q-発散級数と総和法

大山 陽介

徳島大学 理工学部 応用理数コース 数理科学系

藤井一幸先生 これからもますますご活躍の会

第２５回 沼津改め 静岡研究会

～幾何，数理物理，そして量子論～

2018年3月8日

0. 差分方程式と微分方程式

S. Pincherle 21 febbrajo 1886

Sopra una trasformazione delle equazioni differenziali lineari in equazioni lineari alle differenze, e viceversa, *R. Ist. Lomb. Sci. Lett. Rend.* **19** (1886), 559–562.

The Mellin Transform of $f(x)$:

$$\mathcal{M}(f;s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\,dx$$

The inverse Mellin transform

$$\mathcal{M}^{-1}(g;x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} g(s)\,ds$$

$f(x)$ は $x = 0, \infty$ で適当なよい振る舞いを持てば

$$\mathcal{M}(f';s) = -(s-1)\mathcal{M}(f;s-1), \quad \mathcal{M}(xf;s) = \mathcal{M}(f;s+1)$$

特に $\vartheta = x\dfrac{d}{dx}$ に対して

$$\mathcal{M}(\vartheta f;s) = -s\mathcal{M}(f;s)$$

0.1 Mellin 変換と一般超幾何方程式

階乗積 $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ として、一般超幾何級数

$$y(x) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n n!} x^n$$

が満たす方程式 (Goursat)：

$$[\vartheta(\vartheta + b_1 - 1) \cdots (\vartheta + b_q - 1) - x(\vartheta + a_1) \cdots (\vartheta + a_p)]\, y = 0.$$

より $g(s) = \mathcal{M}(y; s)$ は次の一階差分方程式を満たす：

$$g(s+1) = -\frac{s(b_1 - s - 1) \cdots (b_q - s - 1)}{(a_1 - s - 1) \cdots (a_p - s - 1)} g(s)$$

右辺はガンマ函数の積で表示される。

$g_1(s+1) = a_1(s) g_1(s),\ g_2(s+1) = a_2(s) g_2(s) \Rightarrow g_1(s+1) g_2(s+1) = a_1(s) a_2(s) g_1(s) g_2(s).$

特に ${}_2F_1$ の場合 **Barnes の積分表示**

$${}_2F_1(a, b; c; -x) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i \Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)} x^s\, dt.$$

0.11. Mellinの超幾何函数

佐藤幹夫・述／青木和彦・記

概均質空間の特異軌跡と超幾何函数（1971年6月・東大）

§2. 超幾何函数（Mellinの超幾何函数）

$X_{\mathbb{C}}$の元 $\omega=(s_1,s_2,\cdots,s_m)$ 及び $X_{\mathbb{C}}^*$ の元 $\tau=(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_m)$ を取る。$\left(\frac{\partial}{\partial\tau_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)$ を grad_τ と記す。この時

<u>定義</u> $X_{\mathbb{C}}^*$ 上の解析函数 $u(\tau)$ が次の線型微分方程式系

(i) $\underline{b_x(\mathrm{grad}_\tau)u(\tau)=e^{\langle\delta x,\tau\rangle}u(\tau)}$

$(\forall x\in X)$ を満たす時 $\underline{u(\tau)\text{を“}b\text{-函数”}}$ $\underline{b_x(\omega)\text{に附随する}}$超幾何函数と呼ぶ。上記

0.2 差分方程式

- Mellin 変換は微分方程式と差分方程式をつなぐ
- 微分方程式と差分方程式を並行して研究することが大切

複素領域での差分方程式

$$y\,(A \circ z) = F(z, y(z)), \quad A \circ z = \frac{az+b}{cz+d}$$

$A \circ z$ が放物型（固定点が 1 つ）か双曲型（固定点が 2 つ）かで異なる

- 放物型の標準系: $A \circ z = z + 1 \to$ 加法的差分方程式

  平均変化率を表し 数値解析などの近似に用いられる

- 双曲型の標準系: $A \circ z = zq \to$ 乗法的差分方程式

  超幾何函数・テータ函数に近く、Ramanujan の研究もある
  $|q| = 1$ の時は楕円型 とよばれ難しい

以下、$|q| < 1$ として q-差分超幾何方程式を考察する

0.3 Hjalmar Mellins と q-差分方程式

Hjalmar Mellins (1854-1933),
Zur Theorie der Gammafunction. *Acta Math.* **8** (1886), 37–80.
Imprimé le 19 Fèvrier 1886.
(S. Pincherle: **21 febbrajo 1886** に引用されている）

