解析接続の解析と幾何

大沢健夫

1　はじめに

解析接続はいうまでもなく複素解析における基本的な概念であるが、問題によってそのあらわれ方は様々である。歴史的には、初等関数論の枠組みを拡げる過程で楕円関数やガンマ関数などの研究が進み、それらの諸公式を整合的に書く必要が生じた結果、Weierstrass によってこの概念が導入された。層の言葉で言えば、Weierstrass は n 変数の正則関数を $\mathbb{C}^n$ の構造層の連結成分と考えた。これと Riemann の導入した多様体の考えと合わせて、解析関数の自然な定義域は $\mathbb{C}^n$ 内の領域だけでなく、$\mathbb{C}^n$ のコンパクト化上の分岐 Riemann 領域であろうということになった。一変数関数の場合、これらは比較的単純な対象である。というのも、Riemann 面すなわち等角構造を持つ曲面ないし 1 次元の連結な複素多様体は、正則写像により $\mathbb{CP}^3$ または $\mathbb{C}^3$ 内に閉部分多様体として埋め込めるからである。よって Riemann 面上には然るべき変数があるので関数論が展開可能である。もっともこのことは、任意の Riemann 面は正則凸であり、かつその上に非定数有理型関数が存在するという非自明な事実に支えられている。多変数の場合、一変数のときにはなかった現象が生ずる。その中でも Hartogs が発見した $\mathbb{C}^n$ 上の正則域の擬凸性は、解析接続そのものが興味深い研究対象となりうるという点で画期的であった。Hartogs の理論は関連収束半径の逆数が対数的劣調和性を持つことを敷衍したものであったが、それでは任意の擬凸領域は正則域であろうかという問題が自然に生じ、滑らかな境界を持つ領域に対して擬凸性の微分幾何的表現を与えた Eugenio Elia Levi(1883-1917) にちなんで Levi 問題の名で知られるようになった。これはそれ以後の多変数関数論の中心的課題となった。$\mathbb{C}^n$ 上の不分岐 Riemann 領域に対する Levi 問題は岡潔 [O-1,2] により解決されたが、この偉業は複素解析学における金字塔の名にふさわしい。その延長上で様々な理論が花開いたが、その中で代表的なものは Grauert[G-2] による複素多様体上の Levi 問題の解決と、Hörmander[H] による Bergman 核の境界挙動の評価であろう。これらによって岡理論が指し示したものが一層明確になり、前者は正則写像やベクトル束に対するホモトピー原理へと展開し、後者は Fefferman[Ff] による Carathéodory の定理の高次元化へとつながった。

分岐 Riemann 領域に関しては事情はより複雑で、擬凸性だけでは正則凸性が特徴づけられないことが Grauert[G-4] や Fornaess[Fn] の反例により示された。一方、Riemann 面上の関数論を複素多様体上の関数論へと一般化する立場では、[G-

2] と [H] をコンパクトな複素多様体に関する小平邦彦の結果 [K-1,2] と統一する観点から、Grauert[G-3] は解析空間の孤立特異点論の基礎となる有限性定理に到達し、Andreotti-Vesentini[A-V-1,2]、Griffiths[Gf]、中野茂男 [N-2,3]、Grauert-Riemenschneider[G-R-1,2] は、小平理論を開多様体や特異点付きの解析空間へと拡張して種々の応用を見出した。

Levi 問題の周辺では解析と幾何の理論がこのように展開し、さらなる一般化が模索されてきたが、その一方で解析接続の個別的な研究も続けられてきた。以下では解析接続に関係の深い最近の研究の中から、まず Levi 問題に近いものを取り上げてサーベイする。具体的には、[G-R-1,2] の延長上で得られた [Oh-3,5] における擬凸な完備 Kähler 多様体上のコホモロジー類の接続についての結果と、滑らかな擬凸境界を持つ有界領域上で Hartogs 型の接続定理を論じた [Oh-6] を復習し、そのあとでこれらに関連する最近の研究の中から、[Oh-3,5] については竹内有哉氏の仕事 [Ta]、[Oh-6] については千葉優作氏の仕事 [Ti] とその改良として得られた永田義一氏と Seungjae Lee 氏の仕事 [L-N] を紹介する。次いで部分多様体の近傍どうしの同型の判定に関する Grauert[G-3] の古典的な定理と、Jun-Muk Hwang 氏の最近の結果 [Hw] を紹介する。問題自体は小平消滅定理 [K-1] の意味するところを掘り下げる形で提起されたものであるが (cf.[N-S])、法ベクトル束の正負によって適用できる議論が異なり、しかも法ベクトル束が平坦な場合には反例があるという、やや厄介な問題である。Hwang 氏の議論は法ベクトル束が半正の場合の新しい方法で、森本徹氏の一般論 [M] をふまえている。詳細には触れられないが、問題をある Grassmann 束間の局所的な同型問題に帰着させる仕掛けだけは見てみよう。

