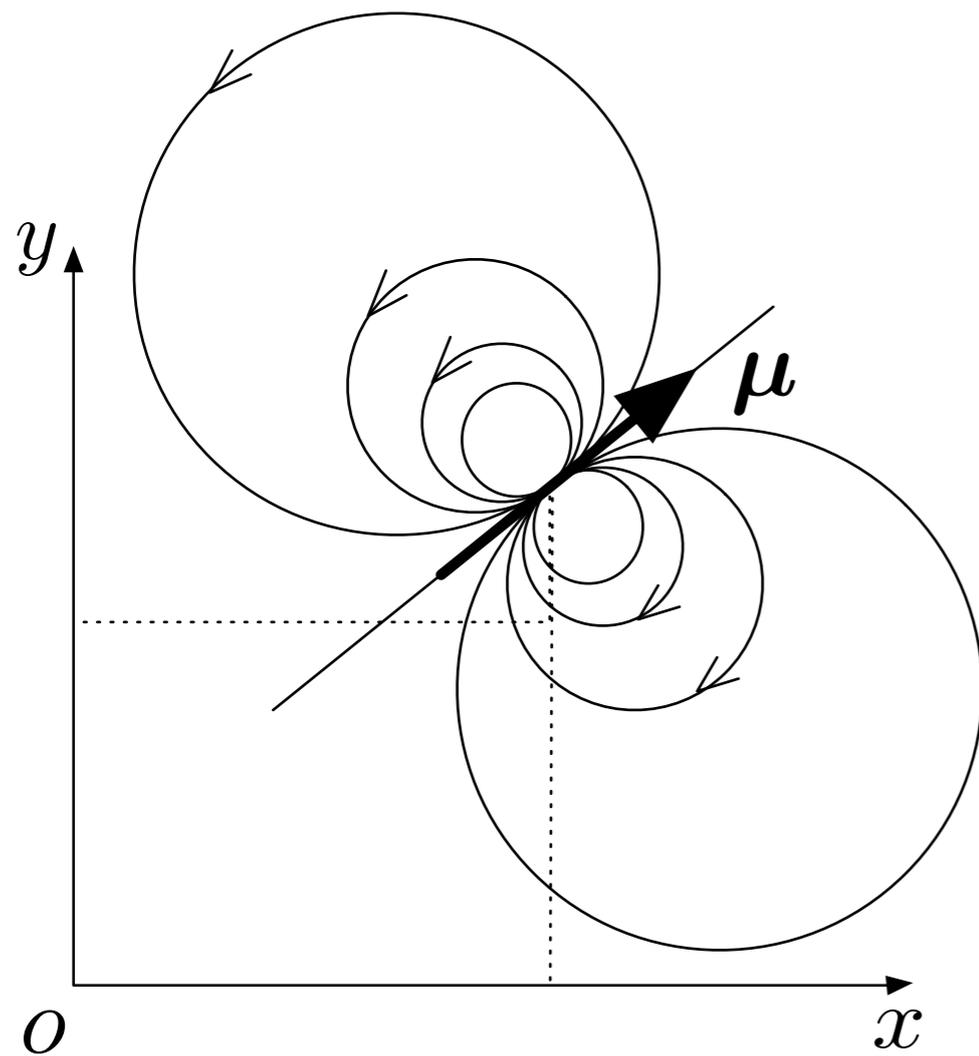


2次元流れ中の 双極子渦の相互作用について

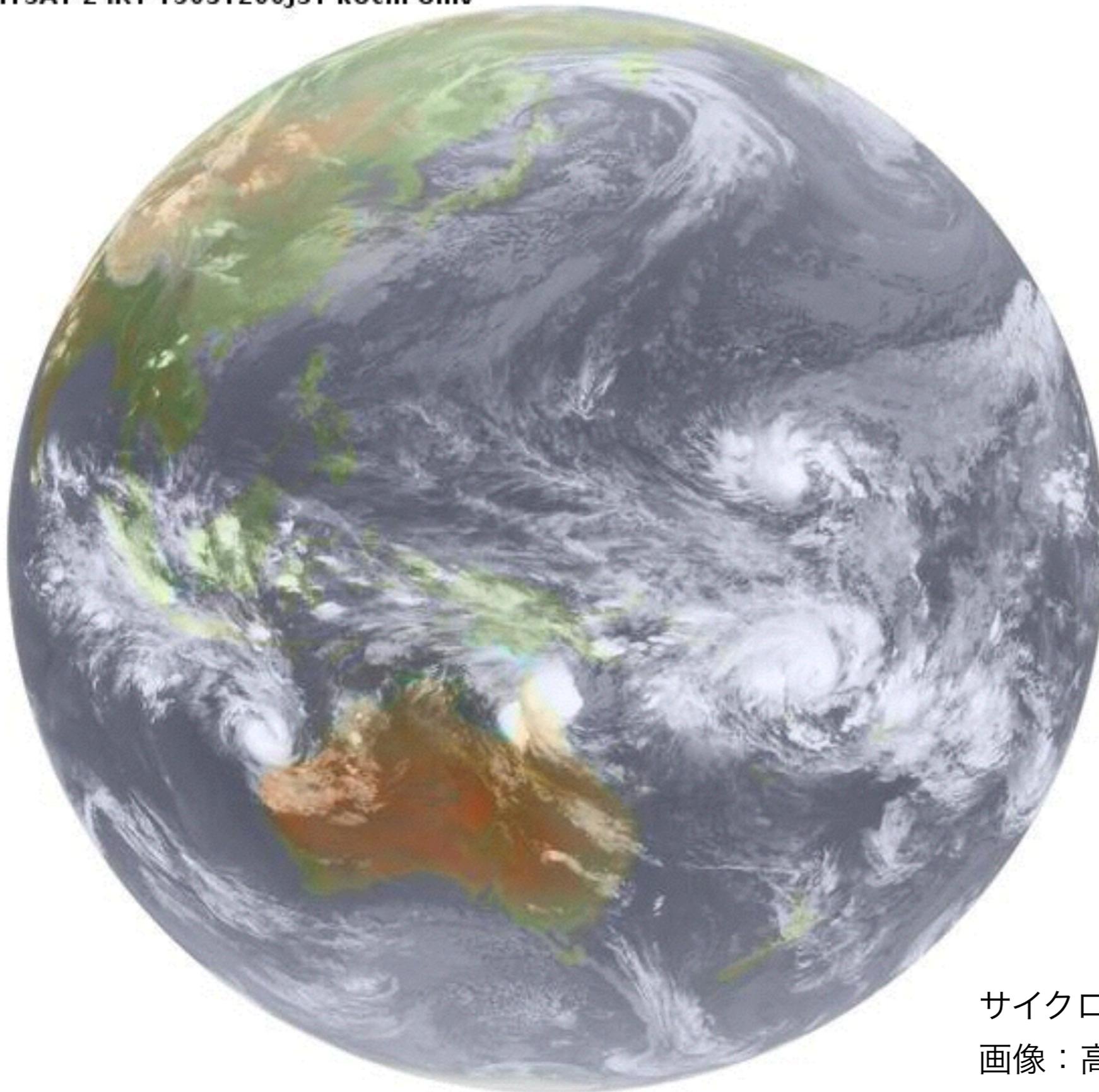
沼津高専 松本祐子



Flór and Heijst, J. Fluid Mech. (1994), 279, 101-133

双子低気圧

MTSAT-2 IR1 15031200JST Kochi Univ



- ・ 太平洋中央部では年に2、3個の双子熱帯低気圧（ツインサイクロン）が発生
- ・ 赤道を挟んでほぼ同じ緯経度であり、2～3年に一度STS（Severe Tropical Storm）にまで発達
- ・ エルニーニョ現象と関連

サイクロンパム（2015年3月12日）

画像：高知大学気象情報頁・気象庁

内容

1. 背景

- ・ 当初の目的：双極子を使ってラグランジュ的に非圧縮性流れの数値計算をしたい
- ・ 現状：数値計算法としては未完成
- ・ 運動モデルを使った双極子運動の解析

2. 双極子の運動モデル

3. 2次元流れ中の双極子の相互作用

- ・ 2体の衝突
- ・ 無限双極子列

4. まとめ

渦法

- ・ 渦度方程式のラグランジュ的数値計算法

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \omega$$

速度： \mathbf{u}

渦度： $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$

- ・ 離散化 $\omega(\mathbf{x}) = \sum \Gamma_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$, $\omega(\mathbf{x}) = \sum \Gamma_i f_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$

