

# Painlevé 方程式の古典解析

大山 陽介

奈良 平群の里

第 20 回 沼津研究会

2013 年 3 月 6 日

## 漸近解析とは

函数のある点（特異点、境界点、変わり点など）での  
漸近挙動を調べ、別の点での挙動への接続問題を解く

- 漸近級数は一般に発散級数になる（から嬉しい）
- 発散級数の収束性・総和法が鍵
- べき函数だけではなく、指数函数や楕円函数が必要

### Definition (2002)

Painlevé 函数に対応する線型方程式のモノドロミ（線型モノドロミ）が決定可能なときモノドロミ可解な解という

### 問題点

- 「決定可能」の定義は何か？
- 一つの Painlevé 方程式に対して異なる線型方程式（P6 なら、2 階、3 階、4 階、8 階線型系が存在）が存在

しかし、従来知られている Painlevé 方程式の漸近展開は、  
線型モノドロミとの対応がついていることが多い

例：神保の解 for **P6** [Publ. RIMS, **18** (1982).]

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{m=-n}^n c_{nm} (at^\sigma)^m$$

ここで

$$\sigma = \frac{1}{\pi} \arccos \left( \frac{p_{0t}}{2} \right), \quad p_{jk} = \operatorname{tr} M_j M_k (j, k = 0, 1, t)$$

$$a = \left[ \left( \frac{i}{2} \sin(\pi\sigma) p_{1t} - \cos(\pi\theta_t) \cos(\pi\theta_\infty) - \cos(\pi\theta_0) \cos(\pi\theta_1) \right) e^{i\pi\sigma} + \frac{i}{2} \sin(\pi\sigma) p_{01} - \cos(\pi\theta_t) \cos(\pi\theta_1) - \cos(\pi\theta_0) \cos(\pi\theta_\infty) \right] \cdot \quad 's$$

## 確定特異点と不確定特異点 (非線型では明確ではない)

$$t^{1-s} \frac{dY}{dt} = F(t^{-1}, Y)$$

$t = \infty$  は  $s = 0$  のとき **確定特異点**、 $s > 0$  のとき **不確定特異点**

P6 の  $t = 0, 1, \infty$ , P3, P5 の原点は**確定特異点**

P6 以外の Painlevé 方程式の無限遠は**不確定特異点**

### **Painlevé** 方程式の不確定特異点の周りでの漸近解析

- 1913: P. Boutroux

*Recherches sur les transcendentes de M. Painlevé  
et l'étude asymptotique des équations  
différentielles du second ordre.*

*Ann. Sci. Ecole. Norm. Super.* **30** (**1913**), 255–376;  
**31** (1914), 99–159.

Painlevé 方程式の漸近解析は次の二通り：

### 楕円漸近解析と級数型漸近解析

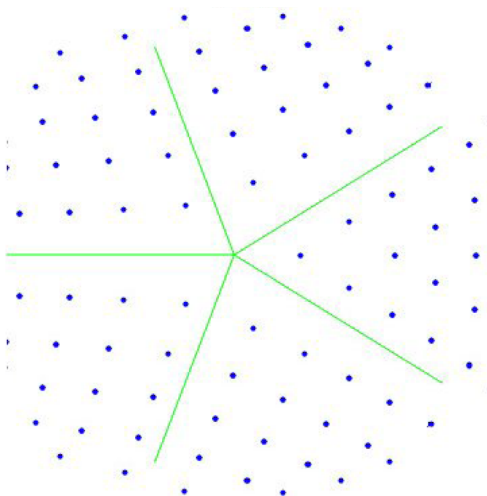
楕円漸近解析の例:  $y'' = 6y^2 + x$

$$y(x) \sim |x|^{1/2} \wp\left(\frac{4}{5}e^{i\varphi}|x|^{5/4} - t(\varphi, s); g_2(\varphi), g_3(\varphi)\right) + O(|x|^{3/4}),$$