2　解析接続とコホモロジー

[Oh-3,5,6] に先行する結果について述べるため、まず解析接続可能性がコホモロジーの言葉で書けることについて復習する。M を n 次元の開複素多様体とし、E を M 上の正則ベクトル束とする。以下では特に断らない限り M は連結かつパラコンパクトであり、E のランク r は有限であるとする。M の開集合 D に対し、$H^{p,q}(D,E)$ で D の (p,q) 型 E 値 $\bar\partial$ コホモロジー群を表し、$H_c^{p,q}(D,E)$ でコンパクト台の同様のコホモロジー群を表す。Dolbeault 同型により $H^{p,q}(D,E) \cong H^q(D,\Omega^p(E))$ かつ $H_c^{p,q}(D,E) \cong H_c^q(D,\Omega^p(E))$ である。ただし Ω^p で正則 p 形式の芽の層を表し、$\Omega^p(E)$ で E 値正則 p 形式の芽の層を表す。Ω^0 を $\mathcal{O}$ と書き、Ω^n を $\mathcal{K}$ と書く。$\mathcal{O}$ は構造層、$\mathcal{K}$ は標準層と呼ばれる。M 内のコンパクト集合 K を走らせて $H^{p,q}(M\setminus K,E)$ の帰納的極限をとったものを $\lim_K H^{p,q}(M\setminus K,E)$ で表す。すると入射と制限写像から誘導される長完全列

$$\cdots \to H_c^{p,q}(M,E) \to H^{p,q}(M,E) \to \lim_K H^{p,q}(M\setminus K,E) \to H_c^{p,q+1}(M,E) \to \cdots$$

ができるので、特に次の二つは同値である。

$H^{p,q}(M,E) \to \lim_K H^{p,q}(M \setminus K, E)$ は全射である。

$H_c^{p,q+1}(M,E) \to H^{p,q+1}(M,E)$ は単射である。

一致の定理により $H^{p,0}(M,E) \to \lim_K H^{p,0}(M \setminus K, E)$ は単射なので、$M \setminus K$ が連結であるようなコンパクト集合 K に対し、$H^{p,0}(M,E) \to H^{p,0}(M \setminus K, E)$ が全射であることと $H_c^{p,1}(M,E) \to H^{p,1}(M,E)$ が単射であることは同値である。

3 消滅定理と有限性定理

n 次元開多様体 M が Stein 多様体すなわち $\mathbb{C}^N$ の閉複素部分多様体と正則同値であれば、$q \le n-1$ のとき $H_c^{p,q}(M,E) = 0$ であることが Cartan の定理 B と Serre の双対性定理より従うので、 とくに $H^{p,q}(M,E) \to \lim_K H^{p,q}(M \setminus K, E)$ は $q \le n-2$ のとき全射である。多変数関数論の入門的な話でよく紹介される Bochner-Hartogs の拡張定理は、$D \subset \mathbb{C}^n$ $(n \ge 2)$ のときコンパクト集合 $K \subset D$ が $\mathbb{C}^n$ 内で連結な補集合を持てば $D \setminus K$ 上のすべての正則関数は D まで解析接続されるというものであったが、これは $H_c^1(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) = 0$ の帰結として理解できる。従って $H_c^{p,q}(M,E) \to H^{p,q}(M,E)$ の単射性条件や $H_c^{p,q}(M,E)$ の消滅条件は、解析接続の観点からはとくに興味深い問題である。後者を Stein 多様体を含む重要なクラスである強擬凸多様体へと広げたのが [G-R-1,2] であった。M が強擬凸であるとは、M 上に C^2 級の多重劣調和 (plurisubharmonic=psh) な皆既関数 (exhaustion function) があって、補集合がコンパクトな集合上で強多重劣調和になっていることをいう。強擬凸多様体は岡理論を複素多様体上に一般化した [G-2] で導入され、基本的結果として任意の解析的連接層 $\mathcal{F} \to M$ に対して $\dim H^q(M,\mathcal{F}) < \infty$ $(q \ge 1)$ であることが示された。M の正則凸性は $\mathcal{O}$ の連接イデアル層 $\mathcal{I}$ に対して $\dim H^1(M,\mathcal{I}) < \infty$ であることの系である。[G-3] では解析空間の孤立特異点の非特異モデルとして現れる強擬凸多様体について立ち入った解析がなされ、その過程で閉多様体上の直線束に対する正値性と豊富性の一致が強擬凸領域上のコホモロジー有限性定理から従うことが判明した。これをふまえて強擬凸多様体上で次の消滅定理を確立し、その系として小平消滅定理を導いたのが [G-R-1,2] である。

定理 1. (Grauert-Riemenschneider の消滅定理) 強擬凸多様体 M とその上の正則ベクトル束 E に対し、E が中野半正ならば $H^{n,q}(M,E) (\cong H^q(M,\mathcal{K}(E)) = 0$ $(q \ge 1)$ である。

これと Serre の双対性定理により次を得る。

系. 上の条件下で $H_c^{0,q}(M,E^*) = 0$ $(q \le n-1)$. とくに $H_c^q(M,\mathcal{O}) = 0$ $(q \le n-1)$.