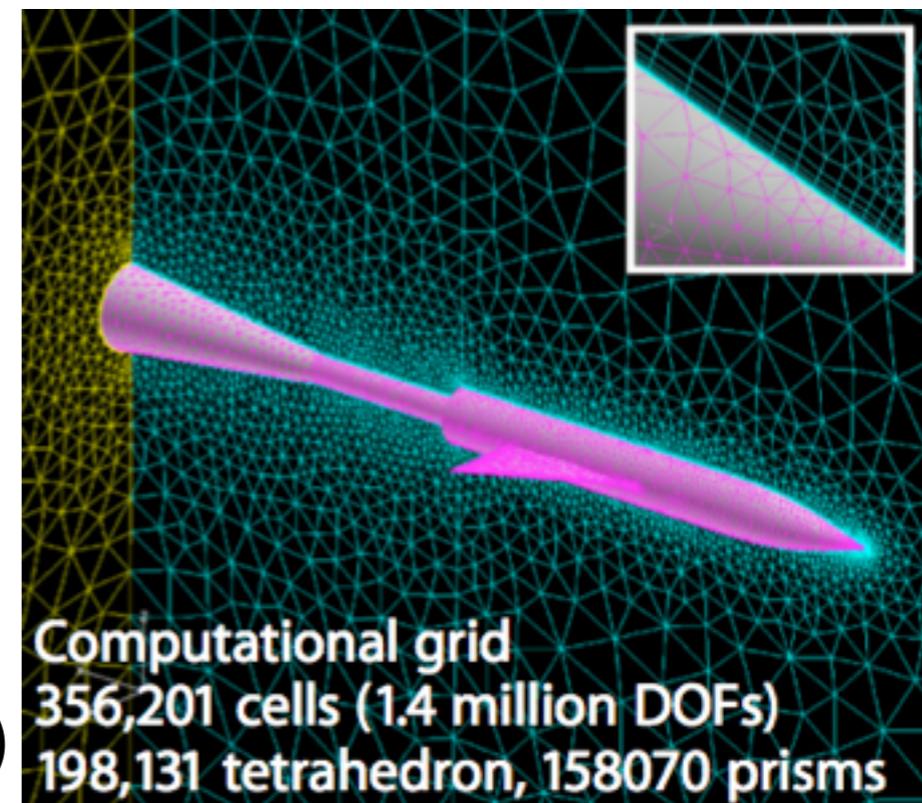
- ・ 計算格子が不要, 対流項がなく数値拡散がない

- ・ 2次元計算

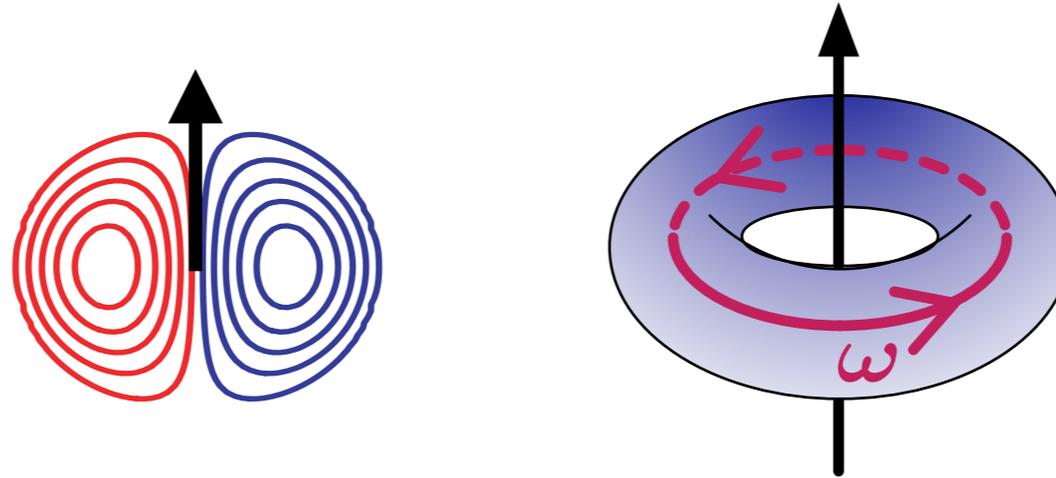
- 簡単な計算アルゴリズム
- 計算要素：particle (点)

- ・ 3次元計算

- 伸縮項の計算が複雑
- 計算要素：filament (紐), blob (球)
- 速度、渦度のdivergence-freeを満たす操作が必要



双極子法の提案



2次元 (渦対)

