

Financial supports from Kinki Univ.,

MEXT and JPSJ

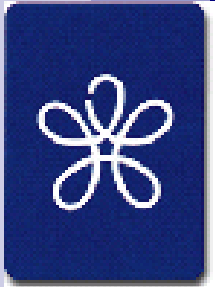


文部科学省

MINISTRY OF EDUCATION,
CULTURE, SPORTS,
SCIENCE AND TECHNOLOGY-JAPAN



量子誤り訂正と表現論



近畿大学工学部物理
近畿大学総合理工学研究科
量子コンピューターリサーチセンター
中原 幹夫



近畿大学

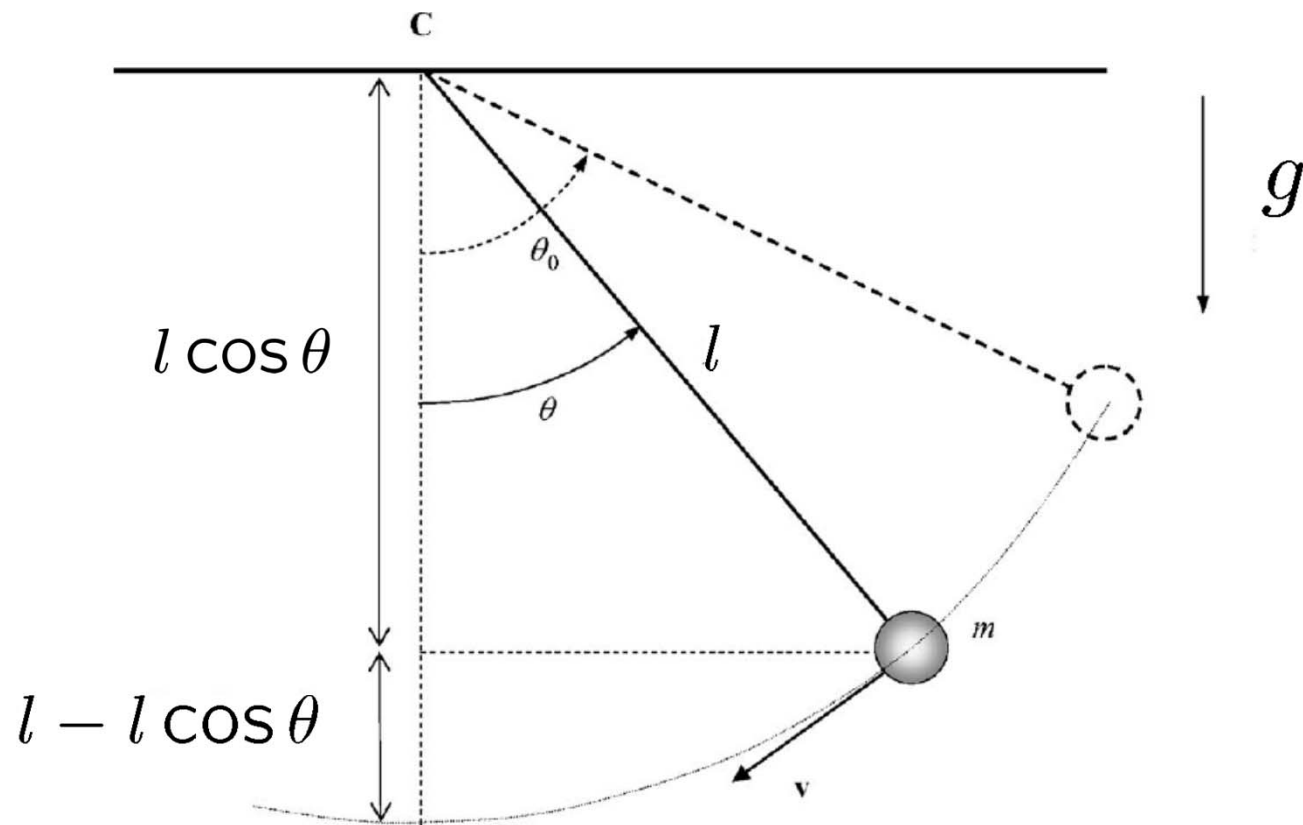
量子コンピューターリサーチセンター

- 2007～2012年
- 総予算 1.8億円
(文部科学省0.9億円+近畿大学0.9億円)
- 物理学者, 数学者, 情報学者, 化学者の研究集合体
- 量子コンピュータの実現, ミクロな世界の理解を研究している.
- 若手研究者(postdoc, phd student)の育成, postprofの活用.



0. 物理で計算

1. 物理系を使って「情報処理」, 「計算」ができる.
2. 長さ L の振り子を考える. その振幅が小さい時は, 周期は $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.
3. 長さ $L = g/4 \simeq 2.45$ m の振り子の周期を測ることにより, π を「計算」することができる.
4. さらに, 振り子の周期を測ることにより, もっと複雑な「計算」ができる...



$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} d\phi = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} K(k),$$

ただし $k = \sin(\theta_0/2)$. $K(k)$ は第 1 種完全楕円積分.

量子計算, 量子情報処理とは

- 量子計算, 量子情報処理では, **量子力学に従う物理系**を使って計算, 情報の記憶, 処理を行う.
- 量子力学は, 電子や原子など**ミクロな世界を支配する物理法則**である. したがって量子計算, 量子情報処理の実現にはミクロな物理系を用いる必要がある
- **古典的には存在しない状態**を使って, デジタルコンピュータ(古典コンピュータともいう)では何十億年もかかる計算の短時間での実行や, 絶対安全な暗号システム, 量子状態のテレポーテーションなどが可能となる.

1. Introduction

1. 古典情報処理はビット $\in \{0, 1\}$ で情報を蓄え, 処理する.
2. 量子情報処理は, 量子ビット $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle \in \mathbb{C}^2$ で情報を蓄え, 処理する. $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. 重ねあわせ状態やエンタングルした状態など古典的な対応物を持たない状態を使うことが出来る \rightarrow 指数関数的なスピードアップ.
 $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) \neq |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle.$
4. 外界からのノイズで量子状態が変化 \rightarrow エラー訂正が必要.
5. 古典情報でのエラー訂正: $0 \rightarrow 000, 1 \rightarrow 111$ で多数決をとる.
 $010 \rightarrow 0, 110 \rightarrow 1$ など.
6. 量子情報で同じことが出来るか? No!

NO CLONING THEOREM.



No Cloning Theorem

定理 (Zurek and Wothers, 1982) 未知の量子状態をユニタリー変換で複製することは不可能である.

証明：任意の未知の状態 $|\psi\rangle$ にたいし $U|\psi\rangle|0\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle$ を満たすユニタリー変換があったとする. $|\Psi\rangle = |\psi\rangle + |\phi\rangle$ にたいし

$$U|\Psi\rangle|0\rangle = |\Psi\rangle|\Psi\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle + |\phi\rangle|\psi\rangle + |\psi\rangle|\phi\rangle + |\phi\rangle|\psi\rangle$$

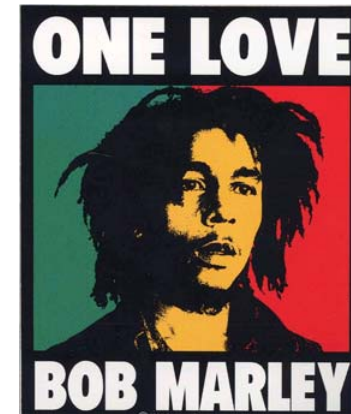
となるが、一方

$$U|\Psi\rangle|0\rangle = U(|\psi\rangle + |\phi\rangle)|0\rangle = U|\psi\rangle|0\rangle + U|\phi\rangle|0\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle + |\phi\rangle|\phi\rangle$$

となり、矛盾.

さらに、このような U が存在すると、光速を超える通信が可能となる！

Alice と Bob が状態 $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|+\rangle + |-\rangle|-\rangle)$ を共有している. ($|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$) 第1量子ビットはアリスが, 第2量子ビットはボブが所有する. 彼らは数億光年離れている.

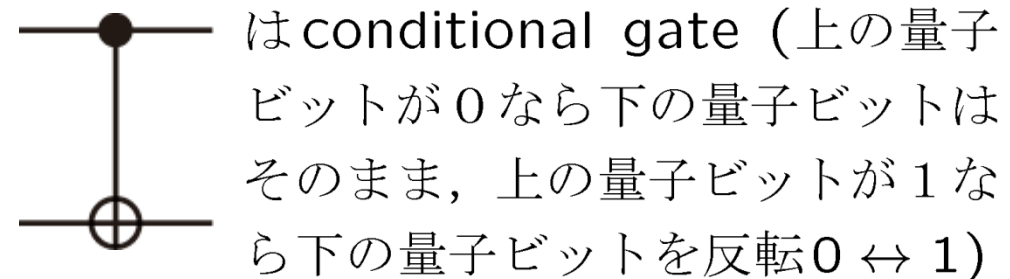
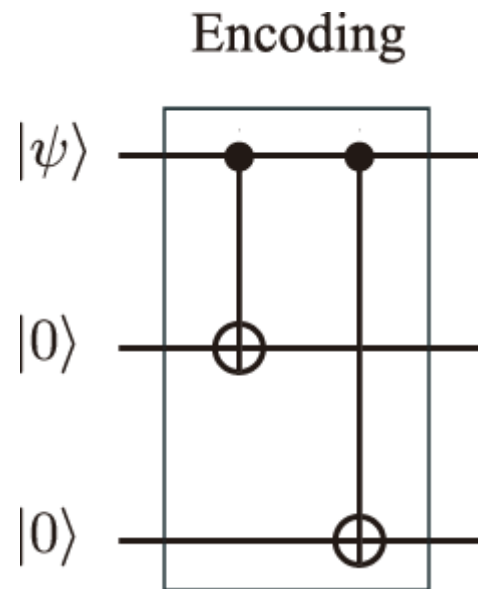


Alice が「0」を送りたければ, $|\Psi\rangle$ を $|0\rangle, |1\rangle$ の基底で測定. 「1」を送りたければ $|\pm\rangle$ の基底で測定する. Bob の量子ビットは, それに応じて瞬時に $|0\rangle, |1\rangle$ または $|+\rangle, |-\rangle$ のどれかになる.