ただし E^* は E の双対ベクトル束を表す。また、E が中野半正であるとは次の条件をみたすファイバー計量 h を持つことをいう。

任意の点 $x \in M$ に対し、x の周りの M の局所座標 $z = (z_1, \ldots, z_n)$ と E の局所枠を選んで、h の行列表現が次をみたすようにできる。

1) $h(x)$ は単位行列であり

2) $dh(x) = 0$ であり

3) $\left(-\frac{\partial^2 h}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\right)(x)$ は nr 次 Hermite 行列として半正定値である。

ランクが 2 以上のベクトル束の正値性は、正直線束に対する小平消滅定理を一般化した [N-1](中野消滅定理) で導入されたもので、上の半正値性はそれを自然に拡げたものである。M が Stein 多様体であればすべての正則ベクトル束は中野正であるが強擬凸多様体上ではそうでない。しかるに E に一定の曲率条件があれば E^* に対して Stein 多様体と同様の解析接続定理が成り立つというのが定理 1 の意味である。E の曲率条件が半正でよいのなら M についてはどうかと問うのは自然であろう。皆既関数の Levi 形式 (=複素 Hessian) の正値性が [G-2] での Stein 性の特徴づけであり、この正値性をコンパクト集合を除いて仮定したのが強擬凸性であったので、より一般に多重劣調和な皆既関数を持つ多様体上での消滅定理や解析接続が気になるところである。正則凸な多様体がすべてこのクラスに属することも動機の一つになる。この方向に歩を進めた中野 [N-2] は、M が C^∞ 級の多重劣調和皆既関数 Φ を持つとき低位集合 $M_c := \{x \in M; \Phi(x) < c\}$ に対する消滅定理を示し、これを受けた風間 [Ka-1] は次の消滅定理を得た。

定理 2. M が C^∞ 級の多重劣調和皆既関数を持ち E が中野正ならば $H^{n,q}(M, E) = 0$ $(q \geq 1)$ である。

定理 2 の仮定をみたす多様体は弱 1 完備多様体と呼ばれる。これは Stein 性を特徴づける Grauert の条件が、[G-2] を一般化した Andreotti-Grauert 理論 [A-G] で "1-complète"(1 完備) と呼ばれたことによる。弱 1 完備多様体を皆既関数と対にして (M, Φ) のように記すことも多い。弱 1 完備多様体の好例は複素 Lie 群であろう (cf. [Ka-2])。中野 [N-2] は次を示した。

定理 3. M が弱 1 完備で E が正直線束なら $H^{p,q}(M, E) = 0$ $(p + q > n)$.

定理 1 では M は開多様体でなければいけないが、定理 2 と定理 3 はそうでなく、それぞれ閉多様体上の中野消滅定理と秋月・中野消滅定理の一般化になっている。これらを踏まえ、中野は定理 1 を弱 1 完備多様体へと一般化することを提案した。

すなわち、強擬凸を弱1完備(=弱擬凸)に変える代わりに E は M のコンパクト集合の外で中野正であるとする。こう仮定したときに $\dim H^{n,q}(M,E) < \infty$ $(q \geq 1)$ であることや、より詳しく、E が $M \setminus M_c$ 上で中野正ならば制限準同型

$$H^{n,q}(M,E) \to H^{n,q}(M_c,E)$$

は $q \geq 1$ のとき同型であり $q = 0$ のとき稠密な像を持つことを、[G-2] と [A-G] のコホモロジー理論にならって予想したのである。これは定理2の一般化でもあり、[Oh-1] をへて [N-R] で解決された。なお、[Oh-2] では定理3がこの形で一般化されている。

ところが弱1完備多様体 M 上で E と E^* が同時にコホモロジー有限性定理の仮定である「コンパクト集合の外で中野正」という条件をみたすことは、M が強擬凸の場合を除けばありえない。よって E について接続定理が成立するが E の切断は0だけという状況がままあり、解析接続の立場からは甚だ物足りない。そこで一旦は強擬凸の場合に戻り、中野半正な E に対して $H^{n,q}(M,E)$ だけでなく $H^{p,q}(M,E)$ に対して定理3に似た定理1の拡張が得られないかと考えた。より正確には、[G-R-1] を読み、Grauert と Riemenschneider はそういうことを目ざしたのではないかと忖度した。その結果、Lieberman-Rossi[L-R] の拡張を示唆した藤木明氏のアイディアに刺激を受けて生まれたのが [Oh-3,5] である。

4 Hodge 理論と解析接続

n 次元弱1完備多様体 (M,Φ) に対し、[Oh-3] では M の $\bar\partial$ コホモロジー群 $H^{p,q}(M)$, $H_c^{p,q}(M)$ および de Rham コホモロジー群 $H^r(M,\mathbb{C})$, $H_c^r(M,\mathbb{C})$ について次を示した。

定理 4. M が Kähler 計量を持ち、かつ Φ の Levi 形式のランクがあるコンパクト集合の外で k 以上であれば、入射準同型 $H_c^{p,q}(M) \to H^{p,q}(M)$ $(p+q \leq k-1)$ および $H_c^r(M,\mathbb{C}) \to H^r(M,\mathbb{C})$ $(r \leq k-1)$ は単射である。