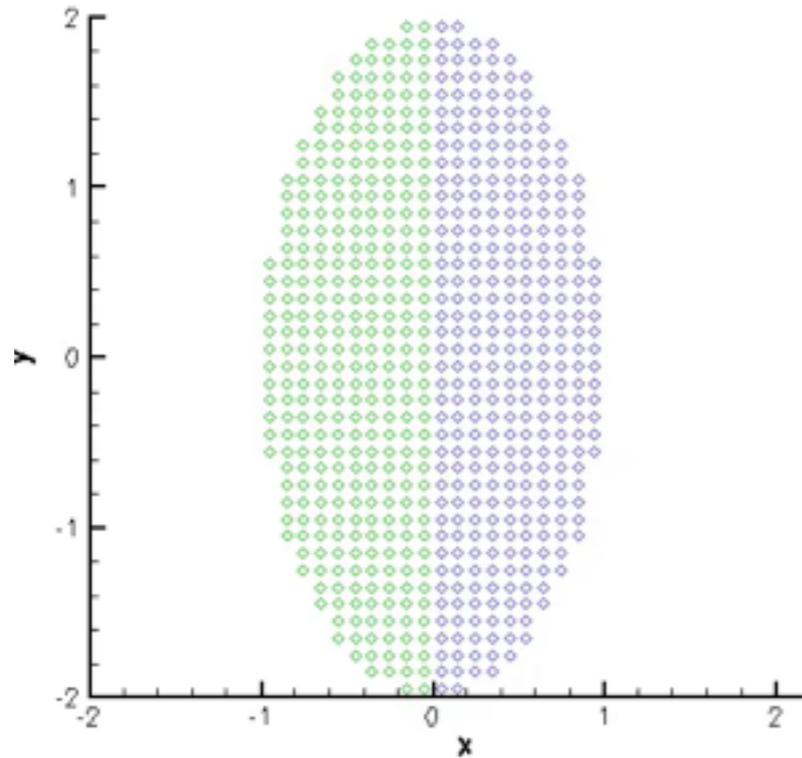
3次元 (渦輪)

赤：反時計回り

青：時計回り

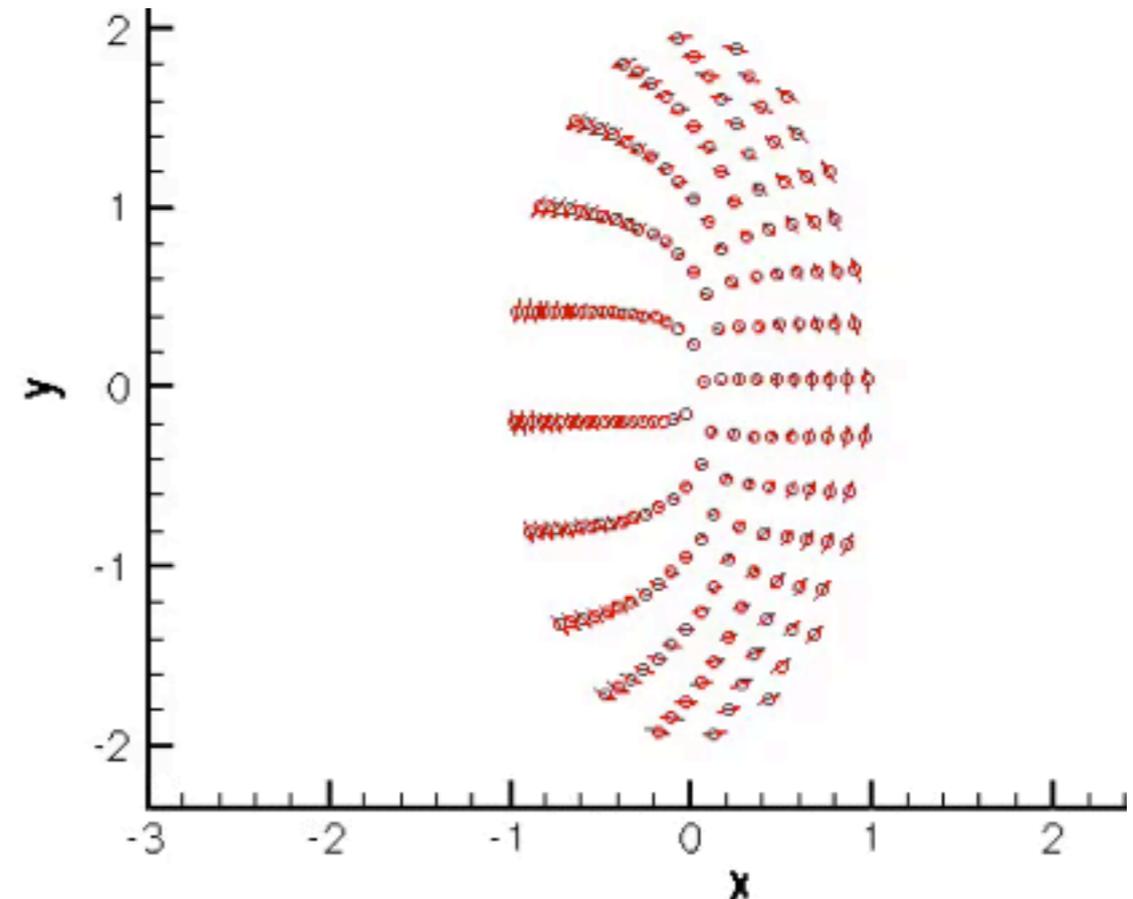
- ・ 計算要素：双極子
 - 2次元流れ：逆回転する渦対
 - 3次元流れ：円形渦輪
- ・ 2次元, 3次元ともに双極子の誘起する速度と渦度は divergence free を満たす