Mellins 変換を定義したあと論文の最後に

Die Gammafunction ist nicht die einzige Function, welche nach der im Vorigen angewandten Methode behandelt werden kann und von der man alsdann zu neuen mit der Function verwandten Transcendenten gelangt. Dieselbe Methode kann ebenfalls auf die Function

$$F(z) = \frac{\prod_{n=0}^{\infty}(1 + a_1 q^n z)^{\mu_1} \ldots \prod_{n=0}^{\infty}(1 + a_r q^n z)^{\mu_r}}{\prod_{n=0}^{\infty}(1 + b_1 q^n z)^{\nu_1} \ldots \prod_{n=0}^{\infty}(1 + b_s q^n z)^{\nu_s}} \qquad (|q| < 1)$$

angewandt werden.

q-差分についてはこれ以降の Mellins は特にやっていない（と思う）

1. 超幾何級数と q-超幾何級数

階乗積 $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$

一般超幾何級数 (微分の場合)

$$y(x) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n n!} x^n$$

0) q-階乗積 (以下 $0 < |q| < 1$ と仮定する):

$$(a_1, \dots, a_r; q)_n = \prod_{i=1}^{n} (a_i; q)_n, \quad (a; q)_n = (1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{n-1}a).$$

1) q-超幾何級数 (q-差分の場合) ★ $a_j = 0, b_k = 0$ もありうる:

$${}_r\phi_s\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_r; q)_n}{(b_1, \dots, b_s; q)_n (q; q)_n} \left[(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right]^{1+s-r} x^n.$$

2) **Theta 函数と Jacobi の三重積**:

$$\theta_q(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n-1)/2} x^n = (q, -x, -q/x; q)_\infty.$$

2.1 1階線型 q-差分方程式

線型 q-差分方程式

$$\text{(1st)} \quad y(qx) = (1 - ax)y(x)$$

の解として、原点・無限遠でそれぞれべき級数展開して

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1/(ax;q)_\infty = {}_1\phi_0(0;-;q,ax), \\ y_\infty(x) &= \frac{(q/ax;q)_\infty}{\theta(-ax)} = \frac{1}{\theta(-ax)}{}_0\phi_0(0;-;q,-q/ax). \end{aligned}$$

Jacobi の三重積公式 $\theta(-ax) = (q, ax, q/ax)$ より, $y_0(x), y_\infty(x)$ の接続関係は

$$y_\infty(x) = y_0(x)\frac{1}{(q;q)_\infty}.$$

一階方程式は因数分解で解けるので　$(y(qx) \sim xy'(x)$ の類似と合わせて)

$$y(qx) = cy(x) \qquad y = \frac{\theta(x)}{\theta(cx)} \quad \text{(テータの比はべき函数に似る)}$$

$$y(qx) = xy(x) \qquad y = \frac{1}{\theta(x)} \quad \text{(テータは指数函数に似る)}$$

と合わせて $y(xq) = R(x)y(x)$ [$R(x)$ は有理函数] ならいつでも解ける

2.2 q-指数函数

特別な 1 階線型 q-差分方程式 $(a=1)$:

$$(\text{1st}) \quad y(qx) = (1-x)y(x)$$

の解は

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1/(x;q)_\infty = {}_1\phi_0(0;-;q,x), \\ y_\infty(x) &= \frac{(q/x;q)_\infty}{\theta(-x)} = \frac{1}{\theta(-x)}{}_0\phi_0(0;-;q,-q/x). \end{aligned}$$

二つの異なる q-指数函数:

$$e_q(x) := {}_1\phi_0(0;-;q,x) = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(x;q)_\infty},$$

$$E_q(x) := {}_0\phi_0(-;-;q,-x) = \sum_{n\geq 0}\frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(q;q)_n}x^n = (-x;q)_\infty.$$

q-指数函数のみたす関係式

$$e_q(x)E_q(-x) = 1, \quad e_{q^{-1}}(x) = E_q(-qx), \quad \theta_q(x)e_q(-x) = (q;q)_\infty E_q(q/x).$$

2.3 線型 q-差分方程式の局所理論

線型 q-差分方程式（$a_j(x)$ は多項式、どれか一つは $a_j(0) \neq 0$ ）

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(x)u(q^j x) = 0$$

原点と無限遠のみが特異点になる。原点における特性方程式

$$a_n(0)\lambda^n + a_{n-1}(0)\lambda^{n-1} + \cdots + a_1(0)\lambda + a_0(0) = 0$$

