$G_2/SO(4)$ に関する Penrose 型 twistor 対応

中田　文憲

福島大学　　人間発達文化学類

大橋美佐氏 (名工大), 橋本英哉氏 (名城大), 間下克哉氏 (法政大) との共同研究

2017 年 3 月 8 日　　沼津研究会

Introduction

例外型単純 Lie 群 G_2 に関して次の双ファイブレーションがある

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & G_2/U(2) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ G_2/SU(3) & & G_2/SO(4) \end{tikzcd}$$

$G_2/SO(4)$ は 8 次元の Riemann 対称空間であり $SO(4)$-構造を持つが,

$$SO(4) \subset Sp(1)Sp(2) \subset SO(8) \subset GL(8,\mathbb{R})$$

により四元数ケーラー構造 $+\alpha$ の構造を持つと解釈できる．さらにこの「$+\alpha$」は上記を「ツイスター対応」とみて誘導される幾何構造であると期待される．

その幾何構造は $G_2/SO(4)$ 上の自然な対称 3-形式 γ と, その可積分性によって特徴付けられる．

Introduction

例外型単純 Lie 群 G_2 に関して次の双ファイブレーションがある

$$\begin{tikzcd} & G_2/U(2) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ G_2/SU(3) & & G_2/SO(4) \end{tikzcd}$$

$G_2/SO(4)$ は 8 次元の Riemann 対称空間であり $SO(4)$-構造を持つが,

$$SO(4) \subset Sp(1)Sp(2) \subset SO(8) \subset GL(8,\mathbb{R})$$

により四元数ケーラー構造 $+\alpha$ の構造を持つと解釈できる. さらにこの「$+\alpha$」は上記を「ツイスター対応」とみて誘導される幾何構造であると期待される.

その幾何構造は $G_2/SO(4)$ 上の自然な対称 3-形式 γ と, その可積分性によって特徴付けられる.

Introduction

例外型単純 Lie 群 G_2 に関して次の双ファイブレーションがある

$$\begin{tikzcd} & G_2/U(2) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ G_2/SU(3) & & G_2/SO(4) \end{tikzcd}$$

$G_2/SO(4)$ は 8 次元の Riemann 対称空間であり $SO(4)$-構造を持つが,

$$SO(4) \subset Sp(1)Sp(2) \subset SO(8) \subset GL(8, \mathbb{R})$$

により四元数ケーラー構造 $+\alpha$ の構造を持つと解釈できる．さらにこの「$+\alpha$」は上記を「ツイスター対応」とみて誘導される幾何構造であると期待される．

その幾何構造は $G_2/SO(4)$ 上の自然な対称 3-形式 γ と, その可積分性によって特徴付けられる．

Introduction

例外型単純 Lie 群 G_2 に関して次の双ファイブレーションがある

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & G_2/U(2) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ G_2/SU(3) & & G_2/SO(4) \end{tikzcd}$$

$G_2/SO(4)$ は 8 次元の Riemann 対称空間であり $SO(4)$-構造を持つが,

$$SO(4) \subset Sp(1)Sp(2) \subset SO(8) \subset GL(8, \mathbb{R})$$

により四元数ケーラー構造 $+\alpha$ の構造を持つと解釈できる. さらにこの「$+\alpha$」は上記を「ツイスター対応」とみて誘導される幾何構造であると期待される.

その幾何構造は $G_2/SO(4)$ 上の自然な対称 3-形式 γ と, その可積分性によって特徴付けられる.

1. 八元数と G_2

八元数と G_2

四元数 $\quad \mathbb{H} = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\langle 1, i, j, k \rangle \quad (\simeq \mathbb{R}^4)$

$$\mathrm{Im}\,\mathbb{H} = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\langle i, j, k \rangle$$

八元数 $\quad \mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\langle 1, i, j, k, \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon \rangle \quad (\simeq \mathbb{R}^8)$

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})\varepsilon.$$

$$\mathrm{Im}\,\mathbb{O} = \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon \quad (\simeq \mathbb{R}^7)$$

$$G_2 = \mathrm{Aut}\,\mathbb{O} = \left\{ g \in GL(\mathbb{O}) \;\middle|\; g(xy) = g(x)g(y) \ \text{ for } \ \forall x, y \in \mathbb{O} \right\}$$

$$\subset SO(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) = SO(7).$$

G_2 は 14 次元の例外型単純 Lie 群になる.

