}{=}\int_{-\infty}^{0} e_*^{t\frac{1}{i\hbar}\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle}dt$$

${:}e_*^{t\frac{1}{i\hbar}\sum_i(u_i^2+v_i^2)}{:}_{_K}$ も急減小 ($e^{-c|t|^m}$ のオーダー).

$$\frac{1}{\sqrt[*]{\sum_i(u_i^2{+}v_i^2)}}{=}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{t}}e_*^{t\frac{1}{i\hbar}\sum_i(u_i^2+v_i^2)}dt$$

可逆な 1 次の元はこのようにして簡単に得られるので、こういう元が定義できるところまで代数を拡張して μ-制御代数を作って、それの真空表現なるものを作る。

1.1 Abstract vacuums

$\boldsymbol{u}{=}(\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde{\boldsymbol{v}})$, $\boldsymbol{x}{=}(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{y}})$ という記号で

$$:\!\delta_*(\boldsymbol{u}{-}\boldsymbol{x})\!:_{{}_K}= \int_{\mathbb{R}^{2m}} :\!e_*^{\frac{1}{i\hbar}\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}\rangle}\!:_{{}_K} d\!\!\!{}^-\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{\sqrt{\det iK}}e^{-(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x})\frac{1}{iK}{}^t(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x})}$$

$$:\!\delta_*(\tilde{\boldsymbol{u}}{-}\tilde{\boldsymbol{x}})\!:_{{}_K}= \int_{\mathbb{R}^{m}} :\!e_*^{\frac{1}{i\hbar}\langle\tilde{\boldsymbol{\xi}},\tilde{\boldsymbol{u}}-\tilde{\boldsymbol{x}}\rangle}\!:_{{}_K} d\!\!\!{}^-\tilde{\boldsymbol{\xi}}=\frac{1}{\sqrt{\det iK_{\bullet\bullet}}}e^{-(\tilde{\boldsymbol{u}}-\tilde{\boldsymbol{x}})\frac{1}{iK_{\bullet\bullet}}{}^t(\tilde{\boldsymbol{u}}-\tilde{\boldsymbol{x}})}$$

も急減少で，しかも、$\delta_*(\tilde{\boldsymbol{v}}){*}\delta_*(\tilde{\boldsymbol{u}})$ は

$$v_i{*}\delta_*(\tilde{\boldsymbol{v}}){*}\delta_*(\tilde{\boldsymbol{u}})=0=\delta_*(\tilde{\boldsymbol{v}}){*}\delta_*(\tilde{\boldsymbol{u}}){*}u_j, \quad \text{(半分を消す)}$$

$$(\delta_*(\tilde{\boldsymbol{v}}){*}\delta_*(\tilde{\boldsymbol{u}})){*}(\delta_*(\tilde{\boldsymbol{v}}){*}\delta_*(\tilde{\boldsymbol{u}}))=\delta_*(\tilde{\boldsymbol{v}}){*}\delta_*(\tilde{\boldsymbol{u}}), \quad \text{(冪等元)}$$

$$(\delta_*(\tilde{\boldsymbol{v}}){*}\delta_*(\tilde{\boldsymbol{u}})){*}\mathcal{A}{*}(\delta_*(\tilde{\boldsymbol{v}}){*}\delta_*(\tilde{\boldsymbol{u}}))=\mathbb{C}\delta_*(\tilde{\boldsymbol{v}}){*}\delta_*(\tilde{\boldsymbol{u}})$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}^{\alpha}{*}(\delta_*(\tilde{\boldsymbol{v}}){*}\delta_*(\tilde{\boldsymbol{u}})){*}\tilde{\boldsymbol{v}}^{\beta} \quad \text{の形で行列要素が得られる。}$$

普通はエネルギーの最低基底状態を真空と呼ぶらしいが $\mathrm{ad}(\mu^{-1})$ が semi-bounded でなくても行列表現を考えたいので、ここでは．たんに $\varpi{\in}\mathcal{A}$ で

$$\varpi{*}\varpi{=}\varpi, \quad \varpi{*}\mathcal{A}{*}\varpi{=}\mathbb{C}{*}\varpi. \tag{7}$$

のものを **abstract vacuum** と呼ぶ.