[確定特異点] $a_n(0)a_0(0) \neq 0$ の場合（**Adams の定理**）
特性方程式の解（特性根）λ_j, λ_k が共鳴条件 $\lambda_j/\lambda_k \notin q^{\mathbb{Z}}$ をみたせば n 個の独立な収束解をもつ（擬定数体 $K = \{C(x) \mid C(xq) = C(x)\}$ 上独立）:

$$u_j(x) = \frac{\theta_q(x)}{\theta_q(\lambda_j x)} \sum_{k \geq 0} u_{j,k} x^k.$$

$\lambda_j/\lambda_k \in q^{\mathbb{Z}}$ の時は log を含む

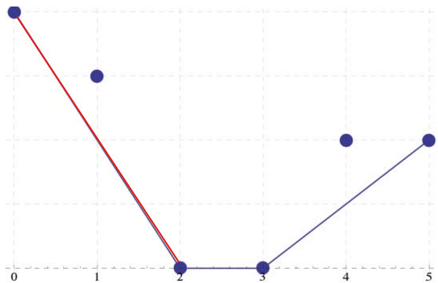
注意:「確定特異点」は L. Fuchs による。“Singuläre Stelle der Bestimmtheit” の和訳であり、regular singular point の訳ではなかった

2.4 q-差分方程式の Newton-Puiseux diagram

線型 q-差分方程式の原点での **The Newton-Puiseux diagram** は

$$\{(j, \mathrm{ord}\ a_j(x)) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le j \le n\}$$

の下に凸な集合を線分で結んだもの



辺： $(j, \mathrm{ord}\ a_j(x))$ and $(k, \mathrm{ord}\ a_k(x))$ $(j < k)$ を結ぶ線分
辺の 傾き

$$\mu = \frac{\mathrm{ord}\ a_k(x) - \mathrm{ord}\ a_j(x)}{k - j}$$

辺の 長さ： $m = k - j$

2.5 Newton diagram と不確定特異点

以下、ある辺 s の傾き μ は整数, 長さを m とする.
$u=\theta(x)^{\mu}y(x)$ とおくと y が満たす q-差分方程式では s の傾きが 0 になり最底辺にくる。y が満たす q-差分方程式の特性方程式を λ の最大ベキで割った多項式を偏特性方程式といい、その次数は m になる。

定理 (Adams)
1) 傾き μ, 長さ m の辺に対して偏特性方程式の解 λ_j が共鳴条件を満たせば

$$u_j(x)=\theta(x)^{\mu}\frac{\theta_q(x)}{\theta_q(\lambda_j x)}\sum_{k\geq 0}u_k x^k,$$

が形式解を与える。(辺ごとに m 個の解が取れる)

2) 辺が非整数 r/s $(s>0)$ (ramified) のときは解は $x^{1/s}$ の形式的ベキ級数になる

3) これらの形式解のうち $(0,\mathrm{ord}\,\mathrm{a}_0(\mathrm{x}))$ を含む辺に対応する解は収束する。

定義
q-差分方程式の Newton 図形が辺を一つしか持たない時、$x=0$ を確定特異点という. $x=\infty$ では $\mathrm{ord}\ a_j(x)$ の代わりに $\deg\ a_j(x)$ を取り、上凸胞を考える。

Remark. 1 階の q-差分方程式は原点、無限遠とも確定特異点.

3. 接続問題

多項式を係数にもつ n 階 q-差分方程式

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(x)u(q^j x) = 0$$

は原点と無限遠で Adams の意味で基本解をもつ：

$\mathbf{y_0}(x) = (y_0^{(1)}(x), ..., y_0^{(n)}(x))$: local solutions around $x = 0$

$\mathbf{y}_\infty(x) = (y_\infty^{(1)}(x), ..., y_\infty^{(n)}(x))$: local solutions around $x = 0$

基本解の組に対して $n \times n$ の 接続行列 が定まる

$$\mathbf{y}_\infty(x) = \mathbf{y_0}(x)P(x).$$

Remark.
$P(x)$ の行列要素は擬定数 $P_{ij}(xq) = P_{ij}(x)$ になるだけではなく Adams の解は一価なので $P_{ij}(xe^{2\pi i}) = P_{ij}(x)$ を満たし楕円函数になる.