数値計算例



楕円渦の回転（渦法による計算）

点：渦要素



楕円渦の回転（双極子法による計算）

矢印：モーメント（双極子の強さを表すベクトル）

- ・ モーメントの指数的增长と計算要素の不足が問題
- ・ 解決にはrefresh（人工的な計算操作）が必要
- ・ 現在の主なテーマは2次元双極子運動の解析

双極子の運動モデル

Moment model for vortex patches

- Melander et. al., J. Fluid Mech., (1986)
- 渦度一定の渦の運動を重心 \mathbf{X} とモーメント $J^{(m,n)}$ で表現

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\Gamma} \int_{\Omega} \mathbf{x} \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \Gamma = \int_{\Omega} \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$J^{(m,n)} = \int_{\Omega} x^m y^n d\mathbf{x} \quad \Omega: \text{渦領域}$$

- 流れ関数

$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \omega(\mathbf{x}') \log |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| d\mathbf{x}'$$

- $\log |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ を渦重心周りで展開し, 流れ関数をEuler方程式に代入すると, モーメント $J^{(m,n)}$ の方程式が決定

Moment model for a dipole

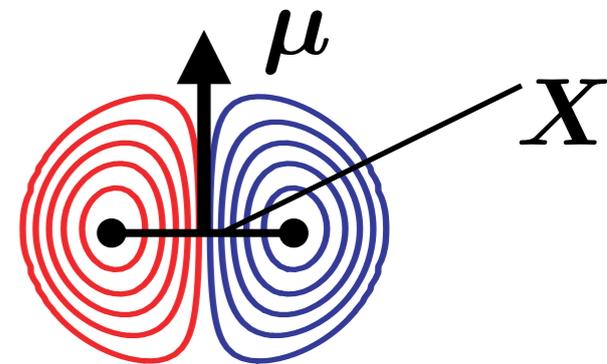
- Matsumoto et. al., Phys. Fluids, (2009)
- 双極子渦の運動を双極子重心 \mathbf{X} と双極子モーメント $\boldsymbol{\mu}$ で表現

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{x}^{(+)} + \mathbf{x}^{(-)}}{2} \quad \boldsymbol{\mu} = \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

- 二つの渦の強さは等しく， 逆符号と仮定
- 渦度は一定ではなく， 分布 $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ を持つ
- 流れ場は双極子の誘起速度と background flow の重ね合わせ
- 流れ関数を双極子重心周りで展開し， Euler方程式に代入すると， 双極子モーメント $\boldsymbol{\mu}$ の方程式が決定

$$\frac{d\mu_i}{dt} = -\mu_j \left. \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}}$$

$\mathbf{v}(\mathbf{x})$: background flow



運動方程式

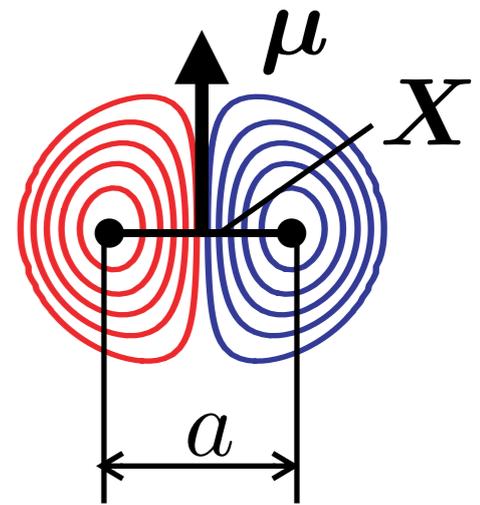
Matsumoto and Ueno, Fluid Dyn. Res. (2014), 46, 031413