ϖ が abstract vacuum で $\varpi{*}g{*}\varpi{=}\lambda_g\varpi$, $\lambda_g\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ なら $\lambda_g^{-1}g{*}\varpi$ も abstract vacuum.

It is remarkable that an abstract vacuum exists only in $\mathcal{A}^{-\infty}$, i.e $\mathcal{A}$ non-formal .

Standard abstract vacuum. ϖ に対して $x_i{*}\varpi{=}0$ または $\varpi{*}x_i{=}0$ となる元だけで $\mathcal{A}$ が生成されている場合. (そうでないのもある called a pseudo-vacuum.)

1.2 Divisor の添加による局所化

ある 1 次式の逆元を添加する場合。

$\rho{=}u_1$ とし、これの逆元 $u_{1\circ}^{-1}$ を添加することで、$\mathcal{A}$ を考える。

すると (2) で生成される代数 $\mathcal{A}$ は（$*_{_K}$, $:\,:_{_K}$ are omitted)

$$u_{1\circ}^{-2}{*}\nu,\;\; u_{1\circ}^{-1}{*}v_1,\;\; u_{1\circ}^{-1}{*}u_2,\; \cdots,\; u_{1\circ}^{-1}{*}u_m,\;\; u_{1\circ}^{-1}{*}v_2,\; \cdots,\; u_{1\circ}^{-1}{*}v_m. \tag{8}$$

で生成される。記号を単純化して上を以下のように置く:

$$\mu,\;\; \tau,\;\; \tilde{u}_k,\;\; \tilde{v}_k,\;\; k{=}2{\sim}m$$

$\mathcal{A}$ の基本関係は

$$[\mu^{-1},\tau]{=}2i,\quad [\tilde{u}_i,\;\tilde{v}_j]{=}\mu i\delta_{ij},\quad [\tau,\tilde{u}_i]{=}\mu i\tilde{u}_i,\quad [\tau,\tilde{v}_i]{=}\mu i\tilde{v}_i,\quad \text{all others } 0.$$

これの真空表現を作りたいのだが........

Proposition 1.1 ここでは、*abstract vacuum* のようなものが見つけにくい。

Proof. Suppose there is a standard abstract vacuum ϖ in $\varpi\in\mathcal{H}_{2m}[\mu,u_1,\tau]$. It follows $\varpi{*}u_1{=}0$ or $u_1{*}\varpi{=}0$. Hence we have $\frac{d}{ds}\varpi{*}e_*^{su_1}{*}\varpi{=}0$ and hence $\varpi{*}e_*^{su_1}{*}\varpi{=}\varpi$. Now recall the formula

$$u_{1\circ}^{-1}{*}u_{1\circ}^{-1}{=}\int_{-\infty}^{0}2s{:}e_*^{su_1}{:}_{_K}ds.$$

Using this we have

$$\varpi{*}u_{1\circ}^{-1}{*}u_{1\circ}^{-1}{*}\varpi{=}\varpi*\int_{-\infty}^{0}2se_*^{su_1}{*}\varpi ds{=}\int_{-\infty}^{0}2s\varpi{*}e_*^{su_1}{*}\varpi ds{=}\infty\varpi.$$

It follows $\varpi{*}\mu{*}\varpi{=}\infty\varpi$. □

指数関数を積分した元を使って逆元を作っているせいで、「真空」を見つけにくい.