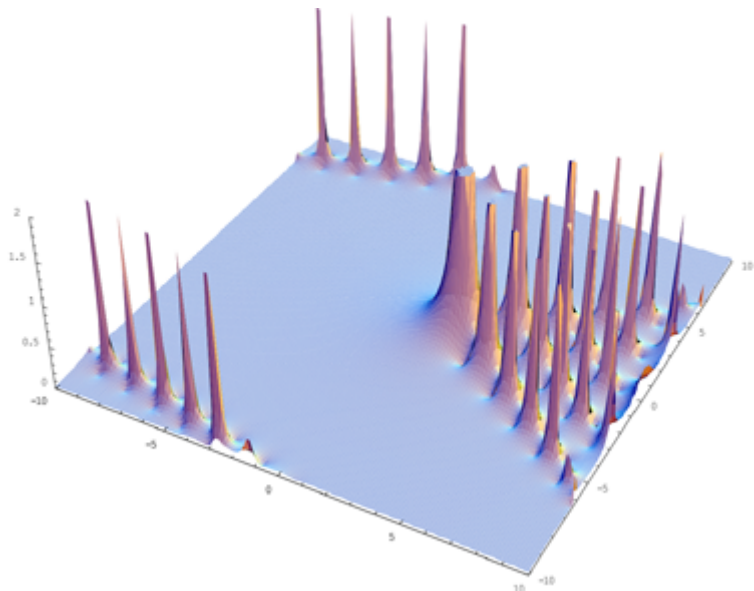
$$t(\varphi, s) = \frac{1}{2\pi i} \left( \omega_a(\varphi) \log(is_{2-2k}) + \omega_b(\varphi) \log \frac{s_{5-2k}}{s_{2-2k}} \right)$$

$$x \in D_k(\varphi, \varepsilon, s) = \left\{ x \in \mathbb{C}; \frac{(3+2k)\pi}{5} + \varepsilon \leq \varphi \leq \frac{(5+2k)\pi}{5} - \varepsilon \right\}$$

P1 の一般解の極の分布は楕円漸近解から「ほぼ」わかる：



(V. Novokshenov の講演録より)



(V. Novokshenov の講演録より)

べき級数の例: Boutroux's tritronquée solution

$$\begin{aligned}y &= -\sqrt{\frac{-x}{6}} \sum a_n x^{-5n/2} \\ &= -\sqrt{\frac{-x}{6}} - \frac{1}{48} x^{-2} - \frac{49}{768} \sqrt{-\frac{1}{6x^9}} + \dots\end{aligned}$$

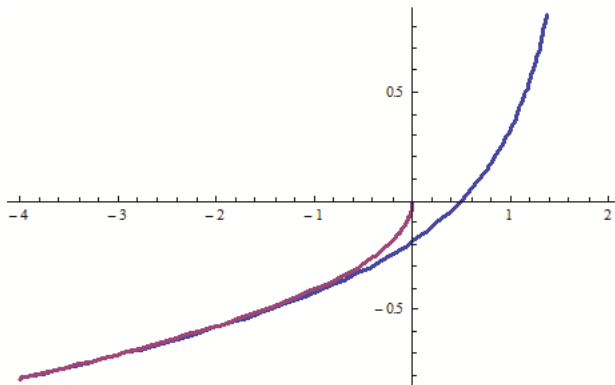
$a_n$  は漸化式で順に決まる

### Theorem

*Tritronquée solution* は  $|\arg x| > \frac{\pi}{5}$  で正則 ( $|x| > R$ )



Boutroux's tritronquée solution (赤線は  $y = -\sqrt{-x/6}$ ):

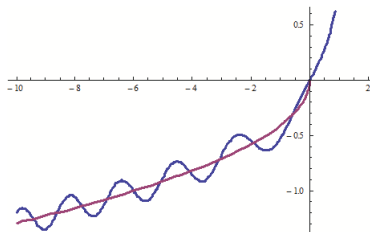


$y(0) = -0.18755, y'(0) = -0.30490$  で数値計算

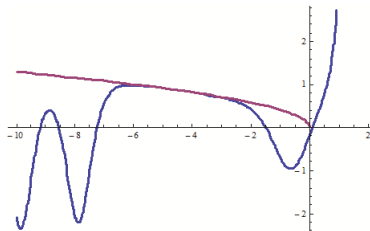
最初の零点  $y(x_1) = 0$  は  $x_1 = 0.4999\dots$

最初の極  $y = \frac{1}{(x-\zeta_1)^2} + \dots$  は  $\zeta_1 = 2.384\dots$

## そのほかの解 (1970年代から既知)



$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 0.50$$



$$y(0) = -0.1875$$
$$y'(0) = 1.7992596$$

P1:  $y'' = 6y^2 + t$  の **Boutroux** 変換

$$y = (e^{-\pi i t})^{1/2} v, \quad x = \frac{4}{5} (e^{-\pi i t})^{5/4}$$

によって

$$v'' = 6v^2 + 1 + \frac{4v}{25x^2} - \frac{v'}{x},$$

$$v \sim -\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{5t}} [a \exp(-ih) + b \exp(ih)],$$

$$a = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/8} \frac{\sqrt{2}\pi}{s_2 \Gamma(-i\rho)} \exp \frac{\pi\rho}{2}, \quad b = -\left(\frac{2}{3}\right)^{1/8} \frac{\sqrt{2}\pi}{s_3 \Gamma(i\rho)} \exp \frac{\pi\rho}{2}.$$