N個の双極子の相互作用を考える

$$\frac{d\mathbf{X}^{(m)}}{dt} = \mathbf{u}^{(m)} + \sum_{n \neq m}^N \mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{X}^{(m)})$$

$$\frac{d\mu_i^{(m)}}{dt} = - \sum_{n \neq m}^N \mu_j^{(n)} \left. \frac{\partial v_j^{(n)}}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^{(m)}}$$

$$(m = 1, \dots, N)$$



m番目の双極子の自己推進速度： $\mathbf{u}^{(m)} = \frac{\boldsymbol{\mu}^{(m)}}{2\pi a^2}$, $a = |\boldsymbol{\mu}|/\Gamma$

n番目の双極子がm番目の双極子に誘起する速度： $\mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{X}^{(m)})$

誘起速度

$$\mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x} \right) \psi^{(m)}(\mathbf{x})$$

$$\psi^{(m)}(\mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{\mu}^{(m)} \times (\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(m)}) \cdot \mathbf{e}_z}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(m)}|^2} + O \left[\frac{(a^{(m)})^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(m)}|^2} \right]$$

双極子同士の距離はそれぞれの長さスケールに比べて小さいと仮定する

不變量

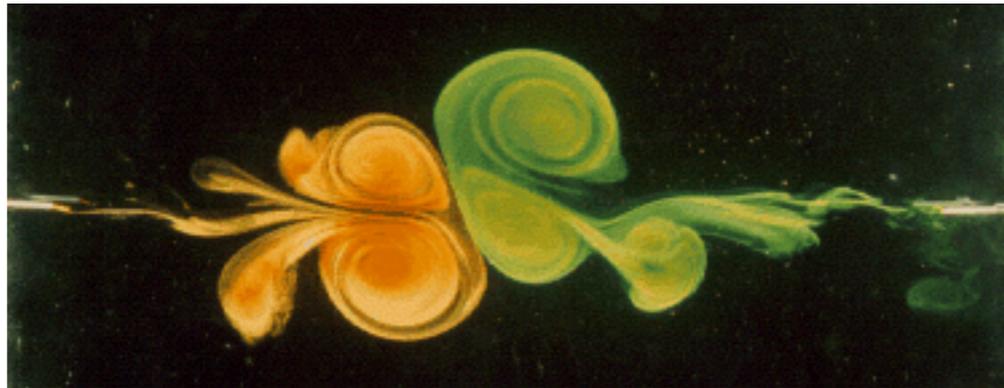
Total impulse

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} \, dS = \sum_n^N \boldsymbol{\mu}^{(n)} = \text{const}$$