もし, Bob が, Alice の測定後に自分の量子ビットをたくさんコピーできれば, Alice が「0」を送ったか, 「1」を送ったかわかる. 000... or 111... ならば「0」(測定基底は $\{|0\rangle, |1\rangle\}$), 010110... ならば「1」(測定基底は $\{|0\rangle, |1\rangle\}$)

2. 量子誤り訂正

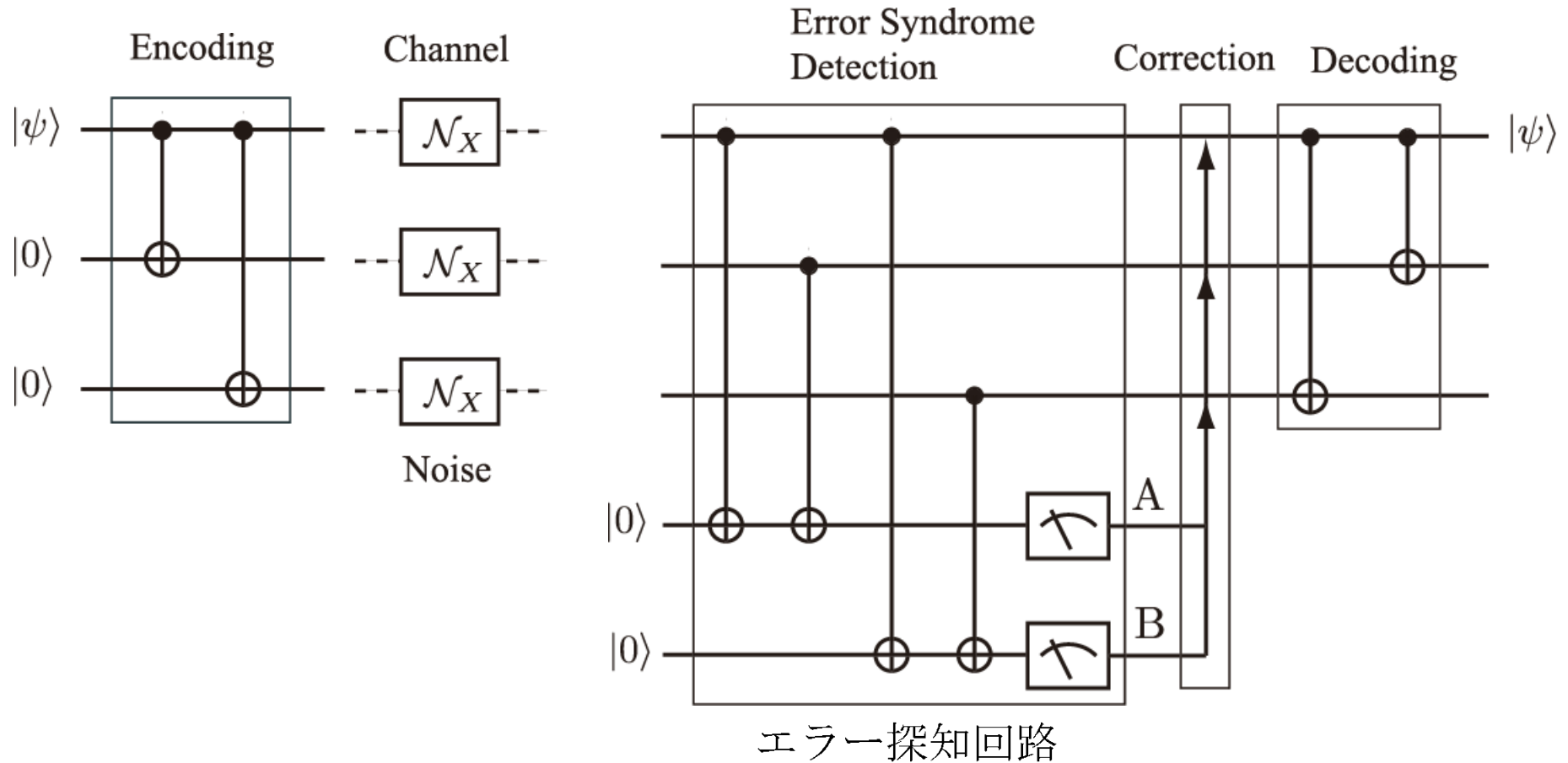
1. 量子誤り訂正は、もとのデータをコピーせずにエラー訂正！ノイズとして、ビットを反転するノイズ (σ_x) が、高々 1 量子ビットに作用する場合を考える.
2. 異なる冗長性を導入： $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow |\Psi\rangle = a|000\rangle + b|111\rangle$.



$$(a|0\rangle + b|1\rangle)|00\rangle = a|000\rangle + b|100\rangle \\ \rightarrow a|000\rangle + b|111\rangle.$$

3. Alice はこの 3 量子ビットを Bob に送る. 間で (1) 何もノイズは入らない (p_0) (2) 量子ビット 1 に σ_x が作用 (p_1) (3) 量子ビット 2 に σ_x が作用 (p_2) (3) 量子ビット 3 に σ_x が作用 (p_3) のどれかが作用.

ビット反転量子チャネル; $\Phi(\rho) = p_0\rho + \sum_{i=1}^3 p_i X_i \rho X_i = \sum_{i=0}^3 p_i X_i \rho X_i$,
 ただし $X_1 = \sigma_x \otimes I \otimes I, X_0 = I^{\otimes 3}$.

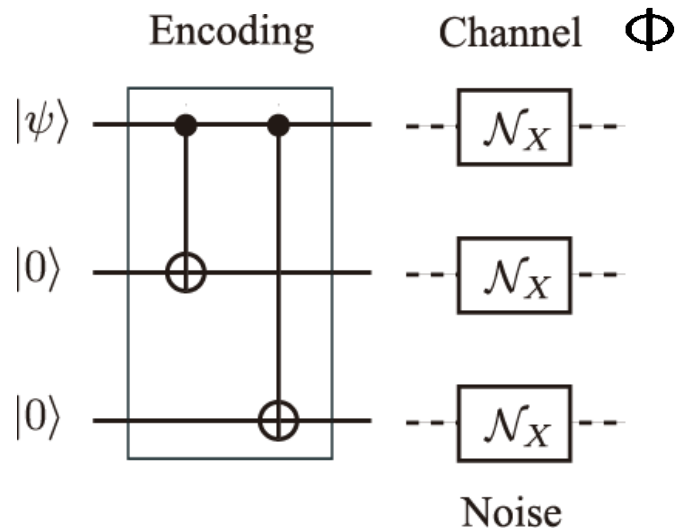


エラー探知量子ビットは必要か？

H Tomita and M Nakahara, arXv: 1101.0413

$$|\Psi\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle,$$

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|.$$



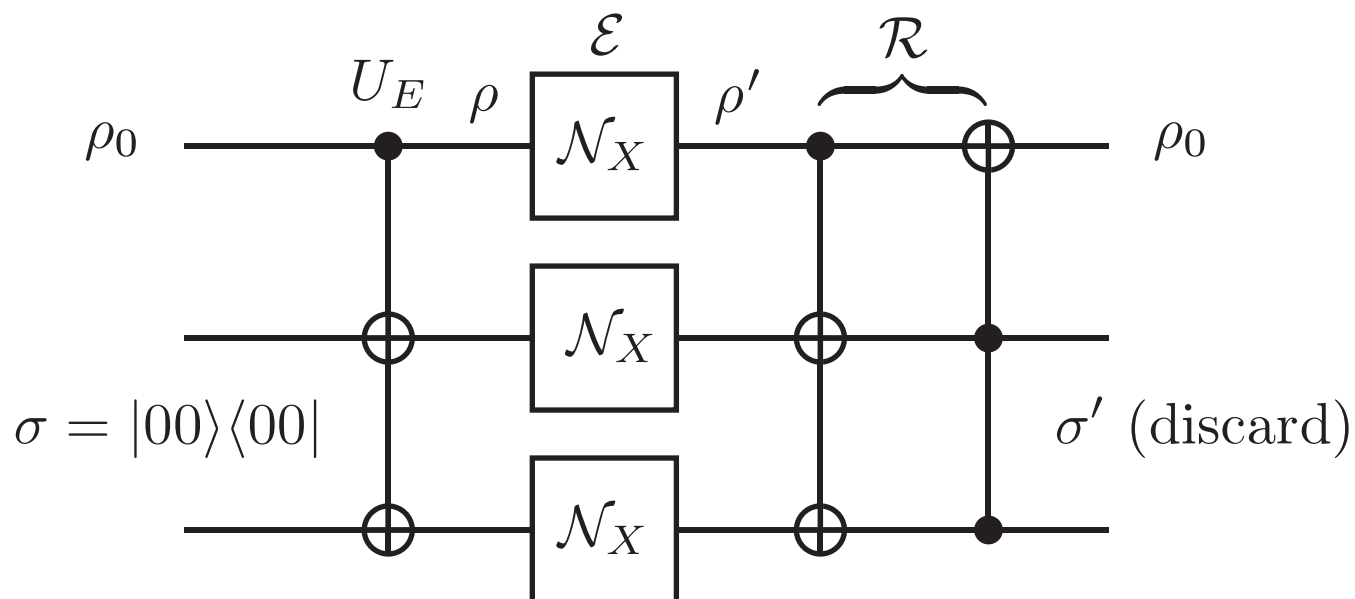
$$\Phi(\rho) = \sum_{i=0}^3 p_i X_i \rho X_i$$