八元数と G_2

四元数 $\mathbb{H} = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\langle 1, i, j, k\rangle \quad (\simeq \mathbb{R}^4)$

$$\mathrm{Im}\,\mathbb{H} = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\langle i, j, k\rangle$$

八元数 $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\langle 1, i, j, k, \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon\rangle \quad (\simeq \mathbb{R}^8)$

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})\varepsilon.$$

$$\mathrm{Im}\,\mathbb{O} = \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon \quad (\simeq \mathbb{R}^7)$$

$$G_2 = \mathrm{Aut}\,\mathbb{O} = \left\{ g \in GL(\mathbb{O}) \;\middle|\; g(xy) = g(x)g(y) \ \text{ for } \ \forall x, y \in \mathbb{O} \right\}$$

$$\subset SO(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) = SO(7).$$

G_2 は 14 次元の例外型単純 Lie 群になる.

八元数と G_2

四元数 $$\mathbb{H} = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\langle 1, i, j, k\rangle \quad (\simeq \mathbb{R}^4)$$
$$\mathrm{Im}\,\mathbb{H} = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\langle i, j, k\rangle$$

八元数 $$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\langle 1, i, j, k, \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon\rangle \quad (\simeq \mathbb{R}^8)$$
$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})\varepsilon.$$
$$\mathrm{Im}\,\mathbb{O} = \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon \quad (\simeq \mathbb{R}^7)$$

$$G_2 = \mathrm{Aut}\,\mathbb{O} = \left\{ g \in GL(\mathbb{O}) \;\middle|\; g(xy) = g(x)g(y) \ \text{ for } \ \forall x, y \in \mathbb{O} \right\}$$
$$\subset SO(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) = SO(7).$$

G_2 は 14 次元の例外型単純 Lie 群になる.

八元数と G_2

四元数 $\quad \mathbb{H} = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\langle 1, i, j, k\rangle \quad (\simeq \mathbb{R}^4)$

$$\mathrm{Im}\,\mathbb{H} = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\langle i, j, k\rangle$$

八元数 $\quad \mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\langle 1, i, j, k, \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon\rangle \quad (\simeq \mathbb{R}^8)$

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})\varepsilon.$$

$$\mathrm{Im}\,\mathbb{O} = \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon \quad (\simeq \mathbb{R}^7)$$

$$G_2 = \mathrm{Aut}\,\mathbb{O} = \left\{ g \in GL(\mathbb{O}) \;\middle|\; g(xy) = g(x)g(y) \ \text{ for } \ \forall\, x, y \in \mathbb{O} \right\}$$
$$\subset SO(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) = SO(7).$$

G_2 は 14 次元の例外型単純 Lie 群になる.

2. 双ファイブレーション

$$\begin{tikzcd}
 & G_2/U(2) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
G_2/SU(3) & & G_2/SO(4)
\end{tikzcd}$$

$G_2/SO(4)$

$\mathrm{Im}\,\mathbb{O} = \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon$ の分解に対応して

$$SO(4) = \left\{ \begin{pmatrix} * & O \\ O & * \end{pmatrix} \in G_2 \right\}$$

結合的グラスマン多様体

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{\text{associative 3-plane in } \mathrm{Im}\,\mathbb{O}\} \\ &= \{V^3 \subset \mathrm{Im}\,\mathbb{O} \text{ subspace } \mid x(yz) = (xy)z \text{ for } \forall x, y, z \in V\} \end{aligned}$$

このとき, 自然に $\mathcal{A} \simeq G_2/SO(4)$.