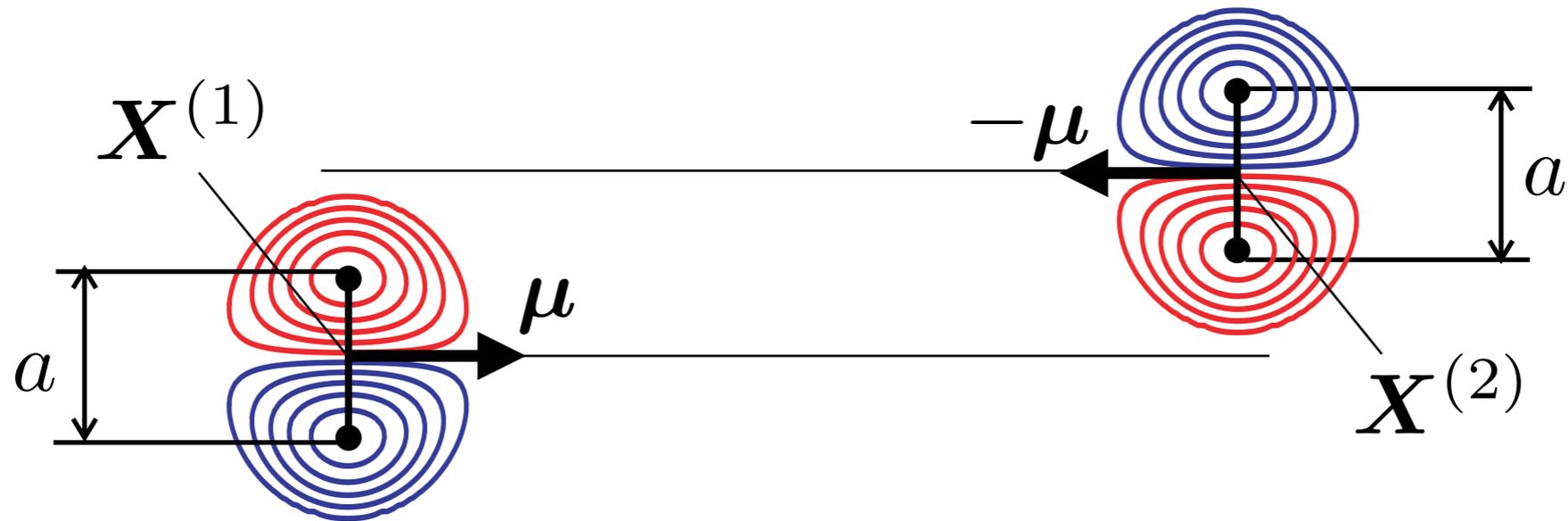
Angular impulse

$$A = \int |\mathbf{x}|^2 \omega(\mathbf{x}) \, dS = \sum_n^N (\mathbf{X}^{(n)} \times \boldsymbol{\mu}^{(n)}) \cdot \mathbf{e}_z = \text{const}$$