$$= \begin{pmatrix} p_0|\alpha|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0\alpha\beta^* \\ 0 & p_3|\alpha|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3\alpha\beta^* & 0 \\ 0 & 0 & p_2|\alpha|^2 & 0 & 0 & p_2\alpha\beta^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_1|\beta|^2 & p_1\alpha^*\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_1\alpha\beta^* & p_1|\alpha|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2\alpha^*\beta & 0 & 0 & p_2|\beta|^2 & 0 & 0 \\ 0 & p_3\alpha^*\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3|\beta|^2 & 0 \\ p_0\alpha^*\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0|\beta|^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& R \Phi(\rho) R^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} p_0|\alpha|^2 & 0 & 0 & 0 & p_0\alpha\beta^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3|\alpha|^2 & 0 & 0 & 0 & p_3\alpha\beta^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2|\alpha|^2 & 0 & 0 & 0 & p_2\alpha\beta^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_1|\alpha|^2 & 0 & 0 & 0 & p_1\alpha\beta^* \\ p_0\alpha^*\beta & 0 & 0 & 0 & p_0|\beta|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3\alpha^*\beta & 0 & 0 & 0 & p_3|\beta|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2\alpha^*\beta & 0 & 0 & 0 & p_2|\beta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_1\alpha^*\beta & 0 & 0 & 0 & p_1|\beta|^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ここに R はユニタリ行列

$$R = P_{(4,5,6,7)} P_{(3,4)} = P_{(3,7)} P_{(4,5,6,7)}.$$

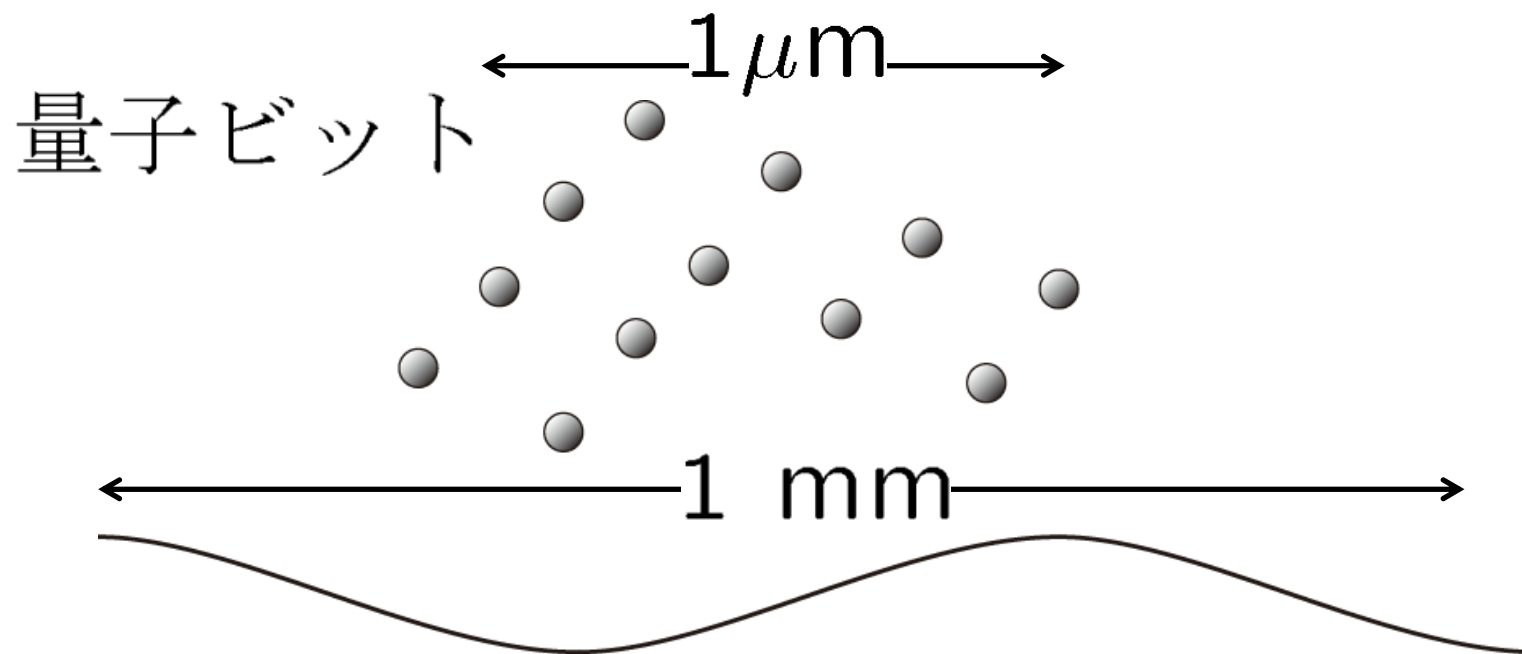


(S. L. Braunstein q-ph/9603024, H Tomita and M Nakahara, 1101.0413)

$$\mathcal{R}\mathcal{E}(U_E(\rho_0 \otimes |00\rangle\langle 00|)U_E^\dagger)\mathcal{R}^\dagger = \rho_0 \otimes \sigma.$$

3. Collective Noise

1. 量子力学に従う系は小さい ($< 1\mu\text{m}$).
2. ノイズの波長が長い ($> 1\text{mm}$) と、すべての量子ビットに同じノイズ演算子が作用.
3. このようなノイズ演算子の表現を考えると、ノイズの影響のない状態を作ることができる.



Collective Error演算子

$$X_n \equiv \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \dots \otimes \sigma_x$$

$$Y_n \equiv \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \dots \otimes \sigma_y$$

$$Z_n \equiv \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \dots \otimes \sigma_z$$

$$X_{\alpha,n} \equiv e^{i\alpha\sigma_x} \otimes e^{i\alpha\sigma_x} \otimes \dots \otimes e^{i\alpha\sigma_x}$$

$$Y_{\beta,n} \equiv e^{i\beta\sigma_y} \otimes e^{i\beta\sigma_y} \otimes \dots \otimes e^{i\beta\sigma_y}$$

$$Z_{\gamma,n} \equiv e^{i\gamma\sigma_z} \otimes e^{i\gamma\sigma_z} \otimes \dots \otimes e^{i\gamma\sigma_z}$$

一般に $U_n \equiv U \otimes U \otimes \dots \otimes U$, U は $SU(2)$ の 2次元表現.
(どんな U も $U = e^{i\alpha\sigma_x} e^{i\beta\sigma_y} e^{i\gamma\sigma_x}$ と表される.)

4. Decoherence free subspace and Noiseless subsystem

ヒント：2電子系のsinglet状態はユニタリー不変.

$$|\Psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \xrightarrow{U \otimes U} |\Psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle).$$

Singlet表現を集めれば Collective noise で変化しない状態が作れる
→ Decoherence Free Subspace (DFS).

Singlet でなくても、同じ次元の表現が複数あればよい
→ Noiseless Subsystem (NS) $NS \supset DFS$

4.1 Algebra generated by Error Operators

1. Error channel $\Phi(\rho) = \sum_{j=1}^k E_j \rho E_j^\dagger$, E_j は n 量子ビットの collective noise. $E_i = \sqrt{p_i} X_i$.