1.3 Heisenberg algebra embedded in Weyl algebra

そこで $\mathcal{A}$ を 2 次元高い所に埋め込むことを考える

$$x_0, x_1, \cdots, x_m, y_0, y_1, \cdots, y_m \tag{9}$$

Weyl algebra $(W_{2m+2}[\hbar], *)$, $[x_i, y_j] = -i\hbar\delta_{ij}$ を超越的に拡張した代数 $(\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^{2m+2}, *_{_K})$ を作って Heisenberg algebra $\mathcal{H}_{2m}[\nu]$ をそこに埋め込む。

ここで、まづ $*$-指数関数 $e_*^{ty_0}$ を作る. 指数法則は $e_*^{sy_0}{*}e_*^{ty_0}{=}e_*^{(s+t)y_0}$.

$\mu = \hbar{*}e_*^{-2y_0}$ と置く. 指数法則と K-表示と積公式で

$$\hbar{*}e_*^{-2y_0}{*} : \mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^{2m+2}) \to \mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^{2m+2})$$

は線形同型がわかる.

次のように置く

$$\mu = \hbar e_*^{-2y_0}, \quad \tau = \frac{1}{2}(e_*^{-2y_0}{*}x_0{+}x_0{*}e_*^{-2y_0}), \quad \tilde{u}_i = e_*^{-y_0}{*}x_i, \quad \tilde{v}_i = e_*^{-y_0}{*}y_i, \quad i = 1 \sim m.$$

生成された代数を $\widetilde{\mathcal{H}}_{2m}[\mu, \tau]$ とする.

$$[e_*^{-2y_0}, x_0] = -2i\hbar e_*^{-2y_0}{=} -2i\mu, \quad \tau = e_*^{-2y_0}{*}(x_0{+}i\hbar){=}(x_0{-}i\hbar){*}e_*^{-2y_0}$$

これらを使うと

$$[\tau, \mu] = 2i\mu_*^2, \quad [\mu, \tilde{u}_i]{=}0, \quad [\mu, \tilde{v}_i]{=}0, \quad [\tau, \tilde{u}_i] = \mu i{*}\tilde{u}_i, \quad [\tau, \tilde{v}_i] = \mu i{*}\tilde{v}_i, \quad [\tilde{u}_i, \tilde{v}_j] = -i\mu\delta_{ij}. \tag{10}$$

Theorem 1.1 *$\mathcal{H}_{2m}[\mu]$ is isomorphic to the subalgebra of $\widetilde{\mathcal{H}}_{2m}[\mu, \tau]$ where μ corresponds to $\hbar e_*^{-2y_0}$, and $\frac{1}{2}(e_*^{-2y_0}{*}x_0{+}x_0{*}e_*^{-2y_0})$ is its canonical conjugate.*

$\widetilde{\mathcal{H}}_{2m}[\mu, \tau]$ は (A.1)∼(A.4) を充たす。（量子化された接触代数。）

ここでは Abstract vacuums も見つけられる
Let

$$\widetilde{\varpi}(L_0){=}\varpi_{00}{*}\widetilde{\varpi}(L){=}\varpi_{00}{*}\prod_{k=1}^{m}{*}\varpi_{00}(k), \quad \widetilde{\varpi}(\overline{L}_0){=}\overline{\varpi}_{00}{*}\widetilde{\varpi}(L){=}\overline{\varpi}_{00}{*}\prod_{k=1}^{m}{*}\varpi_{00}(k), \tag{11}$$

where $\varpi_{00}(k){=}\lim_{t\to-\infty} e_*^{t\frac{1}{i\hbar}x_k\circ y_k}$, $\quad \overline{\varpi}_{00}{=}\lim_{t\to\infty} e^{t\frac{1}{2}}e_*^{t\frac{1}{i\hbar}x_0\circ y_0}$. These have properties as follows:

$$y_k{*}\widetilde{\varpi}(L_0){=}0, \ (k{=}0{\sim}m), \quad x_0{*}\widetilde{\varpi}(\overline{L}_0){=}0{=}\widetilde{\varpi}(\overline{L}_0){*}y_0, \ y_k{*}\widetilde{\varpi}(\overline{L}_0){=}0, \ (k{=}1{\sim}m).$$