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \log(1 + s_2 s_3), \quad h = 2 \left(\frac{2}{3}\right) t + \rho \log 5t + C.$$

**P1 のモノドロミ保存変形**  $\frac{dY}{dz} = A(z, t)Y$

$$A(z, t) = \begin{pmatrix} 4z^4 + t + 2y^2 & 4yz^2 + t + 2y^2 \\ -(4yz^2 + t + 2y^2) & -(4z^4 + t + 2y^2) \end{pmatrix} - (2y'z + \frac{1}{2z}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y(z) \sim \exp \left[ \left( \frac{4}{5} z^5 + tz \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

as  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $\arg z \in (\frac{\pi}{5}(k - \frac{3}{2}), \frac{\pi}{5}(k + \frac{1}{2}))$ .

**Monodromy data**

$$S_k = Y_k^{-1}(z) Y_{k+1}(z)$$

The cyclic relation:  $S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ . If  $1 + s_2 s_3 \neq 0$ ,

$$s_1 = \frac{i - s_3}{1 + s_2 s_3}, \quad s_4 = \frac{i - s_2}{1 + s_2 s_3}, \quad s_5 = i(1 + s_2 s_3)$$

- $1 + s_2 s_3 = 0$  ならば  $s_2 = s_3 = i$ ,  $s_5 = 0$ ,  $s_1 + s_4 = i$ .
- 実解ならば  $s_2 = -\bar{s}_3$ .

### Theorem (Kapaev 1988, 2004)

$P1$  の実解について

- $1 - |s_2|^2 > 0$  ならば **2パラメタ解が負の実軸上  $t < t_0$  で大域的に存在**
- $1 - |s_2|^2 = 0$  ならば 次の **1パラメタ解が存在**:

$$y \sim + \sqrt{-t/6} + a(-t)^{-1/8} e^{-\frac{8}{5}(3/2)^{1/4}(-t)^{5/4}},$$

$$\text{ここで } a = -\frac{(2/3)^{1/8}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{s_1 - s_4}{2}.$$

- この 1パラメタ解は  $\pi/5 < \arg t < \pi$ ,  $|t| > R$  で正則

べき級数解は一般に

$$y(t) = (\text{代数的級数}) + (\text{指数的級数})$$

の形をしており、指数的級数の部分は  $\exp(at)$ ,  $\exp(-at)$  の形式的級数 **発散**

河合・竹井らの**完全 WKB 解析**でも同様。P1 では一致

1980年代の**高野・下村・吉田・木村**らによって、すでに *2-parameter* 解は構成されていたが、当時は *Painlevé* 方程式の漸近展開じたいが未発達で孤立した

## Theorem

**Malmquist・福原・岩野の定理**により、*Painlevé* 方程式の不確定特異点の周りの**指数的 2 パラメタ解**は角度  $\theta$  の角領域で収束する（正確にはまだ予想）

## Theorem

$P1$  の **tritronquée 解の 2-parameter 摂動解** は、十分大きな  $R > 0$  に対して、実軸上の开区間  $(-\infty, -R)$  のある複素近傍で正則な解を与える。この領域を、 $t \rightarrow -\infty$  における角領域と考えたとき、**角度は 0** である。さらに、 $0$ -parameter 解 (tritronquée 解) の収束域の角度は  $8/5\pi$ ,  $1$ -parameter 解の収束域の角度は  $4/5\pi$ ,  $2$ -parameter 解の収束域の角度は **0** であり、それ以上には広がらない。

$t = 0$  で不確定特異点をもつ方程式

$$t^2 \frac{dy}{dt} = f(t, y, z), \quad t^2 \frac{dz}{dt} = g(t, y, z)$$

に対して、**形式的変換**

$$Y_1 = Y_1(t, y, z), \quad Y_2 = Y_2(t, y, z)$$

を取り、補助函数  $W = t^{-1}Y_1Y_2$  を使って、正規化する

We set

$$S(\varepsilon, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < r, |\arg z - \pi/2| < \varepsilon\},$$

$$S = \left\{ f(z) \in O(S(\varepsilon, r)) \mid f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right\}$$

$$S_0 = \{f(z) \in S \mid a_0 = 0\}$$

### Theorem (Malmquist)

$$z^2 \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(z) \\ b_2(z) \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + A(z) \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(z, y_1, y_2) \\ f_2(z, y_1, y_2) \end{pmatrix}$$