2. Error operator $\{E_j\}$ で生成される代数は

$$\bigoplus_j (I_{s_j} \otimes M_{n_j})$$

と一意的に (up to ユニタリー同値) 分解される. $n_j = n + 1 - 2j$ は表現の次元, $s_j = \binom{n}{j} - \binom{n}{j-1}$ は多重度. $j \in \{0, 1, \dots, [n/2]\}$

3. 例

$$n = 2: 2^{\otimes 2} = 3 \oplus 1.$$

$$n = 3: 2^{\otimes 3} = 4 \oplus 2 \oplus 2 = 4 \oplus (I_2 \otimes 2). \leftarrow \text{NS}$$

$$n = 4: 2^{\otimes 4} = 5 \oplus (I_3 \otimes 3) \oplus (I_2 \oplus 1). \leftarrow \text{DFS}$$

次元と多重度

$$n_0 = n + 1 = 2m + 2$$

$$s_0 = \binom{n}{0} = 1$$

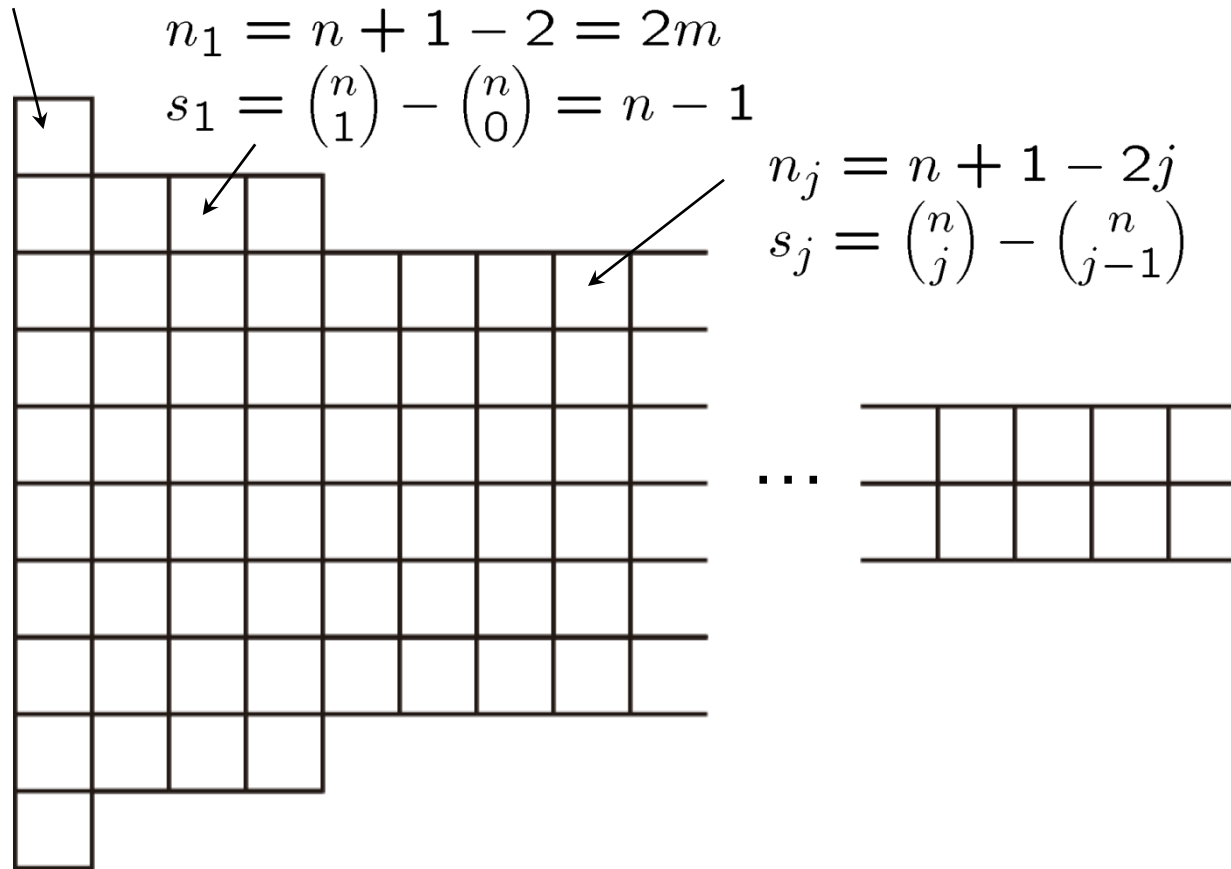
$$n_1 = n + 1 - 2 = 2m$$

$$s_1 = \binom{n}{1} - \binom{n}{0} = n - 1$$

$$n_j = n + 1 - 2j$$

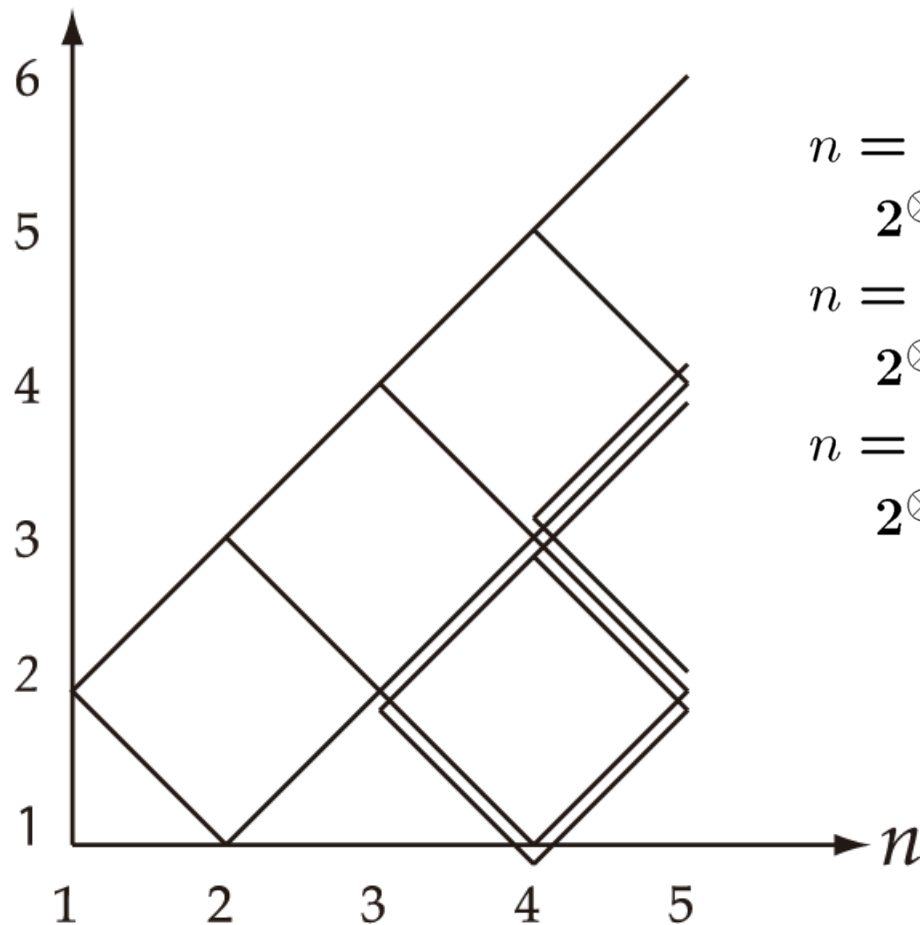
$$s_j = \binom{n}{j} - \binom{n}{j-1}$$

$$n = 2m + 1$$



4.2 Graphical representation

表現の次元



$$n = 2:$$

$$2^{\otimes 2} = 3 \oplus 1$$

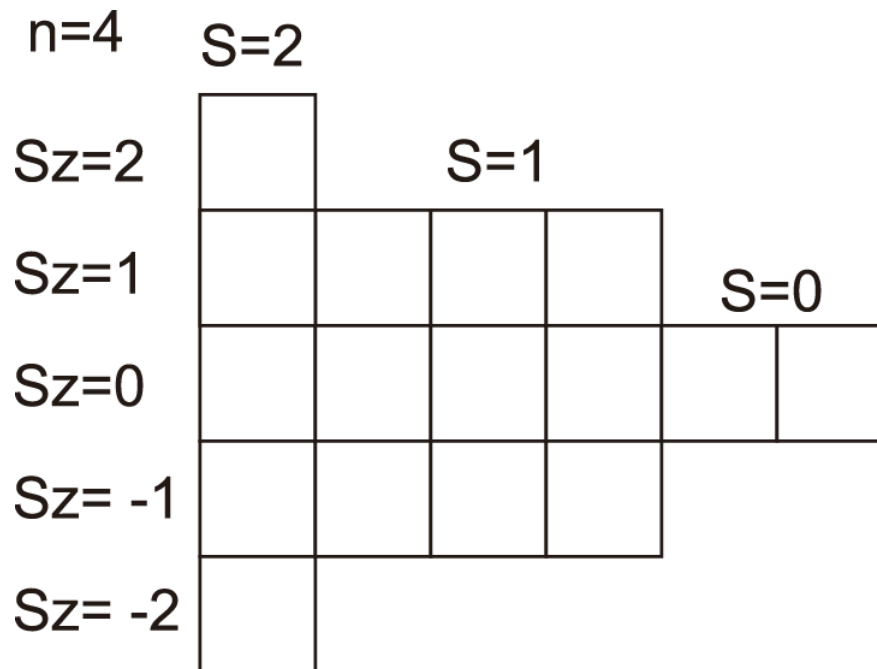
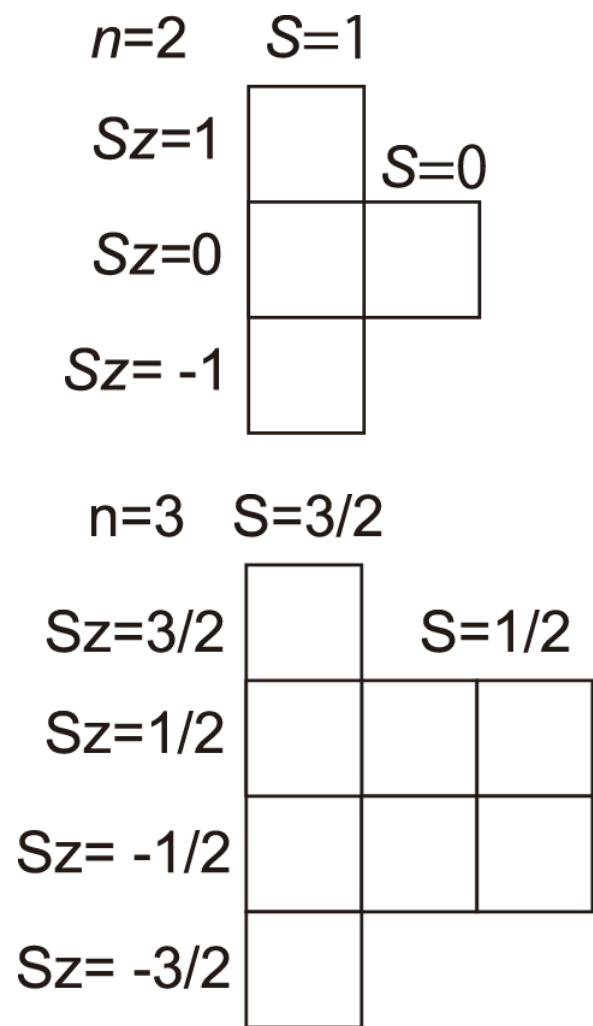
$$n = 3:$$