Remark. $q = e^{2\pi i\tau}$ として楕円曲線の同型対応

$$\exp(2\pi i *): \quad \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \longrightarrow \mathbb{C}^\times/q^{\mathbb{Z}}$$

3.1 ${}_2\phi_1\,(a,b;c;x)$ の接続行列

Heine の超幾何級数 ${}_2\phi_1(a,b;c;x)$:

$$(c-abqx)u(xq^2)-[c+q-(a+b)qx]u(qx)+q(1-x)u(x)=0.$$

原点での局所解：

$$u_1={}_2\phi_1\,(a,b;c;x)\,,$$
$$u_2=\frac{\theta(-x)}{\theta(-qx/c)}{}_2\phi_1\left(qa/c,qb/c;q^2/c;x\right).$$

無限遠での局所解：

$$v_1=\frac{\theta(-ax)}{\theta(-x)}{}_2\phi_1\,(a,aq/c;aq/b;cq/abx)\,,\ \ v_2=(a\leftrightarrow b).$$

定理 (**Thomae, Watson**)　${}_2\phi_1$ の接続公式:

$$u_1=\frac{(b,c/a;q)_\infty}{(c,b/a;q)_\infty}v_1+\frac{(a,c/b;q)_\infty}{(c,a/b;q)_\infty}v_2,$$
$$u_2=\frac{(qb/c,q/a;q)_\infty}{(q^2/c,b/a;q)_\infty}\frac{\theta(-qax/c)\theta(-x)}{\theta(-qx/c)\theta(-ax)}v_1+\frac{(qa/c,q/b;q)_\infty}{(q^2/c,a/b;q)_\infty}\frac{\theta(-qbx/c)\theta(-x)}{\theta(-qx/c)\theta(-bx)}v_2.$$

3.2 ${}_2\phi_1$ の接続公式の証明

Barnes の公式の q-類似 (p.16) で $A = C = 2, B = D = 1$ として、さらに

$$a_1 = c, a_2 = q/z; b_1 = z; c_1 = a, c_2 = b; d_1 = 1$$

$$P(t) = \frac{(ct, qt/z, z/t; q)_\infty}{(at, bt, 1/t; q)_\infty}$$

1) $t = 0$ の周りの積分：

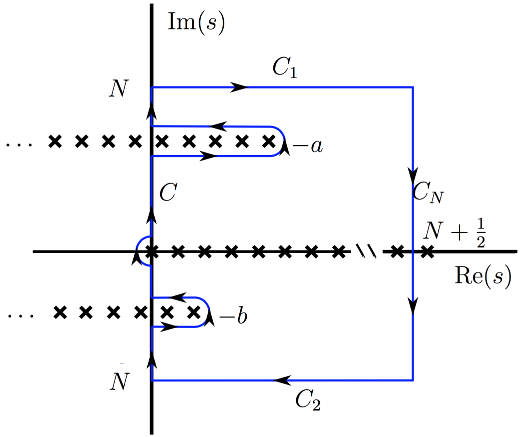
$$\begin{aligned}\int_K P(t)\, dt &= \frac{(c, q/z, z; q)_\infty}{(q, a, b; q)_\infty} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a, b, q/z; q)_n}{(q, c, b/a; q)_n} z^n \\ &= \frac{(c, q/z, z; q)_\infty}{(q, a, b; q)_\infty} {}_2\phi_1(a, b; c; q, z)\end{aligned}$$

2) $t = \infty$ の周りの積分：

$$\int_K P(t)\, dt = \frac{(az, c/a, q/az; q)_\infty}{(q, a, b/a; q)_\infty} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a, qa/c, az; q)_n}{(q, az, qa/b; q)_n} \left(\frac{cq}{abz}\right)^n + (a \leftrightarrow b).$$

3.3. 超幾何級数の積分表示

$$
{}_2F_1(a,b;c;-x) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)} x^s \, dt.
$$



q-差分の場合、$\Gamma(s)$ を $\Gamma_q(s)$ に変える (Watson,1910) と複雑

3.4. Barnes 積分の q-類似

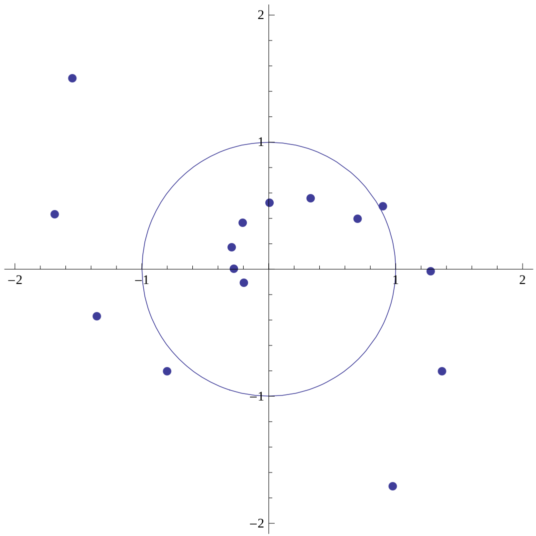
積分

$$\int_{|z|=\varepsilon} \frac{(a_1 z, a_2 z, \ldots, a_A z, b_1/z, \ldots, b_B/z; q)_\infty}{(c_1 z, c_2 z, \ldots, c_C z, d_1/z, \ldots, d_D/z; q)_\infty}\, dz$$