$(\because)$ $V \in \mathcal{A} \iff V = g(\mathrm{Im}\,\mathbb{H})$ $(\exists\, g \in G_2)$.
このことから $G_2 \curvearrowright \mathcal{A}$: 推移的.

基点 $o = \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ における等方部分群は $SO(4)$. $\square$

$G_2/SO(4)$

$\mathrm{Im}\,\mathbb{O} = \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon$ の分解に対応して

$$SO(4) = \left\{ \begin{pmatrix} * & O \\ O & * \end{pmatrix} \in G_2 \right\}$$

結合的グラスマン多様体

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{\text{associative 3-plane in } \mathrm{Im}\,\mathbb{O}\} \\ &= \left\{ V^3 \subset \mathrm{Im}\,\mathbb{O} \text{ subspace } \mid x(yz) = (xy)z \text{ for } \forall x, y, z \in V \right\} \end{aligned}$$

このとき, 自然に $\mathcal{A} \simeq G_2/SO(4)$.

$(\because)$ $V \in \mathcal{A} \iff V = g(\mathrm{Im}\,\mathbb{H})$ $(\exists\, g \in G_2)$.

このことから $G_2 \curvearrowright \mathcal{A}$: 推移的.

基点 $o = \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ における等方部分群は $SO(4)$. □

$G_2/SO(4)$

$\mathrm{Im}\,\mathbb{O} = \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon$ の分解に対応して

$$SO(4) = \left\{ \begin{pmatrix} * & O \\ O & * \end{pmatrix} \in G_2 \right\}$$

結合的グラスマン多様体

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{\text{associative 3-plane in } \mathrm{Im}\,\mathbb{O}\} \\ &= \left\{ V^3 \subset \mathrm{Im}\,\mathbb{O} \text{ subspace } \mid x(yz) = (xy)z \text{ for } \forall x, y, z \in V \right\} \end{aligned}$$

このとき, 自然に $\mathcal{A} \simeq G_2/SO(4)$.

$(\because)$ $V \in \mathcal{A} \iff V = g(\mathrm{Im}\,\mathbb{H})$ $(\exists\, g \in G_2)$.

このことから $G_2 \curvearrowright \mathcal{A}$: 推移的.

基点 $o = \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ における等方部分群は $SO(4)$. $\square$

$G_2/SO(4)$

$\mathrm{Im}\,\mathbb{O} = \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon$ の分解に対応して

$$SO(4) = \left\{ \begin{pmatrix} * & O \\ O & * \end{pmatrix} \in G_2 \right\}$$

結合的グラスマン多様体

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{\text{associative 3-plane in } \mathrm{Im}\,\mathbb{O}\} \\ &= \left\{ V^3 \subset \mathrm{Im}\,\mathbb{O} \text{ subspace } \mid x(yz) = (xy)z \text{ for } \forall x, y, z \in V \right\} \end{aligned}$$

このとき，自然に $\mathcal{A} \simeq G_2/SO(4)$.

$(\because)\quad V \in \mathcal{A} \iff V = g(\mathrm{Im}\,\mathbb{H}) \quad (\exists\, g \in G_2)$.

このことから $G_2 \curvearrowright \mathcal{A}$：推移的.

基点 $o = \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ における等方部分群は $SO(4)$. □

$G_2/SO(4)$

$\mathrm{Im}\,\mathbb{O} = \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon$ の分解に対応して

$$SO(4) = \left\{ \begin{pmatrix} * & O \\ O & * \end{pmatrix} \in G_2 \right\}$$

結合的グラスマン多様体

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{\text{associative 3-plane in } \mathrm{Im}\,\mathbb{O}\} \\ &= \left\{ V^3 \subset \mathrm{Im}\,\mathbb{O} \text{ subspace } \mid x(yz) = (xy)z \text{ for } \forall x, y, z \in V \right\} \end{aligned}$$

このとき，自然に $\mathcal{A} \simeq G_2/SO(4)$.

$(\because)\quad V \in \mathcal{A} \iff V = g(\mathrm{Im}\,\mathbb{H}) \quad (\exists\, g \in G_2)$.
このことから $G_2 \curvearrowright \mathcal{A}$: 推移的.