$$2^{\otimes 3} = 4 \oplus (I_2 \otimes 2)$$

$$n = 4:$$

$$2^{\otimes 4} = 5 \oplus (I_3 \otimes 3) \oplus (I_2 \oplus 1)$$

Contents of representations



$$\bigoplus_j (I_{s_j} \otimes M_{n_j})$$

$$n_j = n + 1 - 2j, s_j = \binom{n}{j} - \binom{n}{j-1},$$

$$j \in \{0, 1, \dots, [n/2]\}.$$

4.3 Noiseless Subsystem and Decoherence Free Subspace

C-K, Li, M. Nakahara, Y-T Poon, N-S Sze, H. Tomita,
Phys. Rev. A **84**, 044301 (2011).

1. Error Channel $\Phi(\rho) = \sum_{i=1}^r E_i \rho E_i^\dagger$. r はエラーオペレータ E_i の数.
2. $\{E_i\}$ が生成する代数は、既約表現への分解 $\bigoplus_j (I_{r_j} \otimes M_{n_j})$ をもつ。
 $\sum_j r_j n_j = N$, $N = 2^n$. 基底ベクトルの再配置が必要=encoding.
3. このとき、すべての E_i は $E_i = \bigoplus_j (I_{r_j} \otimes B_j^{(i)})$ と表される. $B_j^{(i)} \in M_{n_j}$.
4. 特定の j を取り出し, $E_i = (I_{r_j} \otimes B_j^{(i)}) \oplus M_q^{(i)}$ と分解. $q = N - r_j n_j$.
5. Φ を $\rho = (\rho_0 \otimes \sigma) \oplus O_q$ に作用させる. ($\rho_0 \in M_{r_j}$, $\sigma \in M_{n_j}$)
 $\rightarrow \Phi((\rho_0 \otimes \sigma) \oplus O_q) = (\rho_0 \otimes \sigma_E) \oplus O_q$ (\rightarrow NS).
6. とくに $n_j = 1$ であれば $\Phi(\rho_0 \oplus O_q) = \rho_0 \oplus O_q$ (\rightarrow DFS).

$$E_i = (I_{r_j} \otimes B_j^{(i)}) \oplus M_q^{(i)} = \begin{pmatrix} B_j^{(i)} & & & & \\ & B_j^{(i)} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & B_j^{(i)} & \\ & & & & M_q^{(i)} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i E_i \rho E_i^\dagger$$

$$\rho = (\rho_0 \otimes \sigma) \oplus O_q \longrightarrow (\rho_0 \otimes \sum_i B_j^{(i)} \sigma B_j^{(i)\dagger}) \oplus O_q = (\rho_0 \otimes \sigma_E) \oplus O_q$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \\ M_{r_j} & M_{n_j} & \end{array}$$

よって ρ_0 は error channel の影響 (=ノイズ) を受けない. エラーの効果は $\sigma \rightarrow \sigma_E$ のみ.

次元と多重度

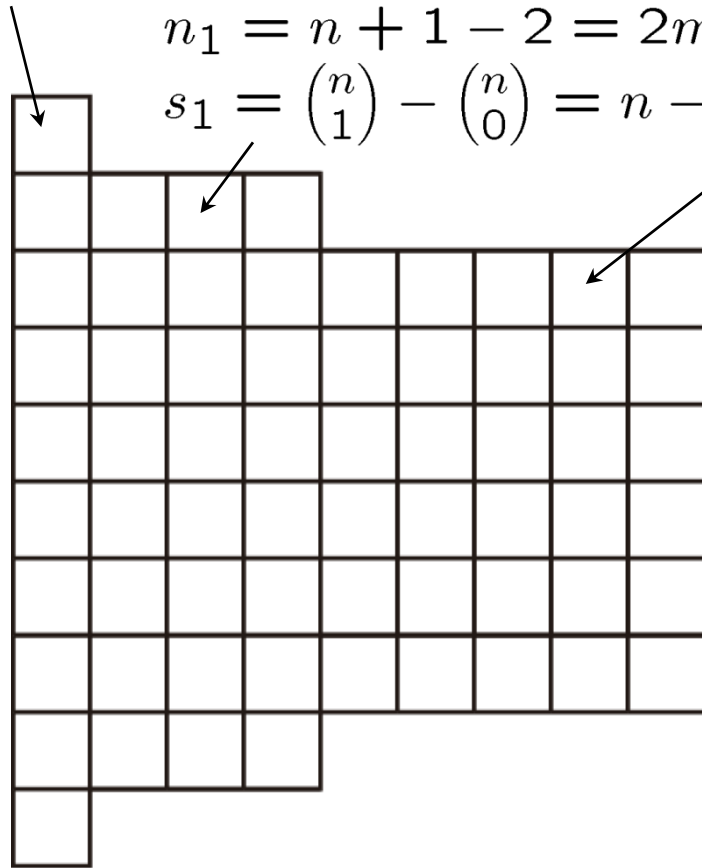
$$n = 2m + 1$$

$$n_0 = n + 1 = 2m + 2$$

$$s_0 = \binom{n}{0} = 1$$

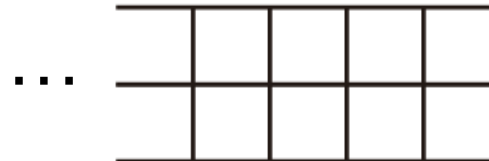
$$n_1 = n + 1 - 2 = 2m$$

$$s_1 = \binom{n}{1} - \binom{n}{0} = n - 1$$

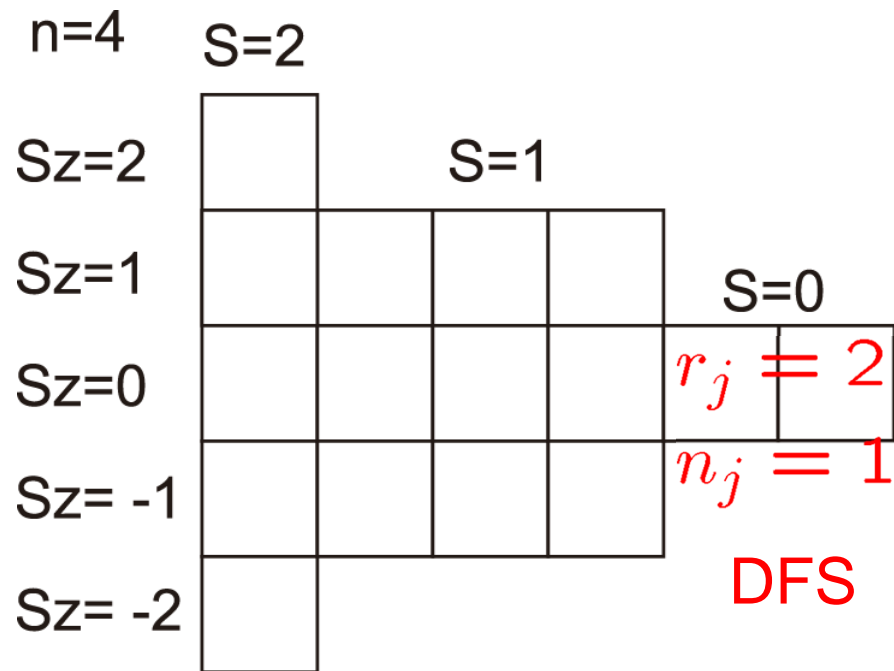
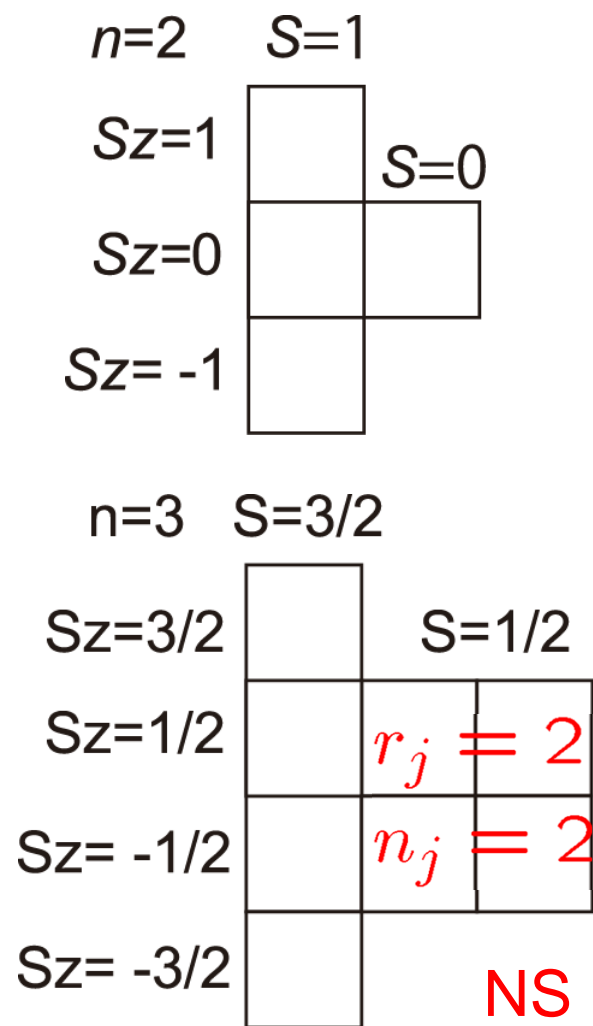