2 $e_*^{it\mu_*^{-1}}$, $e_*^{it\tau}$ はどうなるか？

すると、行列表現もできるはずだか、最初に述べたように、$e_*^{it\mu_*^{-1}}$, $e_*^{it\tau}$ が両方存在していると いろいろ物理的 不都合が起こっていた。

$\mu{=}\hbar e_*^{-2y_0}$, and $\tau{=}\frac{1}{2}(e_*^{-2y_0}{*}x_0{+}x_0{*}e_*^{-2y_0}){=}e_*^{-2y_0}{*}(x_0{+}i\hbar)$ は μ^{-1} の正準共役,

$$\mu^{-1}{*}\tau{=}\frac{1}{\hbar}(x_0{+}i\hbar),\quad e_*^{it\mu^{-1}*\tau}{=}e_*^{it\frac{1}{\hbar}(x_0+i\hbar)}.$$

Siegel-class K で, $:e_*^{2y_0}:_K{=}Ce^{2y_0}$ として、$e_*^{it\mu^{-1}}{=}e_*^{it\frac{1}{\hbar}e_*^{2y_0}}$

$$:e_*^{it\frac{1}{\hbar}e_*^{2\tilde{v}_0}}:_K{=}\int_{\mathbb{R}}e^{itCe^{2y_0}}:\delta_*(\tilde{v}_0{-}y_0):_K đy_0$$

として作れる。(１変数なので, 普通の関数と思って良く、いろんな考え方で定義できる.)

$$:\tau:_0{=}e^{-2y_0}x_0,\quad x_0{*}e^{-2y_0}{=}e^{-2y_0}{*}(x_0{+}2i\hbar)$$

$*$-指数関数 $:e_*^{ite^{-2y_0}*(x_0+i\hbar)}:_K$, とか $:e_*^{ite^{-2y_0}*(x_0+i\hbar)}{*}F:_K$ を考える. 方定式は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_t &= :(ie_*^{-2y_0}{*}(x_0{+}i\hbar)):_K{*_K}F_t,\quad F_0 = :F:_K\\ \frac{d}{dt}\hat{F}_t &= \hat{F}_t{*_K}:(ie_*^{-2y_0}{*}(x_0{+}i\hbar)):_K,\quad \hat{F}_0 = :F:_K.\end{aligned}\tag{12}$$

形式的に Hermitian 構造を考えておけば一方から他方が出る。

実解析解の一意性を考えて、解は $F_t = F_t(x_0, y_0)$ の形だと指定してしまう。計算は Weyl ($K{=}0$)-表示 (i,e, Moyal 積公式) で行い結果を一般表示に直す。

$K{=}0$ (Weyl ordered expression) のときは, $:\ :_0$ とか $*_0$ と表す

$$(x_0{+}i\hbar){*_0}F_t(x_0,y_0){=}(x_0{+}i\hbar)F_t(x_0,y_0){-}\frac{i\hbar}{2}\partial_{y_0}F_t(x_0,y_0),$$

and

$$e^{-2y_0}*_0 f(x_0,y_0) = e^{-2y_0}f(x_0{-}i\hbar, y_0),$$

(12) は次のようになる

$$\frac{d}{dt}F_t(x_0,y_0) = ie^{-2y_0}x_0F_t(x_0{-}i\hbar,y_0) + \frac{\hbar}{2}e^{-2y_0}\partial_{y_0}F_t(x_0{-}i\hbar,y_0),\quad F_0{=}F_0(x_0,y_0)\tag{13}$$

Putting $F_t(x_0,y_0) = G_t(x_0,y_0)e^{\frac{2}{i\hbar}(x_0+i\hbar)y_0}$, the equation (13) becomes

$$\frac{d}{dt}G_t(x_0,y_0) = \frac{\hbar}{2}e^{-4y_0}\partial_{y_0}G_t(x_0{-}i\hbar,y_0),\quad G_0 = F_0(x_0,y_0)e^{-\frac{2}{i\hbar}(x_0+i\hbar)y_0}.\tag{14}$$