証明には完備な Kähler 多様体上の L^2 調和形式に対する Hodge 理論 (特に Lefschetz 同型) を M_c 上で用いた。より具体的には、M_c の境界近くで $\partial\bar\partial\log(\frac{1}{c-\Phi})$ と同様の挙動を持つ計量に対して $\bar\partial$ 作用素に対する L^2 調和形式の空間を考えたが、これが次数が $k+1$ 以上の範囲で通常の $\bar\partial$ コホモロジーの空間に同型であることを示す必要があり、そのために新しい議論を必要とした。ポイントは $\bar\partial$ 作用素の値域の閉性で、そこで計量の境界挙動についての情報をフルに使う必要があったが、この部分は後に Demailly[Dm] がもっと簡単な議論で示した。([Oh-T] でも別証を与えた。)

M の de Rham コホモロジーについても L^2 調和形式で表現可能であるという事

情は同じで、その結果、閉 Kähler 多様体上の Hodge 理論を引き写した同型

$$H^{p,q}(M) \cong \overline{H^{q,p}(M)} \ \ \text{(Hodge symmetry)}$$

および

$$H^r(M,\mathbb{C}) \cong \oplus_{p+q=r} H^{p,q}(M) \ \ \text{(Hodge decomposition)}$$

が $2n-k+1$ 次以上で成立することが得られ、これを踏まえて Kähler 形式 ω の外積による Lefschetz 同型

$$\omega^s : H_c^{p,q}(M) \to H^{p+s,q+s}(M) \ \ (p+q=n-s)$$

$$(\text{resp. } \omega^s : H_c^r(M,\mathbb{C}) \to H^{r+2s}(M,\mathbb{C}) \ \ (r=n-s))$$

が $n-s \le k-1$ の範囲で得られるのである。これより入射準同型 $H_c^{p,q}(M) \to H^{p,q}(M)$ $(p+q \ge 2n-k+1)$ (resp. $H_c^r(M,\mathbb{C}) \to H^r(M,\mathbb{C})$ $(r \ge 2n-k+1)$) が全射であることがただちに従い、Serre 双対性およびポアンカレ双対性により所期の結果が得られる。

強擬凸多様体は適当にブローアップすれば強擬凸 Kähler 多様体になり $\dim H_c^{0,q}(M)$ はブローアップで不変なので、E が自明束の場合には定理 1 は定理 4 に含まれる。同様の理由で次の系が得られる。

系. M が強擬凸ならば制限準同型

$$H^{p,q}(M) \to \lim_K H^{p,q}(M \setminus K) \ \ (p+q \le n-2)$$

および

$$H^r(M,\mathbb{C}) \to \lim_K H^r(M \setminus K,\mathbb{C}) \ \ (r \le n-2)$$

は全射である。

これは定理 1 の系の一般化としてはほぼ満足すべき結果であろう。ちなみに、完備な Kähler 計量を持つ多様体上で Levi 問題を考えるというアイディアは Grauert の学位論文 [G-1] で提出されたものである。

5　解析接続と接触幾何

さて、M が強擬凸であれば M_c もそうであり、さらに ∂M_c が滑らかな実超曲面であれば $\lim_K H^{p,q}(M_c \setminus K)$ は ∂M_c の接触幾何的不変量であり、$\lim_K H^r(M_c \setminus K,\mathbb{C}) \cong H^r(\partial M_c)$ である。ここで ∂M_c の接触構造として考えるのは、$\theta := \sqrt{-1}(\partial\Phi - \bar\partial\Phi)$ を ∂M_c の正則接空間 $T'(\partial M_c) := T^{1,0}M|_{\partial M_c} \cap (T(\partial M_c)\otimes\mathbb{C})$ とその複素共役を零化する 1 形式と見たもので、強擬凸性より $d\theta$ は非退化 2 次形式になっている。強擬凸領域の境界上のこの構造を一般の奇数次元の多様体に拡げて、強擬凸な CR(Cauchy-Riemann) 構造が定義される。

定義 1. 連結な $2n-1$ 次元の C^∞ 級多様体 X に対し、X の接ベクトル束 TX の複素化 $TX \otimes \mathbb{C}$ の複素部分束 $T'X$ および TX の部分直線束 F があって

$$TX \otimes \mathbb{C} = T'X \oplus \overline{T'X} \oplus \mathbb{C}F$$

が成り立つとき、$T'X$ を X 上の概 CR 構造という。$T'X$ が Lie bracket 積に関して閉じているとき X は CR 多様体であるといい、さらに $T'X$ の局所枠 $e_1, \ldots, e_{n-1}$ に対する Lie brackets $\sqrt{-1}[e_i, \overline{e_j}]$ の F 成分のなす $(n-1)$ 次 Hermite 行列が正定値または負定値であるとき、$T'X$ を X 上の強 CR 構造といい X を強擬凸 CR 多様体と呼ぶ。