$$n_j = n + 1 - 2j$$

$$s_j = \binom{n}{j} - \binom{n}{j-1}$$



Contents of representations



$$\bigoplus_j (I_{s_j} \otimes M_{n_j})$$

$$n_j = n + 1 - 2j, s_j = \binom{n}{j} - \binom{n}{j-1},$$

$$j \in \{0, 1, \dots, [n/2]\}.$$

5. n=3 Noiseless Subsystem

- $2^{\otimes 3} = 4 \oplus (I_2 \otimes 2)$ に対応して $V \in 2^{\otimes 3}$ は $V_4 \oplus (I_2 \otimes V_2)$ と分解. I_2 はどんなエラーにおいても状態に影響を与えず, ここを NS として用いる.
- 各 irrep に対し, 基底ベクトルの選択は無数にあるが, ここでは下の基底を用いる.

$$4 \quad \begin{cases} |e_{4,1}\rangle = |000\rangle = -U_E^{(3)}|110\rangle, \\ |e_{4,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}[|0\rangle(|01\rangle + |10\rangle) + |1\rangle|00\rangle] = U_E^{(3)}|101\rangle, \\ |e_{4,3}\rangle = (\sigma_x)^{\otimes 3}|e_{4,2}\rangle = -U_E^{(3)}|111\rangle, \\ |e_{4,4}\rangle = |111\rangle = (\sigma_x)^{\otimes 3}|e_{4,1}\rangle = U_E^{(3)}|100\rangle. \end{cases}$$

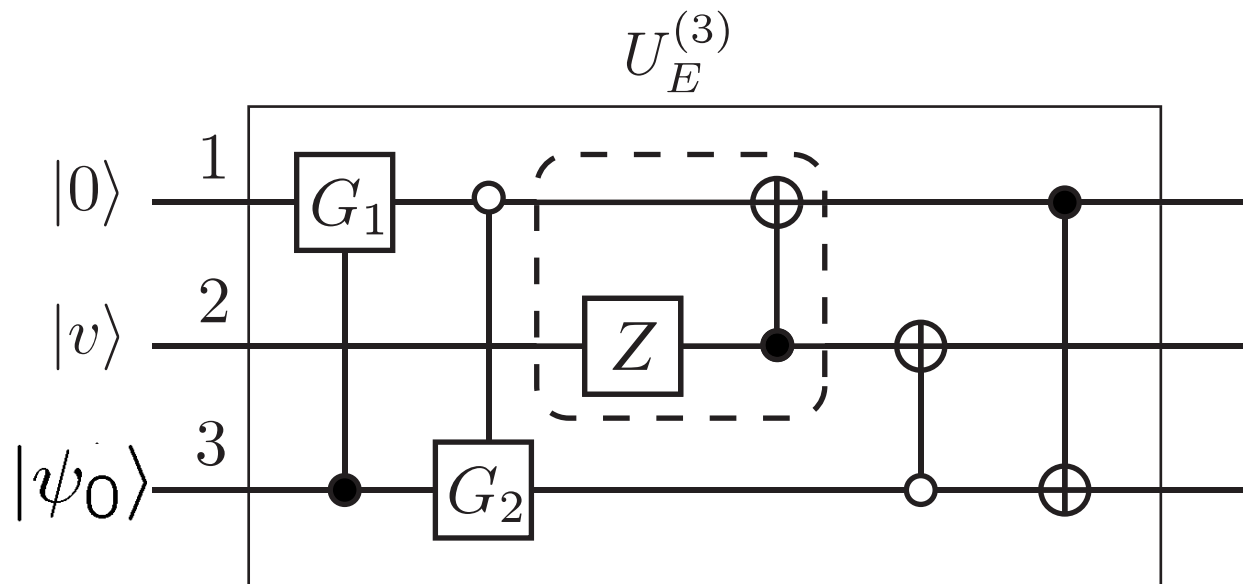
$$2 \quad \begin{cases} |e_{a1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle(|10\rangle - |01\rangle) = U_E^{(3)}|000\rangle, \\ |e_{a2}\rangle = -(\sigma_x)^{\otimes 3}|e_{a1}\rangle = U_E^{(3)}|010\rangle, \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} |e_{b1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}[|0\rangle(|01\rangle + |10\rangle) - 2|1\rangle|00\rangle] = U_E^{(3)}|001\rangle, \\ |e_{b2}\rangle = -(\sigma_x)^{\otimes 3}|e_{b1}\rangle = U_E^{(3)}|011\rangle, \end{cases}$$

$$\rightarrow U_E^{(3)} = (|e_{a1}\rangle, |e_{b1}\rangle, |e_{a2}\rangle, |e_{b2}\rangle, |e_{4,4}\rangle, |e_{4,2}\rangle, -|e_{4,1}\rangle, -|e_{4,3}\rangle)$$

$n=3$ NSの量子回路

- $U_E^{(3)} = (|e_{a1}\rangle, |e_{b1}\rangle, |e_{a2}\rangle, |e_{b2}\rangle, |e_{4,4}\rangle, |e_{4,2}\rangle, -|e_{4,1}\rangle, -|e_{4,3}\rangle)$ は標準基底 $\{|i_1 i_2 i_3\rangle\}$, $i_k \in \{0, 1\}$ から前のスライドの基底ベクトルを生成.



$$G_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

○は制御ビットが0でactive, ●は制御ビットが1でactive.

定理

α, β, γ を任意の実数とし,

$$X_\alpha = (e^{i\alpha\sigma_x})^{\otimes 3}, Y_\beta = (e^{i\beta\sigma_y})^{\otimes 3}, Z_\gamma = (e^{i\gamma\sigma_z})^{\otimes 3}$$

とする. 量子チャネル $\Phi: M_8 \rightarrow M_8$ を

$$\Phi(\rho) = p_0\rho + p_1X_\alpha\rho X_\alpha^\dagger + p_2Y_\beta\rho Y_\beta^\dagger + p_3Z_\gamma\rho Z_\gamma^\dagger$$

とする. ただし $p_i \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^3 p_i \leq 1$. エラー演算子 $E_0 = \sqrt{p_0}I_2$, $E_1 = \sqrt{p_1}X_\alpha$ など.

すると, 任意の状態 $\rho_0 \in M_2$ と $U_E^{(3)}$, Φ は

$$U_E^{(3)\dagger} \Phi \left(U_E^{(3)} (|0\rangle\langle 0| \otimes \sigma \otimes \rho_0) U_E^{(3)\dagger} \right) U_E^{(3)} = |0\rangle\langle 0| \otimes \left(\sum_{j=0}^3 p_j U_j \sigma U_j^\dagger \right) \otimes \rho_0$$

を満たす. ここに $U_0 = I_2$, $U_1 = e^{i\alpha\sigma_x}$, $U_2 = e^{i\beta\sigma_y}$, $U_3 = e^{i\gamma\sigma_z}$.

エラー演算子の影響は第2量子ビットのみに残る.

復号(decoding)

復号は $U_E^{(3)\dagger}$ により

$$U_E^{(3)\dagger} \Phi(\rho) U_E^{(3)} = |0\rangle\langle 0| \otimes \sigma_E \otimes \rho_0$$

となる. たとえば $|\psi_0\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ をデータ量子ビットとし, $|v\rangle = v_0|0\rangle + v_1|1\rangle$ を第2量子ビットの初期状態とすると, 符号化された状態は

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= U_E^{(3)} |0\rangle |v\rangle |\psi_0\rangle = v_0(a|e_{a1}\rangle + b|e_{b1}\rangle) + v_1(a|e_{a2}\rangle + b|e_{b2}\rangle) \\ &= a(v_0|e_{a1}\rangle + v_1|e_{a2}\rangle) + b(v_0|e_{b1}\rangle + v_1|e_{b2}\rangle) = a|\tilde{0}\rangle + b|\tilde{1}\rangle. \end{aligned}$$

たとえば X_α が作用したあと, $U_E^{(3)\dagger}$ を作用させると状態は「ほとんど」初期状態となる:

$$U_E^{(3)\dagger} X_\alpha |\Psi\rangle = |0\rangle \langle e^{i\alpha\sigma_x} |v\rangle | \psi_0 \rangle.$$

量子チャネル Φ 全体では $U_E^{(3)\dagger} \Phi(\rho) U_E^{(3)} = |0\rangle\langle 0| \otimes \sigma_E \otimes \rho_0$.