(14) is not a differential equation, but a differential-difference equation.
これが、極めて変な（面白い）解け方をする

Fourier transform expressions 緩増化超関数 $a(t,\xi,y_0)$ を使って

$$G_t(x_0,y_0)=\int_{-\infty}^{\infty}a(t,\xi,y_0)e^{i\xi\,x_0}\,đ\xi,\quad G_0(x_0,y_0)=\int_{-\infty}^{\infty}a(0,\xi,y_0)e^{i\xi\,x_0}\,đ\xi$$

とする. $G_t(x_0-i\hbar,y_0)$ must be viewed as the shift of ξ

$$G_t(x_0-i\hbar,y_0)=\int_{-\infty}^{\infty}a(t,\xi,y_0)e^{i\xi(x_0-i\hbar)}\,đ\xi=\int_{-\infty}^{\infty}a(t,\xi,y_0)e^{\hbar\xi}e^{i\xi x_0}\,đ\xi.$$

$$(e^{-\hbar\xi}\partial_t-\frac{\hbar}{2}e^{-4y_0}\partial_{y_0})a(t,\xi,y_0)=0 \tag{15}$$

ξ は単にパラメータ扱いになり、簡単な微分方定式に化ける。

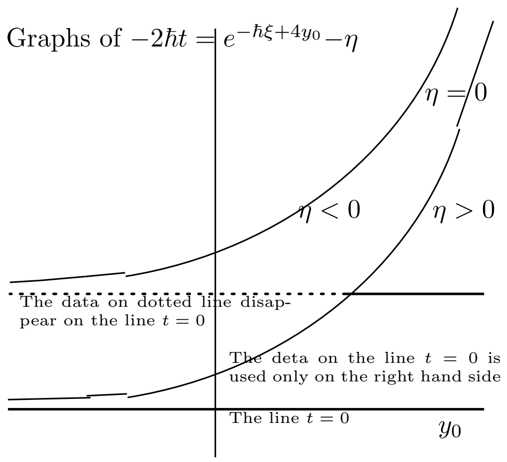
(15) shows that $a(t,\xi,y_0)$ is constant along the real vector field $e^{-\hbar\xi}\partial_t-\frac{\hbar}{2}e^{-4y_0}\partial_{y_0}$ on the (y_0,t)-surface.

したがって一般解は

$$a(t,\xi,y_0)=\phi(\xi,2\hbar t+e^{-\hbar\xi}e^{4y_0}),\quad a(0,\xi,y_0)=\phi(\xi,e^{-\hbar\xi}e^{4y_0})$$

by using a function $\phi(\xi,\eta)$ on $\mathbb{R}^2$ s.t. $f(\xi)=\phi(\xi,2\hbar t+e^{-\hbar\xi}e^{4y_0})$ is a tempered distribution.

解は $-2\hbar t=e^{-\hbar\xi+4y_0}-\eta$ のグラフ上で一定となるが、この曲線で、初期直線 $t=0$ と交わらないものがたくさん出る.


Graphs of $-2\hbar t = e^{-\hbar\xi+4y_0} - \eta$
$\eta = 0$
$\eta < 0$
$\eta > 0$
The data on dotted line disappear on the line $t = 0$
The deta on the line $t = 0$ is used only on the right hand side
The line $t = 0$
y_0

$t<0$ 方向の解は初期条件だけでは決まらない。
$t\geq 0$ 方向の解は 初期条件で決まるが, 初期データの一部が使われるだけ.

The adjoint operator $\mathrm{Ad}(e_*^{it\tau})F = e_*^{it\tau}{*}F{*}e_*^{-it\tau}$ is defined only for $t\geq 0$ by using

$$e_*^{it\tau}{*}(\overline{e_*^{it\tau}{*}\overline{F}}),\quad t\geq 0.$$

これは $t\geq 0$ 方向にしか一意性がないが、
τ は時間だったので、これは逆に好都合！

真空を初期条件とする解が $2\hbar t\geq 1$ で 0 となる.