∂M_c 上には $T'(\partial M_c)$ という標準的な CR 構造があり、∂M_c 上の C^∞ 関数で M_c の内部に正則に延びるものは $\overline{T'(\partial M_c)}$ により零化される。これに応じて CR 多様体 X 上の関数で $\overline{T'X}$ で零化されるものを考え、CR 関数と呼ぶ。CR 多様体から複素多様体または CR 多様体への CR 写像も同様に定義され、CR 同型の概念が定まる。

Boutet de Monvel[B] は次の基本的結果を示した。

定理 5. $n \geq 3$ のとき、コンパクトな $(2n-1)$ 次元強擬凸 CR 多様体は CR 写像で $\mathbb{C}^{2n+1}$ に埋め込める。

$2n-1$ 次元の強擬凸多様体 X から $\mathbb{C}^N$ への CR 埋め込みがあれば、これに一般の方向への射影を合成することにより、X は局所的には $\mathbb{C}^n$ 内の実超曲面に標準的な CR 構造を与えたものと同型であることがいえる。よって $n \geq 2$ の時には隣接する局所 CR 埋め込みどうしを超曲面の片側に解析接続することにより X を境界に持つ開複素多様体が作れる。この観察と定理 5 を合わせると次が得られる。

定理 6. (cf. [Oh-4]) 5 次元以上のコンパクトな強擬凸多様体は複素多様体内の実超曲面と CR 同型である。

定理 6 と解析集合の Hartogs 型接続および広中の特異点解消定理を合わせると、5 次元以上のコンパクトな強擬凸多様体は ∂M_c の形のものに限ることがわかる。

よって $H^r(M, \mathbb{C}) \to \lim_K H^r(M \setminus K, \mathbb{C})$ $(r \leq n-2)$ の全射性と $H_c^r(M, \mathbb{C}) \to H^r(M, \mathbb{C})$ $(r \geq n+1)$ の全射性を合わせれば、[Bu] や [PP] でも指摘されたようにカップ積

$$H^{r_1}(X, \mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes H^{r_m}(X, \mathbb{C}) \to H^r(X, \mathbb{C}) \ \ (r = r_1 + \cdots + r_m)$$

は $r_1, \ldots, r_m \leq n-2$ かつ $r \geq n+1$ のときは 0 になる。補足であるが、[Oh-3] ではこの理由により 5 次元以上の実トーラス上には強擬凸 CR 構造が入らないことや、$X = \partial M_c$ が解析集合の孤立特異点のリンクのときには $H_0^n(M_c, \mathbb{C}) \to H^n(M_c, \mathbb{C})$ が同型になることなどを指摘し、後者については [Oh-5] で詳しい証明を与えた[1]。

最近、この見方を進めて竹内 [Ta] は次を示した。

[1] [PP] はもっと詳しい.

定理 7. 5 次元以上のコンパクトな強擬凸 CR 多様体 X の k 次 Chern 類 c_k について、カップ積 $c_{k_1}\cdots c_{k_m}$ は $2(k_1+\cdots+k_m)\geq n+1$ のとき $H^{2(k_1+\cdots+k_m)}(X,\mathbb{C})$ 内で 0 である。

証明. $X=\partial M_c$ とすると、c_k は複素ベクトル束 $T'X$ の k 次 Chern 類 $c_k(T'X)$ であるが、$T'X$ と自明束の直和が M の正則接束 $T'M$ の X への制限に等しいことから $c_k=c_k(T'M)|_X$ である。よって $2(k_1+\cdots+k_m)\geq n+1$ ならば上と同様の理由で $c_{k_1}\cdots c_{k_m}=0$ となる。 □

この証明と上の補足から、X が孤立特異点のリンクであるときには $2(k_1+\cdots+k_m)=n$ のときにも $c_{k_1}\cdots c_{k_m}=0$ となる。

これらは解析接続の定理が多様体の位相幾何に役立った例であるが、やや意外性がある。定理 7 などは、定理 6 や解析接続を使わずに証明できてもおかしくないような気がする。もちろんその反対に、こういった議論を境界付き多様体の内部構造と境界構造の対応の一般論へと拡張することにも意味があろう。しかしいずれにしても目下のところは実態を伴わないので、ここで話を Hartogs 型の解析接続に戻して [Ti] と [L-N] へとつなげよう。

6 弱擬凸領域上の解析接続

以下では M は再び n 次元の開複素多様体であるとし、D は M 内の相対コンパクトな領域で C^∞ 級の滑らかな境界を持つものとする。$\rho: M\to\mathbb{R}$ を D の定義関数とする。すなわち ρ は C^∞ 級で $D=\{x;\rho(x)<0\}$ であり、かつ $d\rho$ は ∂D 上で零点を持たないとする。

定義 2. D が擬凸であるとは、$\partial\bar\partial\rho$ を $T'(\partial D)$ 上で Hermite 形式として見たもの (=:ρ または ∂D の Levi 形式) がいたるところ半正であることをいう。

[Oh-6] では L^2 評価の方法で次を示した。

定理 8. M が Kähler 計量を持ち、D が擬凸であり、かつ ∂D の Levi 形式が恒等的に 0 でなければ $H^1_c(D,\mathcal{O})=0$ である。