基点 $o = \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ における等方部分群は $SO(4)$. □

$G_2/SO(4)$

$\mathrm{Im}\,\mathbb{O} = \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon$ の分解に対応して

$$SO(4) = \left\{ \begin{pmatrix} * & O \\ O & * \end{pmatrix} \in G_2 \right\}$$

結合的グラスマン多様体

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{\text{associative 3-plane in } \mathrm{Im}\,\mathbb{O}\} \\ &= \left\{ V^3 \subset \mathrm{Im}\,\mathbb{O} \text{ subspace } \mid x(yz) = (xy)z \text{ for } \forall x, y, z \in V \right\} \end{aligned}$$

このとき, 自然に $\mathcal{A} \simeq G_2/SO(4)$.

$(\because)$ $V \in \mathcal{A} \iff V = g(\mathrm{Im}\,\mathbb{H})$ $(\exists\, g \in G_2)$.

このことから $G_2 \curvearrowright \mathcal{A}$: 推移的.

基点 $o = \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ における等方部分群は $SO(4)$. $\square$

$G_2/SU(3)$

$$SU(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix} \in G_2 \right\}$$

次の自然な同一視がある

$$G_2/SU(3) \simeq S^6 = \{u \in \mathrm{Im}\,\mathbb{O} \mid |u| = 1\}$$

$G_2/SU(3)$

$$SU(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix} \in G_2 \right\}$$

次の自然な同一視がある

$$G_2/SU(3) \simeq S^6 = \{u \in \mathrm{Im}\,\mathbb{O} \mid |u| = 1\}$$

$G_2/U(2)$

$$U(2) = SO(4) \cap SU(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{pmatrix} \in G_2 \right\}$$

次の自然な同一視がある

$$G_2/U(2) \simeq \; Fl^{+}_{1,\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) = \{\, (u, V) \in S^6 \times \mathcal{A} \mid u \in V \}$$

$G_2/U(2)$

$$U(2) = SO(4) \cap SU(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{pmatrix} \in G_2 \right\}$$

次の自然な同一視がある

$$G_2/U(2) \simeq \ Fl^+_{1,\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) = \{\ (u, V) \in S^6 \times \mathcal{A} \mid u \in V \}$$

双ファイブレーション

双ファイブレーション

$$
\begin{tikzcd}
 & G_2/U(2) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
G_2/SU(3) & & G_2/SO(4)
\end{tikzcd}
$$

は次のように読み替えられる

$$
\begin{tikzcd}
 & & Fl^+_{1,\mathrm{ass}}(\operatorname{Im}\mathbb{O}) \arrow[dll] \arrow[drr] & \ni & (u,V) \arrow[dll] \arrow[drr] & & \\
S^6 & \ni & u & & \mathcal{A} & \ni & V
\end{tikzcd}
$$

双ファイブレーション

双ファイブレーション

$$
\begin{tikzcd}
& G_2/U(2) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
G_2/SU(3) & & G_2/SO(4)
\end{tikzcd}
$$

は次のように読み替えられる

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & & Fl^{+}_{1,\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) \arrow[dlll] \arrow[drrr] & \ni & (u,V) \arrow[dlll] \arrow[drrr] & & & \\
S^6 & \ni & u & & & & \mathcal{A} & \ni & V
\end{tikzcd}
$$

双ファイブレーション

双ファイブレーション

$$
\begin{tikzcd}
 & G_2/U(2) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
G_2/SU(3) & & G_2/SO(4)
\end{tikzcd}
$$

は次のように読み替えられる

$$
\begin{tikzcd}
 & Fl^+_{1,\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) \arrow[dl] \arrow[drr] & \ni & (u,V) \arrow[dll] \arrow[dr] & \\
S^6 & \ni & u & & \mathcal{A} & \ni & V
\end{tikzcd}
$$

3. 接空間 $T_V\mathcal{A}$

接空間

$o = \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \in \mathcal{A}$: 基点

基点における接空間

$$T_o\mathcal{A} \simeq \mathfrak{g}_2/\mathfrak{so}(4) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} O & -{}^t\phi \\ \phi & O \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_2 \right\}$$

命題

$$T_o\mathcal{A} \simeq \{\phi \in M_{4\times 3}(\mathbb{R}) \mid \phi_1 i + \phi_2 j + \phi_3 k = 0\}$$

ここで $\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & j & k \end{pmatrix} \phi$.