真空とは真空表現の時に使われるもので Weyl 順序表示では

$$\varpi_{00}{=}2e^{-\frac{2}{i\hbar}x_0y_0},\quad y_0{*}\varpi_{00}{=}0.$$

$$e_*^{it\tau}{*_0}e^{-2\frac{1}{i\hbar}x_0y_0} = \begin{cases} 0 & 2\hbar t\geq 1\\ e^{-\frac{\hbar}{2}(\xi-\xi')}\int\delta(\xi')e^{i\xi x_0}d\!\!\!{}^-\xi\ e^{\frac{2}{i\hbar}(x_0+i\hbar)y_0} & 2\hbar t<1\end{cases}$$

表示に関することをきっちり述べていないので, 書き方が悪い. 正確には

$$:e_*^{it\tau}:_0{*_0}e^{-2\frac{1}{i\hbar}x_0y_0} = \begin{cases} 0 & 2\hbar t\geq 1\\ e^{-\frac{\hbar}{2}(\xi-\xi')}\int\delta(\xi')e^{i\xi x_0}d\!\!\!{}^-\xi\ e^{\frac{2}{i\hbar}(x_0+i\hbar)y_0} & 2\hbar t<1\end{cases}$$

$$e_*^{it\tau}{*}\varpi_{00}{=}\begin{cases} 0 & 2\hbar t\geq 1\\ \frac{1}{\sqrt{1{-}2\hbar t}}e_*^{-i\frac{x_0}{2\hbar}\log(1-2\hbar t)}{*}\varpi_{00} & 2\hbar t{<}1.\end{cases}$$

$\mathcal{H}_{2m}[\mu][\tau]\subset\mathcal{E}_2(\mathbb{C}^{2m+2})$ だった. $\mathcal{E}_2(\mathbb{C}^{2m+2})$ の真空表現とは, 冪等元

$$\widetilde{\varpi}(L){=}\varpi_{00}{*}\varpi_{00}(1)\cdots\varpi_{00}(m)$$

を使って作る表現で, $e_*^{-is\tau}{*}\widetilde{\varpi}(L); s>-1$ を真空のように扱って μ^{-1} がどう表現されるかをみると

$$\mu^{-1}{*}\phi(\boldsymbol{u}){*}e_*^{-is\tau}{*}\widetilde{\varpi}(L){=}\phi(\boldsymbol{u}){*}(se_*^{-is\tau}{+}e_*^{-is\tau}{*}\mu^{-1}){*}\widetilde{\varpi}(L)$$

$$\mu^{-1}{*}\widetilde{\varpi}(L){=}\widetilde{\varpi}(L)$$

だから

$$\mu^{-1}{*}\phi(\boldsymbol{u}){*}e_*^{-is\tau}{*}\widetilde{\varpi}(L){=}(s{+}1)\phi(\boldsymbol{u}){*}e_*^{-is\tau}{*}\widetilde{\varpi}(L)$$

$$\mu{*}\phi(\boldsymbol{u}){*}e_*^{-is\tau}{*}\widetilde{\varpi}(L){=}\frac{1}{s{+}1}\phi(\boldsymbol{u}){*}e_*^{-is\tau}{*}\widetilde{\varpi}(L),\quad s>-1$$

これは Heisenberg algebra の energy にあたる元 μ が $\phi(\boldsymbol{u})\to\frac{1}{s+1}\phi(\boldsymbol{u})$, $\frac{1}{s+1}>0$, なる作用素に表現されたことになり、 energy の正値性からみて好都合である.

これで「時間」が分かったなどと言うつもりはないが, 時間が持っていると思われる性質の一部を含むものが数学の中にすでに存在しているのは面白い.

Berezin の q-Poincaré disk でも μ はこのような opoerator として表現されている.