系. 上の状況で ∂D は連結である。

既に述べたように、複素多様体上では擬凸領域上に非定値正則関数がない場合も多く、その意味では定理 8 は孤立気味であった。しかしその証明方法は次の結果を改良するのに役立った。

定理 9. (cf. [Ti,Theorem 1]) $n\geq 4$ とし、D は $\mathbb{C}^n$ 内の有界な領域であり、関数 $\varphi: D\to(-\infty,0)$ は多重劣調和で C^∞ 級であり、かつ $z\to\partial D$ のとき $\varphi(z)\to 0$ であるとする。このとき D の部分領域 V で $\mathrm{supp}(\partial\bar\partial\varphi)^{n-3}$ を含むものに対し、制限写像 $H^0(D,\mathcal{O})\to H^0(V,\mathcal{O})$ は全射である。

[L-N] では上の条件 $n \geq 4$ が定理 8 の証明で用いられた双対性の議論によって $n \geq 3$ に緩められ、さらに $\mathrm{supp}(\partial\bar{\partial}\varphi)^{n-3}$ は $\mathrm{supp}(\partial\bar{\partial}\varphi)^{n-2}$ でよいことが示された。また、∂D が滑らかな場合に次が得られた。

定理 10. $n \geq 3$ とし、D は $\mathbb{C}^n$ 内の滑らかな境界を持つ有界擬凸領域で、閉包 $\overline{D}$ の近傍上で定義された多重劣調和な C^∞ 級の定義関数 φ を持つとする。このとき領域 $V \subset \mathbb{C}^n$ に対し、φ の Levi 形式のランクが $n-2$ 以上である点全体の集合が V 内で相対コンパクトならば $H^0(D, \mathcal{O}) \to H^0(V \cap D, \mathcal{O})$ は全射である。

ちなみに定理 10 は $n \geq 2$ でも成り立つ。$n = 2$ のときは Bochner-Hartogs の定理に含まれるからである。

7 埋め込み写像の同型問題

Grauert の論文の中でも名作中の名作である [G-3] の中で、強擬凸多様体上の関数論が古典的な代数関数論の延長上にある問題と結ばれた。一般に閉複素多様体 A、複素多様体 M、および正則な埋め込み $\iota : A \hookrightarrow M$ に対し、A のイデアル層 $\mathcal{I}_A$ のべきによる M の構造層 $\mathcal{O}_M$ の剰余層 $\mathcal{O}_M/\mathcal{I}_A^\mu$ を考え、環つき空間 $(A/M)_\mu := (A, (\mathcal{O}_M/\mathcal{I}_A^{\mu+1})|_A)$ を A の M における μ 次の近傍と呼ぶ。また、$(A/M)_\mathcal{O} := (A, \mathcal{O}_M|_A)$、$(A/M)_\infty := (A, \lim_{\mu\to\infty} (\mathcal{O}_M/\mathcal{I}_A^\mu)|_A)$ とおく。この (A, M, ι) と同様の三つ組 $(\tilde{A}, \tilde{M}, \tilde{\iota})$ に対する任意の同型 $\psi : (A/M)_\infty \to (\tilde{A}/\tilde{M})_\infty$ および任意の μ に対し、ある同型 $\Psi : (A/M)_\mathcal{O} \to (\tilde{A}/\tilde{M})_\mathcal{O}$ が存在して $\Psi|_{(A/M)_\mu} = \psi|_{(A/M)_\mu}$ となるとき、(A, M, ι) は形式化可能であるという[2]。便宜上、以下では A と $\iota(A)$ を同一視し、略して (A, M) は形式化可能という言い方をする。(A, M) がいつ形式化可能かという問題を埋入形式化問題と呼ぶことにする。この幾何学的な同型問題に対し、[G-3] では次の答が与えられた。

定理 11. A が M 内で強擬凸な近傍を持てば (A, M) は形式化可能である。

実際にはより詳しく、このとき (A, M, ι) に応じた μ があり、$(A/M)_\mu \cong (\tilde{A}/\tilde{M})_\mu$ ならば $(A/M)_\mathcal{O} \cong (\tilde{A}/\tilde{M})_\mathcal{O}$ であることが鮮やかな幾何学的議論により示されている。

A の M における法ベクトル束 $N_{A/M}$ は短完全列

$$0 \to T^{1,0}A \to T^{1,0}M|_A \to N_{A/M} \to 0$$

により定義される。$N_{A/M}$ について、ランクが 1 なら負 (:=$N_{A/M}^*$ が正) であることと零切断が強擬凸な近傍を持つことは同値である。このとき A は M 内で強擬凸な近傍を持つ[3]。一般に、零切断が強擬凸な近傍を持つベクトル束は Grauert 負であ

[2] 英語では“formal principle holds” という表現であるが意訳した.
[3] この逆には簡単な反例がある (cf.[G-3,§3.8]).