(∵) 略.

接空間

$o = \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \in \mathcal{A}$: 基点

基点における接空間

$$T_o\mathcal{A} \simeq \mathfrak{g}_2/\mathfrak{so}(4) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} O & -{}^t\phi \\ \phi & O \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_2 \right\}$$

命題

$$T_o\mathcal{A} \simeq \{\phi \in M_{4\times 3}(\mathbb{R}) \mid \phi_1 i + \phi_2 j + \phi_3 k = 0\}$$

ここで $(\phi_1 \ \ \phi_2 \ \ \phi_3) = (1 \ \ i \ \ j \ \ k)\,\phi$.

$(\because)$ 略.

接空間

$o = \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \in \mathcal{A}$: 基点

基点における接空間

$$T_o\mathcal{A} \simeq \mathfrak{g}_2/\mathfrak{so}(4) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} O & -{}^t\phi \\ \phi & O \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_2 \right\}$$

命題

$$T_o\mathcal{A} \simeq \{\phi \in M_{4\times 3}(\mathbb{R}) \mid \phi_1 i + \phi_2 j + \phi_3 k = 0\}$$

ここで $(\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3) = (1 \quad i \quad j \quad k)\ \phi$.

$(\because)$ 略.

接空間

より一般に

命題

$V \in \mathcal{A}$ について

$$T_V\mathcal{A} \simeq \left\{\phi \in \mathrm{Hom}(V, V^\perp) \mid \phi(e_1)e_1 + \phi(e_2)e_2 + \phi(e_3)e_3 = 0\right\}$$

ここで $\{e_1, e_2, e_3\}$ は V の向きづけられた正規直交基底.

<u>Rem</u> $\mathrm{Im}\,\mathbb{O} = V \oplus V^\perp$

V : associative 3-plane　　$V^\perp$: coassociative 4-plane

4. 部分多様体 $\mathfrak{S}_u \subset \mathcal{A}$

部分多様体 $\mathfrak{S}_u$

$$
\begin{tikzcd}
& Fl^{+}_{1,\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
S^6 & & \mathcal{A}
\end{tikzcd}
$$

各 $u \in S^6$ に対し次の集合を考える

$$\mathfrak{S}_u := \pi(p^{-1}(u)) = \{V \in \mathcal{A} \mid u \in V\}$$

アイデア

- 点 $V \in \mathcal{A}$ を固定. $V \in \mathfrak{S}_u$ ($\Leftrightarrow u \in V$) となる $\mathfrak{S}_u$ の族を考える.
- この族は V における錐 $\mathcal{C}_V$ を定める. (光錐のアナロジー)

$$\mathcal{C}_V = \bigcup_{u \in V} T_V \mathfrak{S}_u \quad \subset \quad T_V \mathcal{A}$$

部分多様体 $\mathfrak{S}_u$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & Fl^+_{1,\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ S^6 & & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

各 $u \in S^6$ に対し次の集合を考える

$$\mathfrak{S}_u := \pi(p^{-1}(u)) = \{V \in \mathcal{A} \mid u \in V\}$$

アイデア

- 点 $V \in \mathcal{A}$ を固定. $V \in \mathfrak{S}_u$ ($\Leftrightarrow u \in V$) となる $\mathfrak{S}_u$ の族を考える.
- この族は V における錐 $\mathcal{C}_V$ を定める. (光錐のアナロジー)

$$\mathcal{C}_V = \bigcup_{u \in V} T_V \mathfrak{S}_u \quad \subset \quad T_V \mathcal{A}$$