を考える。積分路は原点を正の向きに一周回り、極の位置は

$$z = 1/c_j q^k \ (j = 1, 2, \ldots, C; k \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}), \quad z = d_l q^m \ (l = 1, 2, \ldots, D; m \in \mathbb{Z}_{\geqq 0})$$

なので、$1/c_j q^k$ が積分路の外に、$d_l q^m$ が積分路の中に全て入るようにする。



4. q-超幾何方程式

q-超幾何級数 $y(x) = {}_r\varphi_s(a_1, ..., a_r; b_1, ..., b_s; q, x)$ は **Goursat 方程式の q-類似**をみたす:

$$[xP_r(\sigma) - Q_s(\sigma)]y(x) = 0.$$

σ: **q-差分作用素** $\sigma y(x) = y(xq)$.

$P_r(\sigma)$: σ の多項式, 次数 $\leqq r$

$Q_s(\sigma)$: σ の多項式, 次数 $\leqq s+1$.

もし $\mu = s + 1 - r \geqq 0$ ならば

$$P_r(\sigma) = (-\sigma)^\mu \prod_{j=1}^{r}(1 - a_j\sigma),\ Q_s(\sigma) = (1-\sigma)\prod_{j=1}^{s}(1 - \frac{b_j}{q}\sigma).$$

Goursat 方程式の q-類似の階数は $s+1$. もし

$$b_1 b_2 \cdots b_s \neq 0,$$

$x = 0$ **は確定特異点**.

4.1 超幾何函数の退化図式

$$
\begin{tikzcd}
 & & \textbf{Weber}\ (3) \arrow[dr] & \\
\textbf{Gauss}\ (1+1+1) \arrow[r] & \textbf{Kummer}\ (1+2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \textbf{Airy}\ (5/2) \\
 & & \textbf{Bessel}\ (1+3/2) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

(r) = Poincaré rank +1

Gauss

$${}_2F_1\binom{a,\ b}{c}$$

Kummer

$${}_1F_1\binom{a}{c} \qquad {}_2F_0\binom{a,\ b}{-}$$

Weber

$${}_1F_1\binom{a}{1/2}$$

Bessel

$${}_0F_1\binom{-}{c}$$

Airy

$${}_0F_1\binom{-}{2/3}$$

First Order

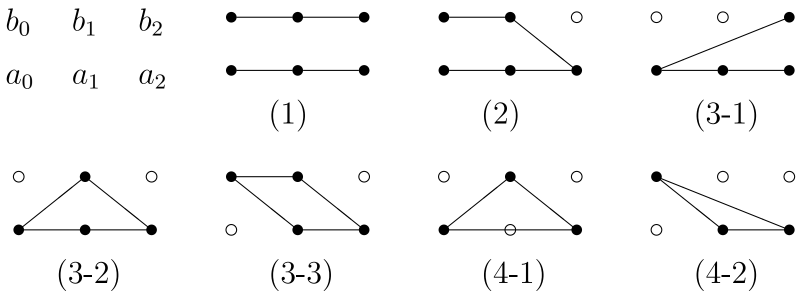
$${}_1F_0\left(\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; x\right) = (1-x)^{-a}$$

$${}_0F_0\left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}; x\right) = \exp x$$

4.2 q-超幾何函数の退化図式

2 階 q-超幾何方程式の分類

$$(a_2 + b_2 x)u(xq^2) + (a_1 + b_1 x)u(xq) + (a_0 + b_0 x)u(x) = 0$$



退化図式

$$\begin{tikzcd}
 & & J_\nu^{(3)} \arrow[r] & q\text{-Airy} \\
{}_2\phi_1(a,b;c;z) \arrow[r] & {}_1\phi_1(a;c;z) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & J_\nu^{(1)} \arrow[dr] & \\
 & & {}_1\phi_1(a;0;z) \arrow[r] & \text{Ramanujan}
\end{tikzcd}$$

4.3 2階差分方程式を満たす q-超幾何級数

$$\begin{tikzcd}
 & & J_\nu^{(3)} \arrow[r] & q\text{-Airy} \\
{}_2\phi_1(a,b;c;z) \arrow[r] & q\text{-confluent} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & J_\nu^{(1)},\, J_\nu^{(2)} \arrow[r] & \text{Ramanujan} \\
 & & {}_1\phi_1(a;0;z) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Heine