6. $n=4$ DFS

- $2^{\otimes 4} = 5 \oplus (I_3 \otimes 3) \oplus (I_2 \otimes 1)$. 対応して $V \in 2^{\otimes 4}$ は $V_5 \oplus (I_3 \otimes V_3) \oplus (I_2 \otimes V_1)$ と分解. singlet 状態はいかなる $V = W^{\otimes 4}$, $W \in 2$ に対しても耐性をもつのでこれを DFS に利用する.
- 以下の基底を用いると $n = 3$ の $U_E^{(3)}$ が利用できる:

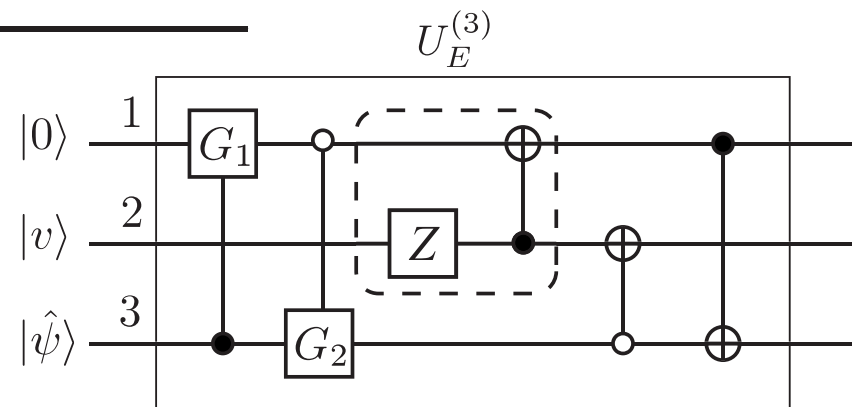
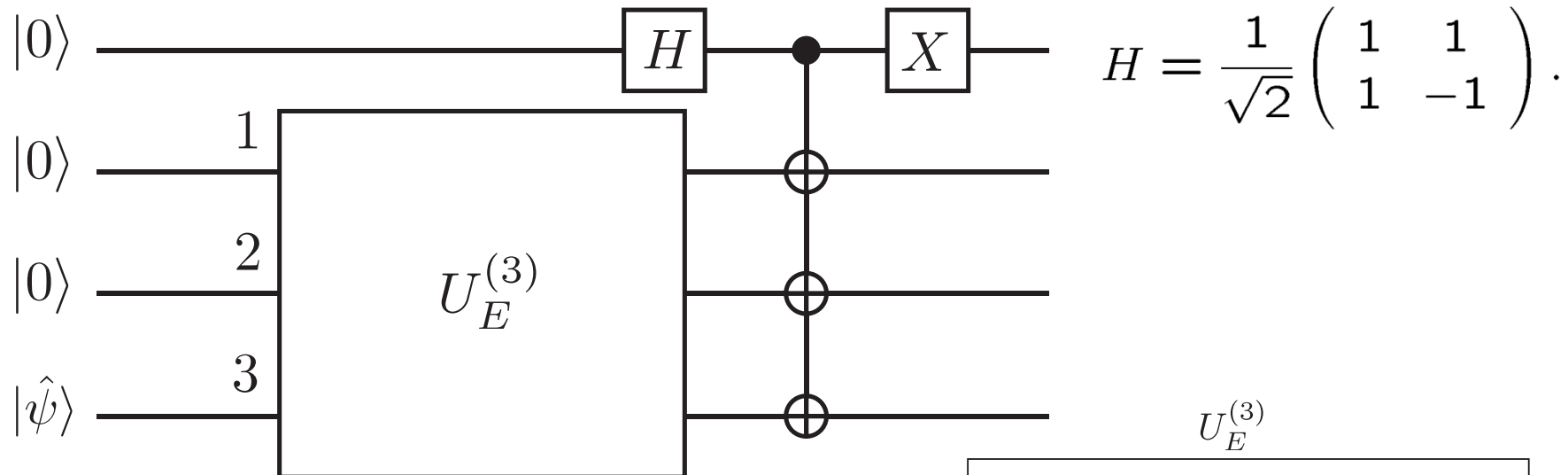
$$\left\{ \begin{array}{l} |0\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|e_{a1}\rangle - |0\rangle|e_{a2}\rangle) \\ \quad = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|e_{a1}\rangle + |0\rangle(\sigma_x)^{\otimes 3}|e_{a1}\rangle) = X \cdot \text{CNNN} \cdot (H \otimes U_E^{(3)})|0000\rangle, \\ |1\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|e_{b1}\rangle - |0\rangle|e_{b2}\rangle) \\ \quad = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|e_{b1}\rangle + |0\rangle(\sigma_x)^{\otimes 3}|e_{b1}\rangle) = X \cdot \text{CNNN} \cdot (H \otimes U_E^{(3)})|0001\rangle. \end{array} \right.$$

$$\text{ただし} \quad \left\{ \begin{array}{l} |e_{a1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle(|10\rangle - |01\rangle), \\ |e_{a2}\rangle = -(\sigma_x)^{\otimes 3}|e_{a1}\rangle, \end{array} \right.$$

$$\text{および} \quad \left\{ \begin{array}{l} |e_{b1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}[|0\rangle(|01\rangle + |10\rangle) - 2|1\rangle|00\rangle], \\ |e_{b2}\rangle = -(\sigma_x)^{\otimes 3}|e_{b1}\rangle, \end{array} \right.$$

$n=4, k=1$ DFS Quantum Circuit

- $U_E^{(4)}$ は標準基底 $\{|i_1 i_2 i_3 i_4\rangle\}$, $i_k \in \{0, 1\}$ から DFS の基底を生成する.
 $U_E^{(4)}$ は $U_E^{(3)}$ を用いて $|e_{ai}\rangle$ と $|e_{bi}\rangle$ を生成する.



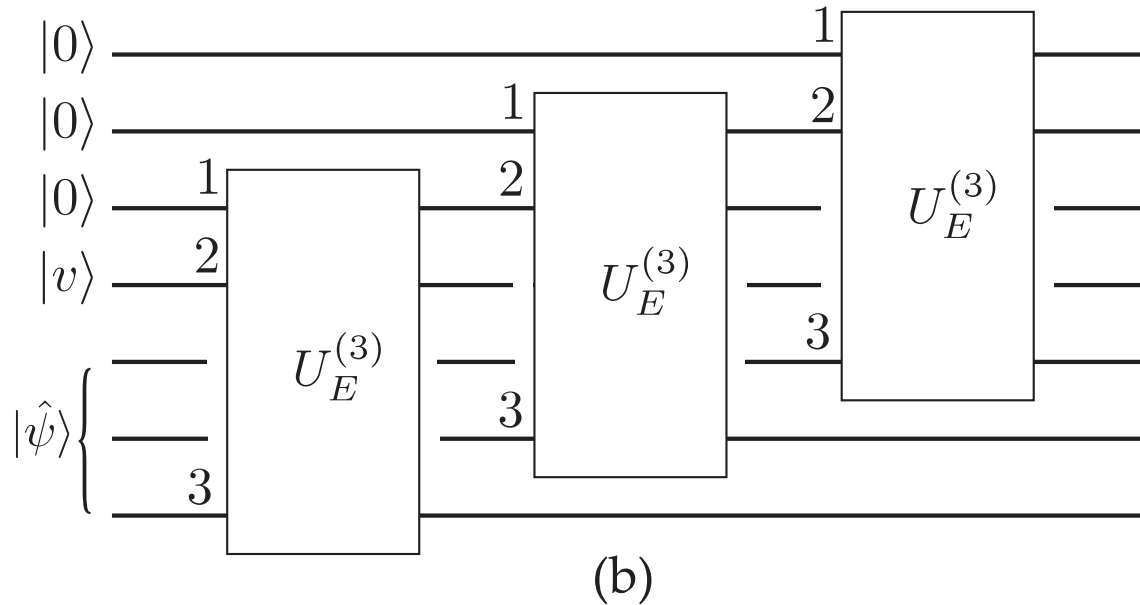
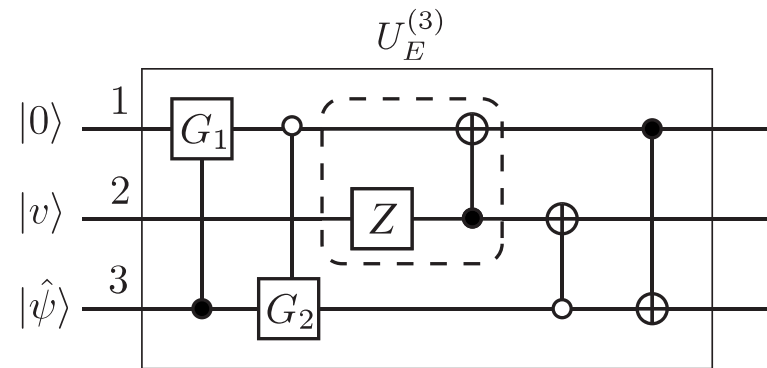
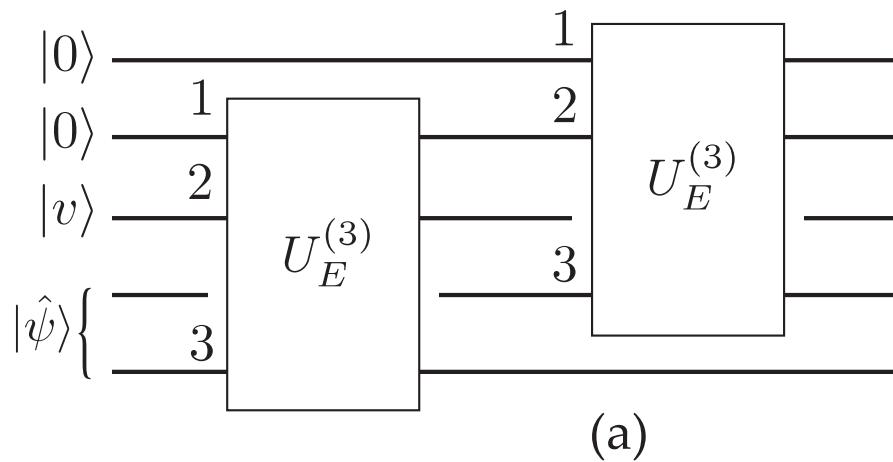
7. $n=5$ & $n=7$ Noiseless Subsystems