部分多様体 $\mathfrak{S}_u$

$$\begin{tikzcd} & Fl^+_{1,\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ S^6 & & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

各 $u \in S^6$ に対し次の集合を考える

$$\mathfrak{S}_u := \pi(p^{-1}(u)) = \{V \in \mathcal{A} \mid u \in V\}$$

アイデア

- 点 $V \in \mathcal{A}$ を固定. $V \in \mathfrak{S}_u$ $(\Leftrightarrow u \in V)$ となる $\mathfrak{S}_u$ の族を考える.
- この族は V における錐 $\mathcal{C}_V$ を定める. （光錐のアナロジー）

$$\mathcal{C}_V = \bigcup_{u \in V} T_V \mathfrak{S}_u \quad \subset \quad T_V \mathcal{A}$$

部分多様体 $\mathfrak{S}_u$

$$\begin{tikzcd}
 & Fl^{+}_{1,\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
S^6 & & \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

各 $u \in S^6$ に対し次の集合を考える

$$\mathfrak{S}_u := \pi(p^{-1}(u)) = \{V \in \mathcal{A} \mid u \in V\}$$

命題

$\mathfrak{S}_u$ は $\mathcal{A}$ の実 4 次元の部分多様体であり，

- 四元数ケーラー構造に関して全測地的かつ totally quaternionic，すなわち $I(T_x\mathfrak{S}_u) = J(T_x\mathfrak{S}_u) = K(T_x\mathfrak{S}_u) = T_x\mathfrak{S}_u$ $(x \in \mathfrak{S}_u)$.
- $\mathfrak{S}_u$ は自然な複素構造を持ち，$\mathbb{CP}^2$ と双正則同型．この複素構造は四元数ケーラー構造と可換．

部分多様体 $\mathfrak{S}_u$

$$
\begin{tikzcd}
 & Fl^+_{1,\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
S^6 & & \mathcal{A}
\end{tikzcd}
$$

各 $u \in S^6$ に対し次の集合を考える

$$\mathfrak{S}_u := \pi(p^{-1}(u)) = \{V \in \mathcal{A} \mid u \in V\}$$

命題

$\mathfrak{S}_u$ は $\mathcal{A}$ の実 4 次元の部分多様体であり,

- 四元数ケーラー構造に関して全測地的かつ totally quaternionic, すなわち $I(T_x\mathfrak{S}_u) = J(T_x\mathfrak{S}_u) = K(T_x\mathfrak{S}_u) = T_x\mathfrak{S}_u$ $(x \in \mathfrak{S}_u)$.
- $\mathfrak{S}_u$ は自然な複素構造を持ち, $\mathbb{CP}^2$ と双正則同型. この複素構造は四元数ケーラー構造と可換.

部分多様体 $\mathfrak{S}_u$

$V \in \mathfrak{S}_u (\Leftrightarrow u \in V)$ について,

$$T_V\mathcal{A} = \left\{\phi \in \mathrm{Hom}(V, V^\perp) \mid \phi(e_1)e_1 + \phi(e_2)e_2 + \phi(e_3)e_3 = 0\right\}$$

$$T_V\mathfrak{S}_u = \{\phi \in T_V\mathcal{A} \mid \phi(u) = 0\}$$

となる. このことから

$$\mathcal{C}_V = \bigcup_{u \in V} T_V\mathfrak{S}_u = \{\phi \in T_V\mathcal{A} \mid \phi(u) = 0 \text{ for some } u \in V\}$$

$$= \{\phi \in T_V\mathcal{A} \mid \operatorname{rank}\phi < 3\}$$

$$= \{\phi \in T_V\mathcal{A} \mid P(\phi) = 0\}$$

部分多様体 $\mathfrak{S}_u$

$V \in \mathfrak{S}_u (\Leftrightarrow u \in V)$ について，

$$T_V \mathcal{A} = \left\{ \phi \in \mathrm{Hom}(V, V^{\perp}) \mid \phi(e_1)e_1 + \phi(e_2)e_2 + \phi(e_3)e_3 = 0 \right\}$$