は、一意な解  $(y_1(z), y_2(z)) \in S_0^2$  をもつ。ここで、  
 $b_j, A_{ij}(z) \in S_0$ , また

$$f_j = \sum_{|\alpha| \geq 2} f_{j,\alpha}(z) y^\alpha, \quad f_{j,\alpha} \in S$$



**P1** の場合は、Poincaré rank 1 ではない:

$$t^2 \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6y_1^2 \end{pmatrix}$$

が、 $t = (4cs/5)^{-5/4}$  とおき ( $c = (-24)^{1/4}$ )

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{1/2} & 0 \\ 0 & ct^{3/4} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} c^2/12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 + z_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} \right]$$

と  $z_j$  に **Boutroux 変換** すれば、Malmquist 系になる。

Boutroux 変換は、Painlevé 方程式を Poincaré rank 1 の Malmquist 系に変換する代数変換と思えば、自然に見つかる

**Tritronquée 解** の収束は Malmquist の定理から従う

Malmquist 系をさらに変換して  $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = P(s) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  として

$$s^2 \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \frac{3(u_1 + u_2)^2}{c^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と、右辺の  $s^1$  の項までは対角化できる

## Theorem (福原)

$$z^2 \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + f(z, y_1, y_2)$$

$$f(z, y_1, y_2) = \sum_{j+k \geq 2} f_{j,k}(z) y_1^j y_2^k, \quad f_{j,k}(z) \in \mathcal{S}.$$

このとき、次のような形式変換が存在する：

$$y = w + \sum_{j,k \geq 0} a_{j,k}(z) w_1^j w_2^k, \quad a_{j,k}(z) \in \mathcal{S}_0$$

$$z^2 w_1' = \left[ 1 + \alpha_1 w_1 + \beta_1(z) w_1 w_2 + g_1(z, w) (w_1 w_2)^2 \right] w_1$$

$$z^2 w_2' = \left[ -1 + \alpha_2 w_2 + \beta_2(z) w_1 w_2 + g_2(z, w) (w_1 w_2)^2 \right] w_2$$

これ以上簡約できないので、変数の数を増やす

$$w_3 = \frac{1}{z} w_1 w_2.$$

すると

$$z^2 \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 + \alpha_2 - 1 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + z w_3 \begin{pmatrix} \beta_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1(x) + \beta_2(x) \end{pmatrix} + z^2 w_3^2 \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_1 + g_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

形式変換  $z \rightarrow Y$  によって、 $\beta_j$  は定数にできて、さらに

$$z^2 \frac{dY_1}{dz} = [1 + \alpha_1 z + \beta_1 z Y_3] Y_1$$

$$z^2 \frac{dY_2}{dz} = [-1 + \alpha_2 z + \beta_2 z Y_3] Y_2$$

$$z^2 \frac{dY_3}{dz} = [(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)z + (\beta_1 + \beta_2)z Y_3] Y_3$$

ただし、 $\alpha_1 + \alpha_2 - 1 = 0, \beta_1 + \beta_2 = 0$  となる。

$$Y_j = C_j e^{(-1)^j/z} z^{(\alpha_j + \beta_j C_1 C_2)}, \quad (j = 1, 2)$$

$$W = C_3 (= C_1 C_2)$$

の場合が、もとの解にあたる。

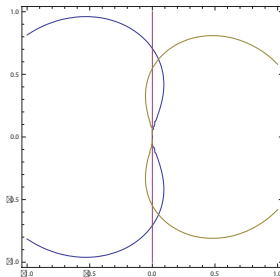
$|Y_j| < \varepsilon, |C_1 C_2| < \varepsilon$  で収束する。

$$|C_1 e^{-1/t}| < \varepsilon, |C_2 e^{1/t}| < \varepsilon$$

は  $\varepsilon \ll 1$  で、空集合になるが

$$|C_1 e^{-1/t} t^\alpha| < \varepsilon, |C_2 e^{1/t} t^\beta| < \varepsilon$$

は空にならない



$$|e^{\pm 1/t} t^{\pm \alpha}| = \exp \frac{\pm u}{u^2 + v^2} (u^2 + v^2), \quad t = u + iv$$