${}_2\phi_1\binom{a\ \ b}{c}$

divergent

q-confluent

${}_2\phi_1\binom{a\ \ 0}{c} \sim {}_1\phi_1\binom{a}{c}$ ${}_2\phi_1\binom{a\ \ b}{0}$ ${}_2\phi_0\binom{a\ \ b}{-}$

First order Jackson$^{(1)}$ Jackson$^{(2)}$ Hahn-Exton q-Hermite

${}_1\phi_0\binom{a}{-}$ ${}_2\phi_1\binom{0\ \ 0}{c} \sim {}_0\phi_1\binom{-}{c}$ ${}_1\phi_1\binom{0}{c}$ ${}_1\phi_1\binom{a}{0}$ ${}_2\phi_0\binom{a\ \ 0}{-}$

q-binomial $\cup$

q-Airy Ramanujan

${}_1\phi_0\binom{0}{-}$ ${}_0\phi_0\binom{-}{-}$ ${}_1\phi_1\binom{0}{-q}$ ${}_0\phi_1\binom{-}{0}$ ${}_2\phi_0\binom{0\ \ 0}{-}$

$\exp_q$ Exp_q

4.4 q-合流超幾何方程式

q-合流超幾何方程式: $x=0$ が不確定特異点

$$(1-abqx)u(q^2x)-\{1-(a+b)qx\}\,u(qx)-qxu(x)=0.$$

原点での局所解：

$$u_1(x)={}_2\phi_0(a,b;-;q,x),\ \ u_2(x)=\frac{(abx;q)_\infty}{\theta(-qx)}{}_2\phi_1\left(q/a,q/b;0;q,abx\right)$$

無限遠での局所解：

$$v_1(\lambda,x)=\frac{\theta\left(qax/\lambda\right)}{\theta\left(qx/\lambda\right)}{}_2\phi_1\left(a,0;aq/b;q,q/abx\right),\quad v_2(\lambda,x)=(a\leftrightarrow b)$$

$u_1(x)$ は発散級数になるので、

1) ある領域（**Stokes 領域**）での正則函数としての意味づけ（総和法）が必要

2) Stokes 領域が異なる場合は総和の仕方が異なる（**Stokes 現象**）

q-差分方程式の Stokes 現象は微分の場合と様相が異なる

5 Stokes 現象と q-Stokes 現象

$t>0$ で定義された函数 $f(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}\{f\}(s)$ を次で定める：

$$\mathcal{L}\{f\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

ラプラス変換の例：

$$\mathcal{L}\{t^a\}(s)=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}},\quad \mathrm{Re}\ a>-1.$$

Kummer の合流型超幾何方程式 (Euler)

$$z\frac{d^2y}{dz^2}+(c-z)\frac{dy}{dz}-ay=0$$

・原点での解 $y={}_1F_1(a,c;z)$
・無限遠での解 $y=z^{-a}\ {}_2F_0(a,1+a-c;-1/z)$: 発散

発散級数にどう意味をつけるか？

Euler, Abel, Poincaré, Stokes, E. Borel, ...

5.1 Borel 変換

ラプラス変換 $\mathcal{L}\{t^a\}(s) = \dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ の逆：**Borel 変換**

$$\mathcal{B}\left(\sum c_n z^{-a-n}\right) = \sum c_n \frac{t^{a+n-1}}{\Gamma(a+n)}$$

Kummer の合流超幾何の場合

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\left(z^{-a}\ {}_2F_0(a, 1+a-c; -1/z)\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(a)_n (1+a-c)_n}{n!} \ \frac{t^{a+n-1}}{\Gamma(a+n)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1+a-c)_n}{n!} \ t^{a+n-1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} (1+t)^{1+a-c}\end{aligned}$$

したがって, 発散級数 ${}_2F_0$ を **Borel-Laplace 変換**で意味づけできる：

$$z^{-a}\ {}_2F_0(a, 1+a-c; -1/z) \sim \frac{1}{\Gamma(a)} \int_C e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{1+a-c}\, dt$$

積分路 C の取り方で意味づけが異なり、Stokes 領域は角領域になる

5.2 q-Borel 変換 [Ramis, Zhang]

形式ベキ級数 $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ に対する **q-Borel 変換** $\mathcal{B}_q^{\pm}$:

$$\left(\mathcal{B}_q^{\pm} f\right)(\xi) := \sum_{n\geq 0} a_n q^{\pm \frac{n(n-1)}{2}} \xi^n.$$