$$T_V \mathfrak{S}_u = \{ \phi \in T_V \mathcal{A} \mid \phi(u) = 0 \}$$

となる．このことから

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_V = \bigcup_{u \in V} T_V \mathfrak{S}_u &= \{ \phi \in T_V \mathcal{A} \mid \phi(u) = 0 \text{ for some } u \in V \} \\ &= \{ \phi \in T_V \mathcal{A} \mid \operatorname{rank} \phi < 3 \} \\ &= \{ \phi \in T_V \mathcal{A} \mid P(\phi) = 0 \} \end{aligned}$$

部分多様体 $\mathfrak{S}_u$

$V \in \mathfrak{S}_u (\Leftrightarrow u \in V)$ について,

$$T_V \mathcal{A} = \left\{ \phi \in \mathrm{Hom}(V, V^\perp) \mid \phi(e_1)e_1 + \phi(e_2)e_2 + \phi(e_3)e_3 = 0 \right\}$$

$$T_V \mathfrak{S}_u = \{ \phi \in T_V \mathcal{A} \mid \phi(u) = 0 \}$$

となる. このことから

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_V &= \bigcup_{u \in V} T_V \mathfrak{S}_u = \{ \phi \in T_V \mathcal{A} \mid \phi(u) = 0 \text{ for some } u \in V \} \\ &= \{ \phi \in T_V \mathcal{A} \mid \operatorname{rank} \phi < 3 \} \\ &= \{ \phi \in T_V \mathcal{A} \mid P(\phi) = 0 \} \end{aligned}$$

部分多様体 $\mathfrak{S}_u$

$V \in \mathfrak{S}_u (\Leftrightarrow u \in V)$ について，

$$T_V\mathcal{A} = \left\{\phi \in \mathrm{Hom}(V, V^\perp) \mid \phi(e_1)e_1 + \phi(e_2)e_2 + \phi(e_3)e_3 = 0\right\}$$

$$T_V\mathfrak{S}_u = \{\phi \in T_V\mathcal{A} \mid \phi(u) = 0\}$$

となる．このことから

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_V &= \bigcup_{u\in V} T_V\mathfrak{S}_u = \{\phi \in T_V\mathcal{A} \mid \phi(u) = 0 \text{ for some } u \in V\} \\ &= \{\phi \in T_V\mathcal{A} \mid \operatorname{rank}\phi < 3\} \\ &= \{\phi \in T_V\mathcal{A} \mid P(\phi) = 0\} \end{aligned}$$

$\{\mathfrak{S}_u\}_u$ が定める $Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 上の幾何構造

$$
\begin{tikzcd}
 & & Fl^+_{1,\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & & \\
u \in & S^6 & & Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) & \ni o
\end{tikzcd}
$$

族 $\{\mathfrak{S}_u\}$ が定める錐

$$\mathcal{C}_o := \bigcup_{\mathfrak{S}_u \ni o} T_o\mathfrak{S}_u = \left\{ \begin{pmatrix} O & -\phi^* \\ \phi & O \end{pmatrix} \in \mathfrak{p} \;\middle|\; \mathrm{rank}\,\phi < 3 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} O & -\phi^* \\ \phi & O \end{pmatrix} \in \mathfrak{p} \;\middle|\; P(\phi) = 0 \right\}$$

$P(\phi)$：$\mathbb{H}$-値 3 次多項式（この後定義）．

$\{\mathfrak{S}_u\}_u$ が定める $Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 上の幾何構造

$$\begin{array}{ccccccc} & & & Fl^+_{1,\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) & & & \\ & & \swarrow^{p} & & \searrow^{\pi} & & \\ u & \in & S^6 & & & Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) & \ni & o \end{array}$$