- $2^{\otimes 5} = 6 \oplus (I_4 \otimes 4) \oplus (I_5 \otimes 2)$. したがって $V \in 2^{\otimes 5}$ は $V_6 \oplus (I_4 \otimes V_4) \oplus (I_5 \otimes V_2)$ と分解される. NSは5つの2-d irrepsの4つ = 2^2 から構成される.
- $n = 3$ の基底から recursive に得られる次の基底を $U_E^{(3)}$ を使って生成する ;

$$\left\{ \begin{array}{l} |00\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}} |e_{a1}\rangle (|01\rangle - |10\rangle), \\ |01\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{6}} [|e_{a1}\rangle (|01\rangle + |10\rangle) - 2|e_{a2}\rangle |00\rangle], \\ |10\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}} |e_{b1}\rangle (|01\rangle - |10\rangle), \\ |11\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{6}} [|e_{b1}\rangle (|01\rangle + |10\rangle) - 2|e_{b2}\rangle |00\rangle], \end{array} \right.$$

および, これらのベクトルに $\sigma_x^{\otimes 5}$ を作用させて得られる bit-flip したベクトル.

$n=5, n=7$ NS 量子回路



次元と多重度

$$n = 2m + 1$$

$$n_0 = n + 1 = 2m + 2$$

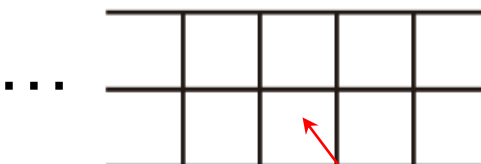
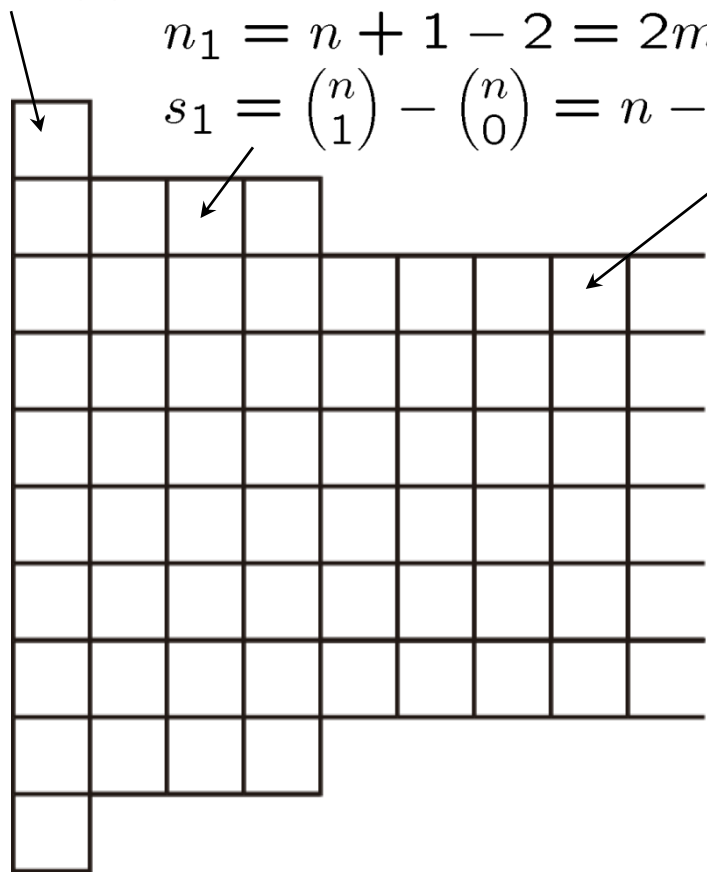
$$s_0 = \binom{n}{0} = 1$$

$$n_1 = n + 1 - 2 = 2m$$

$$s_1 = \binom{n}{1} - \binom{n}{0} = n - 1$$

$$n_j = n + 1 - 2j$$

$$s_j = \binom{n}{j} - \binom{n}{j-1}$$



$$n_m = n + 1 - 2m = 2$$

$$s_m = \binom{n}{m} - \binom{n}{m-1}$$

$$k = \lfloor \log_2 s_m \rfloor \simeq 2m$$

8. Summary

- $n = 3$ NS の符号化回路を用いて $n \geq 4$ の DFS と $n \geq 5$ の NS を再帰的に構成した.
- 再帰的な構成において $n = 2k + 1$ NS と $n = 2k$ DFS では k 量子ビットのデータが符号化される. ($n \gg 1$) そのためには約 2 倍の量子ビットが必要となる.
- Alice が $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ を基底に用いて, Bob が $\{U|0\rangle, U|1\rangle\}$ を基底に用いても, NS や DFS を使えば正しく k 量子ビットのデータが送れる.
- $n = 2m + 1$ のとき, $\binom{n}{m} - \binom{n}{m-1} = \frac{2(2m+1)!}{m!(m+2)!}$ 個の 2-d irreps がある. すると $k = \lfloor \log_2 \left(\binom{n}{m} - \binom{n}{m-1} \right) \rfloor \simeq 2m$ データ量子ビットが符号化できる. $n \rightarrow \infty$ のとき $k/n \rightarrow 1$ である. その具体的な量子回路は現在研究中.
- NMR での実証.
- アナログエラーも訂正可 (複合パルス = 幾何学的量子ゲート)

次元と多重度

$$n = 2m + 1$$

$$n_0 = n + 1 = 2m + 2$$

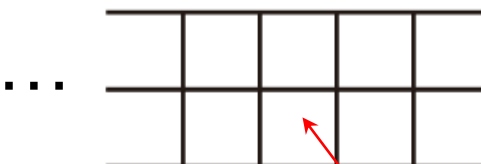
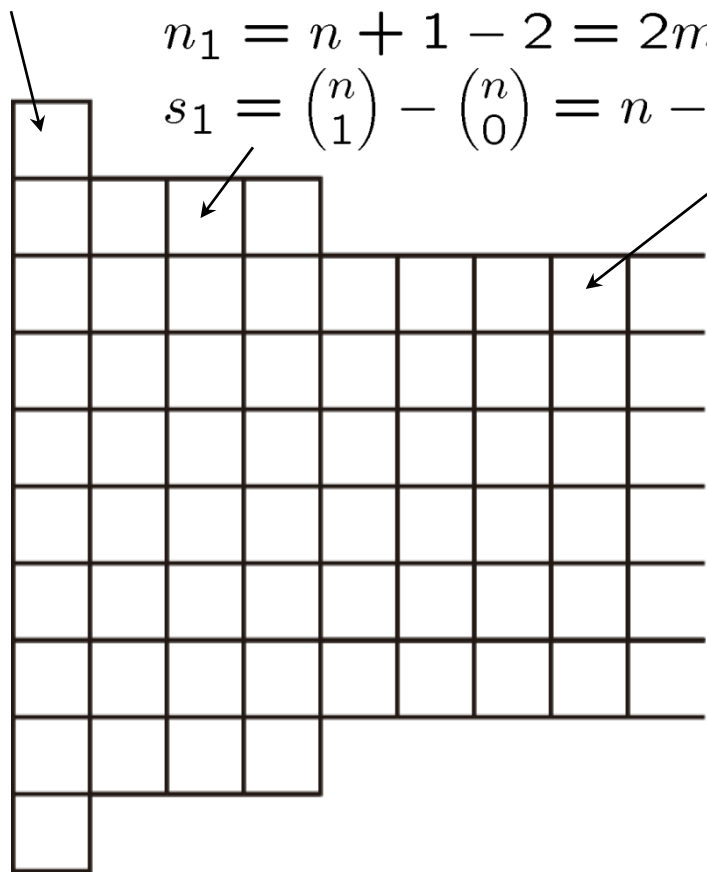
$$s_0 = \binom{n}{0} = 1$$

$$n_1 = n + 1 - 2 = 2m$$

$$s_1 = \binom{n}{1} - \binom{n}{0} = n - 1$$

$$n_j = n + 1 - 2j$$

$$s_j = \binom{n}{j} - \binom{n}{j-1}$$



$$n_m = n + 1 - 2m = 2$$

$$s_m = \binom{n}{m} - \binom{n}{m-1}$$

$$k = \lfloor \log_2 s_m \rfloor \simeq 2m$$

4.4 Recursive Encoding/Decoding

- 3-Qubit NS

$$j = 1, n_j = 3 + 1 - 2 = 2, r_j = \binom{3}{1} - \binom{3}{0} = 2.$$

$$2^{\otimes 3} = 4 \oplus (I_2 \otimes 2) \rightarrow V \in 2^{\otimes 3} \text{ は}$$

$$V = V_4 \oplus (I_2 \otimes V_2) \text{ と分解. } I_2 \leftrightarrow \text{DFS.}$$

量子回路が簡単かどうかは基底の取り方に依存する.