$\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus q^{\mathbb{Z}}$ として **q-Laplace 変換** $\mathcal{L}_{q,\lambda}^{+}$

$$\left(\mathcal{L}_{q,\lambda}^{+} \phi\right)(x) := \frac{1}{1-q} \int_0^{\lambda\infty} \frac{\phi(\xi)}{\theta_q(\xi/x)} \frac{d_q \xi}{\xi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\phi(\lambda q^n)}{\theta_q(\lambda q^n / x)}.$$

収束級数 $f(x) \in \mathbb{C}\{x\}$ に対しては $\mathcal{L}_{q,\lambda}^{+}$ は $\mathcal{B}_q^{+}$ の逆になる：

$$\mathcal{L}_{q,\lambda}^{+} \circ \mathcal{B}_q^{+} f = f.$$

この **q-Borel-Laplace 変換** を用いて q-差分方程式の解に現れる発散 q-級数を意味づけできる.
一般には、$\mathcal{L}_{q,\lambda}^{+} \circ \mathcal{B}_q^{+} f$ は $x = -\lambda q^{\mathbb{Z}}$ に極を持つ.

発散 q-級数の q-Stokes 領域は $\mathbb{C} \setminus -\lambda q^{\mathbb{Z}}$ になる

5.3 q-合流超幾何方程式の接続公式 [C. Zhang]

発散級数解 $u_1 = {}_2\phi_0(a,b;-;q,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,b;q)_n}{(q;q)_n} \left[(-1)^n q^{n(n-1)/2}\right] x^n$

1. $\mathcal{B}_q^+({}_2\phi_0(a,b;-;q,x)) = {}_2\phi_1(a,b;0;q,-\xi)$

2. $c \to 0$ の場合も ${}_2\phi_1$ の Thomae-Watson の接続公式は生きる：

$$\mathcal{B}_q^+ u_1(\xi) = {}_2\phi_1(a,b;0;q,-\xi) =$$
$$= \frac{(b;q)_\infty}{(b/a;q)_\infty}\frac{\theta(a\xi)}{\theta(\xi)}{}_1\phi_1(a;\frac{aq}{b};q,-\frac{q^2}{b\xi}) + \frac{(a;q)_\infty}{(a/b;q)_\infty}\frac{\theta(b\xi)}{\theta(\xi)}{}_1\phi_1(b;\frac{bq}{a};q,-\frac{q^2}{a\xi}).$$

3. u_1 の意味づけ：${}_2f_0(a,b;\lambda,q,x) := \mathcal{L}_{q,\lambda}^+ \circ \mathcal{B}_q^+({}_2\phi_1(a,b;-;q,x))$

$$ {}_2f_0(a,b;\lambda,q,x) = \frac{(b;q)_\infty}{(b/a;q)_\infty}\frac{\theta(a\lambda)}{\theta(\lambda)}\frac{\theta\left(qax/\lambda\right)}{\theta\left(qx/\lambda\right)}{}_2\phi_1\left(a,0;\frac{aq}{b};q,\frac{q}{abx}\right)$$
$$+\frac{(a;q)_\infty}{(a/b;q)_\infty}\frac{\theta(b\lambda)}{\theta(\lambda)}\frac{\theta\left(qbx/\lambda\right)}{\theta\left(qx/\lambda\right)}{}_2\phi_1\left(b,0;\frac{bq}{a};q,\frac{q}{abx}\right).$$

Remark

q-Borel 変換 $\mathcal{B}_q^+$ は q-超幾何級数を別の収束のよい q-超幾何級数にうつす

5.4 q-合流超幾何方程式の接続問題

原点での局所解：

$$u_1(x) = {}_2\phi_0(a, b; -; q, x),\ \ u_2(x) = \frac{(abx; q)_\infty}{\theta(-qx)} {}_2\phi_1\left(q/a, q/b; 0; q, abx\right)$$

無限遠での局所解：

$$v_1(\lambda, x) = \frac{\theta\left(qax/\lambda\right)}{\theta\left(qx/\lambda\right)} {}_2\phi_1\left(a, 0; aq/b; q, q/abx\right), \quad v_2(\lambda, x) = (a \leftrightarrow b)$$

Slater の公式

$${}_1\phi_1\left(a; c; q, x\right) = (ax/c; q)_\infty {}_2\phi_1\left(c/a, 0; c; q, ax/c\right),$$

より、前頁 2 の Thomae-Watson の接続公式 $(c = 0)$ は u_2 の接続公式を導く

6.1 接続公式を求める戦略

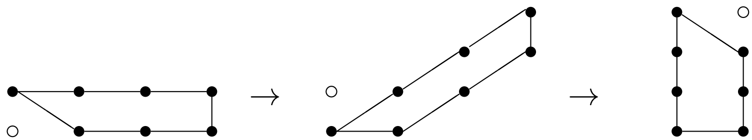
q-差分方程式を次の 2 つの変換で変形していく:

Lemma 1. *(1)* **q-Borel 変換** $\mathcal{B}_q^{\pm}$ は次の関係式を満たす

$$\mathcal{B}_q^{\pm}(t^m \sigma_q^n f) = q^{\pm m(m-1)/2} \tau^m \sigma_q^{n \pm m} \mathcal{B}_q^{\pm}(f).$$

(2) **theta 函数 によるゲージ変換**は次の関係式を満たす *:*

$$x^m \sigma_q^n \left[\theta(cx)^{\pm 1} f(x)\right] = c^{\mp n} q^{\mp n(n-1)/2} x^{m \mp n} \theta(cx)^{\pm 1} \sigma_q^n f(x).$$



Summary

1. 線型 q-差分方程式の「**不確定特異点**」を現代的に定義し直した

2. 線型 q-差分方程式の「**不確定特異点**」では必ず収束級数解を一つは持つ（Adams）

3. 発散級数解は**多重 q-Borel 変換**で意味づけできる（Dreyfus, 2014)

4. 2 階の q-超幾何方程式 は **q-Borel-Laplace 変換**で全て接続公式が求まる. 3 階以上でもほぼできている.

5. 高階 q-超幾何方程式の接続係数を求めるには **ramified** の場合の議論が必要

References

[A] C. R. Adams, On the linear ordinary q-difference equation, Ann. Math **30** (1929), 195–205. http://www.jstor.org/stable/1968274

[DE2015] Dreyfus, T., Eloy, A.; q-Borel-Laplace summation for q-difference equations with two slopes, arXiv:1501.02994.

[Eloy2016] Eloy, A.; Classification et géométrie des équations aux q-différences: étude globale de q-Painlevé, classification non isoformelle et Stokes à pentes arbitraires, Thèse, Université de Toulouse, 2016. http://thesesups.ups-tlse.fr/3376/.

[GR] G. Gasper and M. Rahman, Basic Hypergeometric Series, 2nd ed, Cambridge, 2004.

[Mo] Morita, T., A connection formula for the q-confluent hypergeometric function, SIGMA **9** (2013), 050, 13 pages. https://www.emis.de/journals/SIGMA/2013/050/. https://arxiv.org/abs/1103.5232

[YO1] Ohyama, Y.; A unified approach to q-special functions of the Laplace type, arXiv:1103.5232.

[YO2] Ohyama, Y.; q-Stokes phenomenon of a basic hypergeometric Series ${}_1\phi_1(0; a; q, x)$ *J. Math. Tokushima Univ.* **50** (2016), 49–60. http://repo.lib.tokushima-u.ac.jp/110913.

[YO3] Ohyama, Y.; Connection formula of basic hypergeometric series ${}_r\phi_{r-1}(\mathbf{0}; \mathbf{b}; , q, x)$ *J. Math. Tokushima Univ.* **51** (2017), 29–36. http://www-math.ias.tokushima-u.ac.jp/journal/mat

[RSZ] Ramis, J.-P., Sauloy, J., Zhang, C.; Local analytic classification of q-difference equations, *Astérisque*, **355** 2013. arXiv:0903.0853.

[Th] Thomae, J. Ueber die Functionen welche durch Reihen von der Form dargestellt werden $1 + \frac{p}{1}\frac{p'}{q'}\frac{p''}{q''}x + \frac{p}{1}\frac{p+1}{2}\frac{p'}{q'}\frac{p'+1}{q'+1}\frac{p''}{q''}\frac{p''+1}{q''+1}x^2 + \ldots$. J. Reine Angew. Math. **87** (1879), 26–73. https://doi.org/10.1515/crll.1879.87.26.

[Th2] Thomae, J, Les séries Heinéennes supérieures, ou les séries de la forme ..., *Ann. Mat. Pura Appl.* **4** (1870), 105–138. `https://doi.org/10.1007/BF02420027`.

[W] Watson, G. N., The continuation of functions defined by generalized hypergeometric series, Trans. Cambridge Phil. Soc., **21** (1910), 281–299.

[Z] Zhang, C., Une sommation discrete pour des equations aux q-differences lineaires et a coefficients analytiques: theorie generale et exemples. *Differential equations and the Stokes phenomenon*, 309–329, World Sci. Publ., 2002.

[Z05] Zhang C.; Remarks on some basic hypergeometric series, in *Theory and Applications of Special Functions*, Dev. Math., Vol. 13, Springer, New York, 2005, 479–491.