るという。$N_{A/M}$ が Grauert 負なら A は M 内で強擬凸な近傍を持つ。

定理 11 の系. $N_{A/M}$ が Grauert 負であれば (A, M) は形式化可能である。

歴史的には $N_{A/M}$ が正の場合が先に調べられた。それには Poincaré[P-1,2] や Severi[S-1,2] の仕事を背景に、埋入形式化問題が小平消滅定理との関連性から [K-3,4] や [K-S] などで浮かび上がった経緯が絡んでいる。詳細は割愛するが、[N-S] を受けた Griffiths[Gf] は、$N_{A/X}$ の曲率が一定の正値性を持つ場合に解析接続の問題としてこの問題を解いている。(A, M) が形式化不能な例は A が楕円曲線で $N_{A/M}$ が平坦束の場合に Arnol'd[A] によってはじめて与えられ、一般の閉 Riemann 面の場合、上田哲生 [U] によって詳しく調べられた。$A \cong \mathbb{CP}^n$ のときは $N_{A/M}$ の如何に関わらず常に形式化可能であろうと予想されるが、$n = 1$ の場合にさえ未解決である。ここに切り込んできたのが Hwang 氏の論文 [Hw] であり、特に次が示された。

定理 12. $A \cong \mathbb{CP}^1$ であり、$N_{A/M}$ は射影的 (: $\iff$ 大域切断で生成される) とする。このとき M の Douady 空間内の点 $\{A\}$ の近傍内の稠密な開集合 U があって、$\{A'\} \in U$ ならば (A', M) は形式化可能である。

証明は、局所幾何構造の形式的同型の収束性に関する森本理論 [M] と閉複素部分多様体の族がなす Douady 空間の一般論を、次の条件下で組み合わせて行う。

定義 3. 複素多様体 $\mathcal{B}, \mathcal{U}, \mathcal{X}$ が正則写像 $\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{B}, \sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ で結ばれているとする。$(\mathcal{B}, \mathcal{U}, \mathcal{X}, \rho, \sigma)$ は以下の条件をすべて満たすとき順分離族 (nicely separating family) であるという。
(1) ρ はプロパーで臨界点を持たない全射である。
(2) σ は臨界点を持たない全射で、ρ の各ファイバーを $\mathcal{X}$ の部分多様体として埋め込む。
(3) $p = \dim\mathcal{U} - \dim\mathcal{X}$ とし、$\rho' : \mathcal{U} \to \mathrm{Gr}(p, T^{1,0}\mathcal{B})$ を ρ が誘導する Grassmann 束への写像とすれば、ρ' は単射である。

形式化可能性が U 内の点に限るということは森本理論を使う以上避けられないが、順分離性がみたされる自然な状況は多く、[Hw] においては A.Hirschowitz 氏が [Hi] で挙げた予想が定理 12 と同様の意味で「一般の点において」正しいことも示されている。

参考文献

[A-G] Andreotti,A. and Grauert, H., *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes,* Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 193-259.

[A-V-1] Andreotti, A. and Vesentini, E., *Sopra un teorema di Kodaira*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **15** (1961), 283-309.

[A-V-2] ——, Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **25** (1965), 81-130.

[A] Arnol'd, V. I., *Bifurcations of invariant manifolds of differential equations, and normal forms of neighborhoods of elliptic curves,* (Russian) Funkcional. Anal. i Priložen. **10** (1976), no. 4, 1-12.

[B] Boutet de Monvel, L., *Intégration des équations de Cauchy-Riemann induites formelles,* Lions-Schwartz 1974-1975; Équations aux derivées partielles linéaires et non linéaires, pp. Exp. No. 9, 14 pp. Centre Math., cole Polytech., Paris, 1975.

[Bu] Bungart, L., *Vanishing cup products on pseudoconvex CR manifolds,* The Madison Symposium on Complex Analysis (Madison, WI, 1991), vol. 137 of Contemp. Math. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1992, pp. 105-111.

[Dm] Demailly, J.-P., *Cohomology of q-convex spaces in top degrees*, Math. Z. **204** (1990), 283-295.

[Ff] Fefferman, C., *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains,* Invent. Math. 26 (1974), 1-65.

[Fn] Fornaess, J.- E., *A counterexample for the Levi problem for branched Riemann domains over* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 234 (1978), no. 3, 275-277.

[G-1] Grauert, H., *Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die vollständige Kählersche Metrik*, Math. Ann. **131** (1956), 38-75.

[G-2] ——, *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds,* Ann. of Math. **68** (1958), 460-472.

[G-3] ——, *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen,* Math. Ann. **146** (1962), 331-368.

[G-4] ——, *Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten*, Math. Z. 81 (1963), 377-391.

[G-R-1] Grauert, H. and Riemenschneider, O., *Kählersche Mannigfaltigkeiten mit hyper-q konvexem Rand,* Problems in analysis (Lectures Sympos. in honor of Salomon Bochner, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1969), pp. 61-79.

[G-R-2] ——, *Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen*, Invent. Math. **11** (1970), 263-292.

[Gf] Griffiths, P.- A., *The extension problem in complex analysis. II. Embeddings with positive normal bundle,* Amer. J. Math. **88** (1966), 366-446.

[Hi] Hirschowitz, A. *On the convergence of formal equivalence between embeddings,* Ann. of Math. 113 (1981) 501-514.