族 $\{\mathfrak{S}_u\}$ が定める錐

$$\mathcal{C}_o := \bigcup_{\mathfrak{S}_u \ni o} T_o\mathfrak{S}_u = \left\{ \begin{pmatrix} O & -\phi^* \\ \phi & O \end{pmatrix} \in \mathfrak{p} \;\middle|\; \mathrm{rank}\,\phi < 3 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} O & -\phi^* \\ \phi & O \end{pmatrix} \in \mathfrak{p} \;\middle|\; P(\phi) = 0 \right\}$$

$P(\phi)$：$\mathbb{H}$-値 3 次多項式（この後定義）．

$\{\mathfrak{S}_u\}_u$ が定める $Gr^{+}_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 上の幾何構造

$\phi = \begin{pmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{pmatrix}$ に対し，

$$P(\phi) = \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^3 & y^3 & z^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix} j - \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} k$$

または $(\phi_1\ \phi_2\ \phi_3) = (1\ \ i\ \ j\ \ k)\,\phi$ とおくとき

$$\begin{aligned} P(\phi) &= \phi_1 \times \phi_2 \times \phi_3 \qquad \text{(triple cross product)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\phi_1(\bar{\phi}_2\phi_3) - \phi_3(\bar{\phi}_2\phi_1)\right) \end{aligned}$$

$\{\mathfrak{S}_u\}_u$ が定める $Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 上の幾何構造

$\phi = \begin{pmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{pmatrix}$ に対し，

$$P(\phi) = \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^3 & y^3 & z^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix} j - \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} k$$

または $(\phi_1\ \phi_2\ \phi_3) = (1\ \ i\ \ j\ \ k)\,\phi$ とおくとき

$$\begin{aligned} P(\phi) &= \phi_1 \times \phi_2 \times \phi_3 && \text{(triple cross product)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\phi_1(\bar{\phi}_2\phi_3) - \phi_3(\bar{\phi}_2\phi_1)\right) \end{aligned}$$

$Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 上の対称 3-形式と可積分性

3 次多項式 $P(\phi)$ を $Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 上の各点で考え，対称 3-形式 γ とみなすことができる．(vector bundle valued になる)

定理

各 $u \in S^6$ と各点 $x \in \mathfrak{S}_u$ 及び $T_x\mathfrak{S}_u$ の複素基底 X, Y について

$$\gamma(R(X,Y)X, X, Y) = 0.$$

ここで R は $Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 上の自然な $SO(4)$-接続の曲率テンソル（四元数ケーラー構造に関する曲率テンソル）．

上記の定理は R が自己双対計量に類似した微分方程式を満たすことを示している．

$Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 上の対称 3-形式と可積分性

3 次多項式 $P(\phi)$ を $Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 上の各点で考え，対称 3-形式 γ とみなすことができる．(vector bundle valued になる)

定理

各 $u \in S^6$ と各点 $x \in \mathfrak{S}_u$ 及び $T_x\mathfrak{S}_u$ の複素基底 X, Y について

$$\gamma(R(X,Y)X, X, Y) = 0.$$

ここで R は $Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 上の自然な $SO(4)$-接続の曲率テンソル（四元数ケーラー構造に関する曲率テンソル）．

上記の定理は R が自己双対計量に類似した微分方程式を満たすことを示している．

$Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 上の対称 3-形式と可積分性

3 次多項式 $P(\phi)$ を $Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 上の各点で考え，対称 3-形式 γ とみなすことができる．(vector bundle valued になる)

定理

各 $u \in S^6$ と各点 $x \in \mathfrak{S}_u$ 及び $T_x\mathfrak{S}_u$ の複素基底 X, Y について

$$\gamma(R(X,Y)X, X, Y) = 0.$$

ここで R は $Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 上の自然な $SO(4)$-接続の曲率テンソル（四元数ケーラー構造に関する曲率テンソル）．

上記の定理は R が自己双対計量に類似した微分方程式を満たすことを示している．

$Gr^+_{\mathrm{ass}}(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ 上の対称 3-形式と可積分性

[参考]

4 次元複素多様体 M 上の複素計量 g が自己双対となることと，次は同値

$$g(R(X,Y)X,Y)=0 \qquad (\forall\{X,Y\}\text{: null plane の基底})$$

ご静聴ありがとうございました