## Painlevé 方程式のべき級数型漸近解と **Boutroux** 変換

$$P1 \quad y \sim \pm \sqrt{-t/6},$$

$$P2 \quad y \sim -a/t + (2\alpha^3 - 2\alpha)/t^4 + \dots,$$

$$y \sim \pm \sqrt{-t/2} + \alpha/(2x) \pm (6\alpha^2 + 1) \sqrt{-2/t^5} + \dots,$$

$$P4 \quad y \sim -2t/3 + \alpha/t + \dots,$$

$$y \sim -2t - \alpha/t + \dots,$$

$$y \sim \pm \sqrt{\beta}/(2t) + \dots,$$

$$P1: y = t^{1/2}v, x = \frac{4}{5}t^{5/4}, \quad v'' = 6v^2 + 1 + \frac{4v}{25x^2} - \frac{v'}{x},$$

$$P2: y = t^{1/2}v, x = \frac{2}{3}t^{3/2}, \quad v'' = 2v^3 + v - \frac{v'}{x} + \frac{v}{9x^2} + \frac{2a}{3x}$$

$$P4: y = tv, x = t^2,$$

$$v'' = \frac{(v')^2}{2v} + \frac{3}{8}v^3 + v^2 + \frac{v}{2} + \frac{v}{8x^2} - \frac{v'}{x} - \frac{av}{2x} + \frac{b}{4vx^2}$$

$$\text{P3d} \quad y \sim \sqrt[3]{-\delta/\alpha\omega^j t^{1/3}}, \quad \omega^3 = 1, (j = 0, 1, 2)$$

$$\text{P3} \quad y \sim \sqrt[4]{-\delta/\gamma i^k}, \quad (k = 0, 1, 2, 3),$$

$$\text{P5} \quad y \sim \pm \sqrt{\frac{\beta}{\delta} \frac{1}{x}} + \left( -\frac{2\beta}{\delta} \pm \frac{\gamma}{2\delta} \sqrt{\frac{\beta}{\delta}} \right) \frac{1}{x^2},$$

$$y \sim \pm \sqrt{-\frac{\delta}{\alpha} x} + 2 \pm \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\sqrt{-\alpha\delta}},$$

$$y \sim -1 + \frac{2\gamma}{\delta x}$$

$$\text{P3: } y'' = \frac{1}{y} y'^2 + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y} - \frac{1}{t} y' + \frac{\alpha y^2}{t} + \frac{\beta}{t}$$

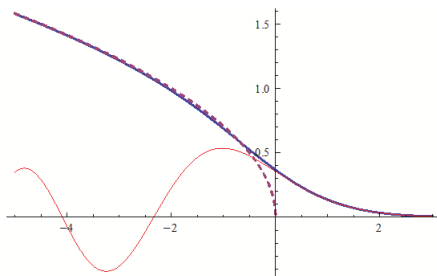
P5:

$$y'' = \left( \frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) y'^2 + \delta \frac{y(y+1)}{y-1} - \frac{1}{t} y' + \frac{(y-1)^2}{t^2} \left( \alpha y + \frac{\beta}{y} \right) + \gamma \frac{y}{t}$$



- べき級数解の個数は**パラメタの数 + 1**
- 各べき級数にはそれぞれ **2parameter** の**指数型解**が存在
- 特別なパラメタに対しては、指数型が消える

P2:  $\alpha = 0$  の場合は **Ablowitz-Segur** 解:  $y \sim r \text{Ai}(t) \quad |r| \leq 1$



$$y \sim \begin{cases} \text{Ai}(t) & (t \rightarrow +\infty) \\ \sqrt{-t/2} & (t \rightarrow -\infty) \end{cases} \quad ( \text{Hasting-McLeod 解} )$$

P3:  $\alpha = -\beta = 2\nu$  の場合 **McCoy-Tracy** (Bessel 函数  $K_\nu$  でも書ける )

$$y \sim 1 + Cx^{-\nu-1/2}e^{-2t}$$

P4:  $\nu = 2\nu + 1, \beta = 0$  の場合 **Clarkson-McLeod**

$$y \sim CD_\nu(\sqrt{2t})^2$$

P5:  $\beta = 0, \delta = 1/2$  の場合 **下村** 1992 (Whittaker 函数  $W_{k,m}$  でも書ける )

$$y \sim Ce^{-t}t^{-\gamma}, \quad (t \rightarrow \infty)$$

## 将来の問題

- **P3, P5, P6** の楕円漸近解析は未完（特殊ケースはわかる）
- 楕円漸近解からべき級数解への**退化極限**  
（第1、第2、第4ではできている）
- 無限遠での**極の分布**、広い領域での正則な解の存在  
第1ではほぼ完成
- 楕円漸近解から確定特異点型の解への**退化極限**
- 確定特異点の周りの極の **spiral 分布**
- 実軸上の **pole-free solution** さまざまな応用
- **完全 WKB 解析** の 2 parameter 解も収束する（予想）

Goal(2013 年まで)

Painlevé 方程式の漸近解析を誰にでもわかる形で示す