[H] Hörmander, L., L^2 *estimates and existence theorems for the* $\bar\partial$ *operator*, Acta Math. **113** (1965), 89-152.

[Hw] Hwang, J.-M., *An application of Cartan's equivalence method to Hirschowitw's conjecture on the formal principle,* preprint.

[Ka-1] Kazama, H., *Approximation theorem and application to Nakano's vanishing theorem for weakly 1-complete manifolds*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **27** (1973), 221-240.

[Ka-2] ——, *On pseudoconvexity of complex Lie groups*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **27** (1973), 241-247.

[K-1] Kodaira, K. *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks,* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 39, (1953). 1268-1273.

[K-2] ——, *On Kähler varieties of restricted type,* Ann. Math. **60** (1954), 28-48.

[K-3] ——, *Some results in the transcendental theory of algebraic varieties,* Ann. of Math. **59** (1954), 86-134.

[K-4] ——, *Characteristic linear systems of complete continuous systems,* Amer. J. Math. **78** (1956), 716-744.

[L-N] Lee, S. and Nagata, Y., *An extension theorem of holomorphic functions on hyperconvex domains,* arXiv:1811.06438v1.

[L-R] Lieberman, D.and Rossi, H. *Deformations of strongly pseudo-complex manifolds,* Rencontre sur l'analyse complexe plusieurs variables et les systmes surdtermins (Textes Conf., Univ. Montral, Montreal, Que., 1974), pp. 119165. Presses Univ. Montral, Montreal, Que., 1975.

[M] Morimoto, T. *Sur le problème d'équivalence des structures géométriques,* Japan. J. Math. 9 (1983) 293-372.

[N-1] Nakano, S., *On complex analytic vector bundles*, J. Math. Soc. Japan **7** (1955), 1-12.

[N-2] ——,*Vanishing theorems for weakly 1-complete manifolds,* Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, 1973, pp.169-179.

[N-3] ——, *Vanishing theorems for weakly 1-complete manifolds, II,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. **10** (1974), 101-110.

[N-R] Nakano, S. and Rhai, T.-S., *Vector bundle version of Ohsawa's finiteness theorems*, Math. Japon. **24** (1979/80), 657-664.

[N-S] Nirenberg, L. and Spencer, D. C., *On rigidity of holomorphic imbeddings,* 1960 Contributions to function theory (Internat. Colloq. Function Theory, Bombay, 1960) pp. 133-137, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay

[Oh-1] Ohsawa, T., *Finiteness theorems on weakly 1-complete manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **15** (1979), 853-870.

[Oh-2] ——, *On $H^{p,q}(X, B)$ of weakly 1-complete manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **17** (1981), 113-126.

[Oh-3] ——, *A reduction theorem for cohomology groups of very strongly q-convex Kähler manifolds*, Invent. Math. **63** (1981), 335-354. *Addendum'* Invent. Math. **66** (1982), 391-393.

[Oh-4] ——, *Global realization of strongly pseudoconvex CR manifolds,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 20 (1984), no. 3, 599-605.

[Oh-5] ——, *交叉 cohomology – L^2 理論と混合 Hodge 理論の交叉点,* 数理解析研究所講究録 693 1989 pp.23-40.

[Oh-6] ——, *Hartogs type extension theorems on some domains in Kähler manifolds*, Ann. Polon. Math. **106** (2012), 243-254.

[Oh-T-2] Ohsawa, T. and Takegoshi, K., *Hodge spectral sequence on pseudoconvex domains*, Math. Z. **197** (1988), 1-12.

[O-1] Oka, K., *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables VI. Domaines pseudoconvexes*, Tôhoku Math. J. **49** (1942), 15-52.

[O-2] ——, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables IX. Domaines finis sans point critique intérieur*, Jap. J. Math. **23** (1953), 97-155.

[P-1] Poincaré, H., *Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques,* Annales École Normale Supérieur, III s., vol. 27 (1910), 55-108.

[P-2] ——, *Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques,* Situngsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft, vol. 10 (1911), 28-55.

[PP] Popescu-Pampu, P., *On the cohomology rings of holomorphically fillable manifolds,* Singularities II, 169-188, Contemp. Math., 475, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[S-1] Severi, F., *Sulla teoria degl'integrali semplici di* 1^a *specie appartenenti ad una superficie algebrica,* Rendiconti della Reale Academi Nazionale dei Lincei, s. V, vol. XXX (1921), seven notes: i) pp. 163-167; ii) pp. 204-208; iii) pp. 231-235; iv) pp. 276-280; v) 296-301; vi) pp. 328-332; vII) pp. 365-367.

[S-2] ——, *Sul teorema fondamentale dei sistemi continui di curve,* Annali di Matematica, s. IV, vol. XXIII (1944), 149-181.

[Ta] Takeuchi, Y., *A constraint on Chern classes of strictly pseudoconvex CR manifolds,* arXiv:1808.02209v1

[Ti] Tiba, Y., *The extension of holomorphic functions on a non-pluriharmonic locus,* arXiv:1706.01441v2

[U] Ueda, T., *On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle,* J. Math. Kyoto Univ. **22** (1982/83), 583-607.