Colinear dipoles

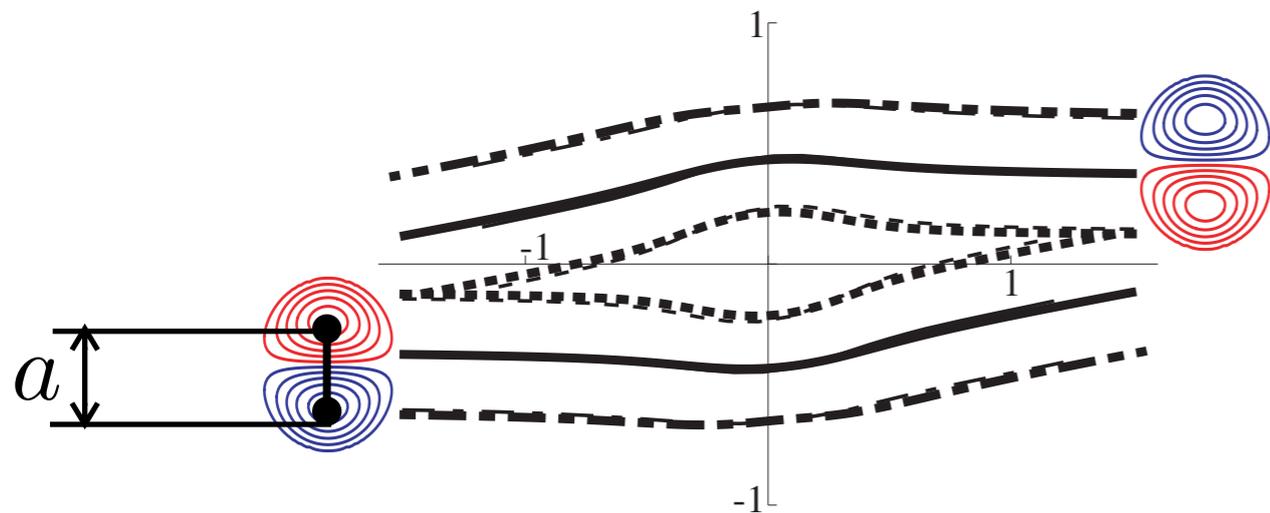


問題設定



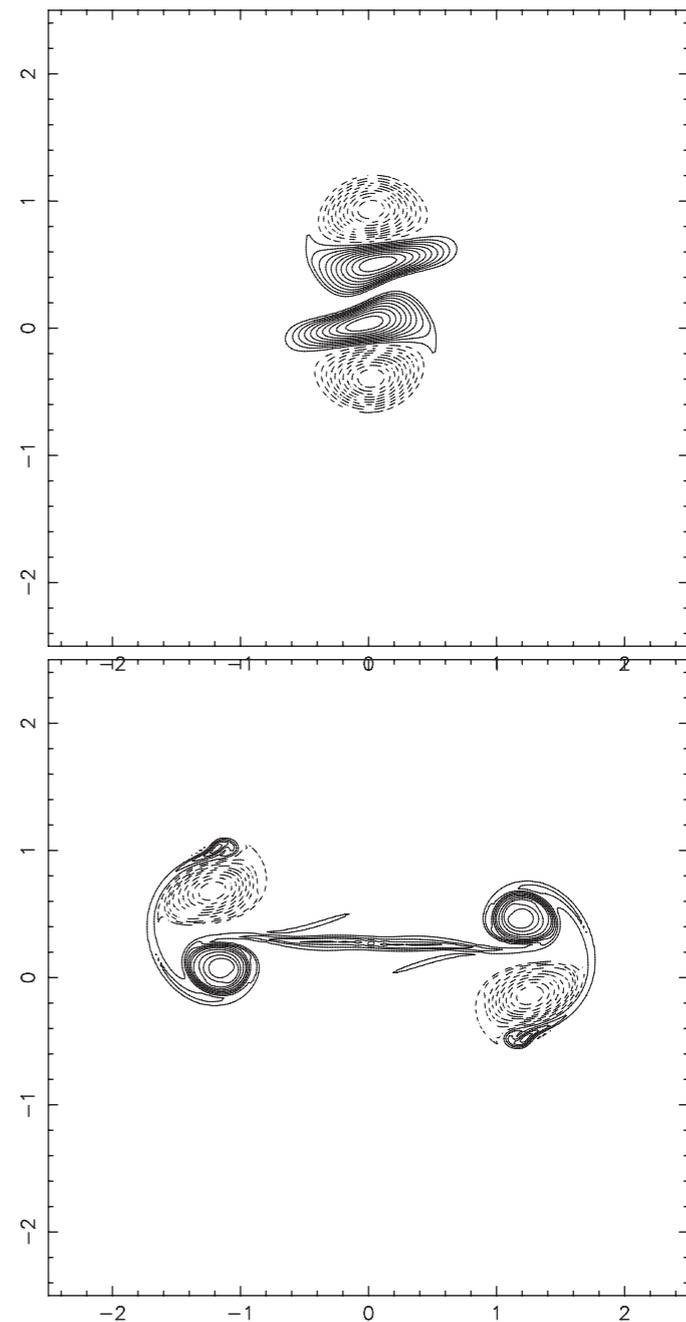
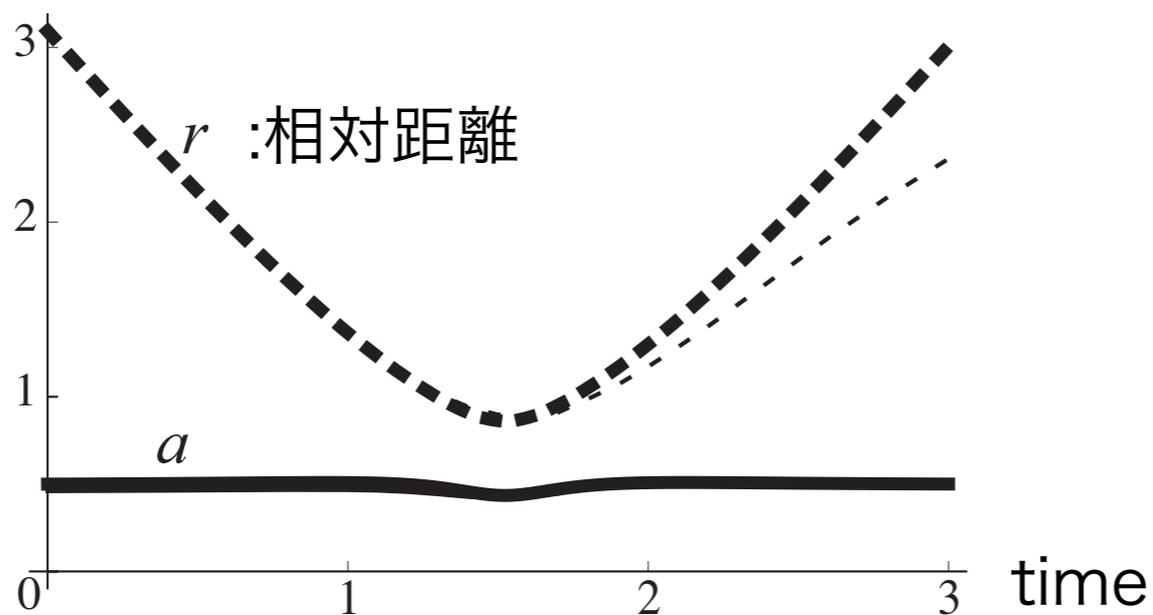
- ・ 平行かつ逆向きに2つの双極子 (Lamb dipole) を配置
$$\mu = \mu^{(1)} = -\mu^{(2)}, \quad \Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$$
- ・ 対称性より, 系の重心は不定
- ・ 相対位置ベクトル $r = X^{(2)} - X^{(1)}$ を導入
- ・ 不変量: H, A
 - 2自由度で表現可能

① direct scattering $H > H_c$



——— $X^{(1)}, X^{(2)}$
 $x^{(+)}$
 - - - - $x^{(-)}$

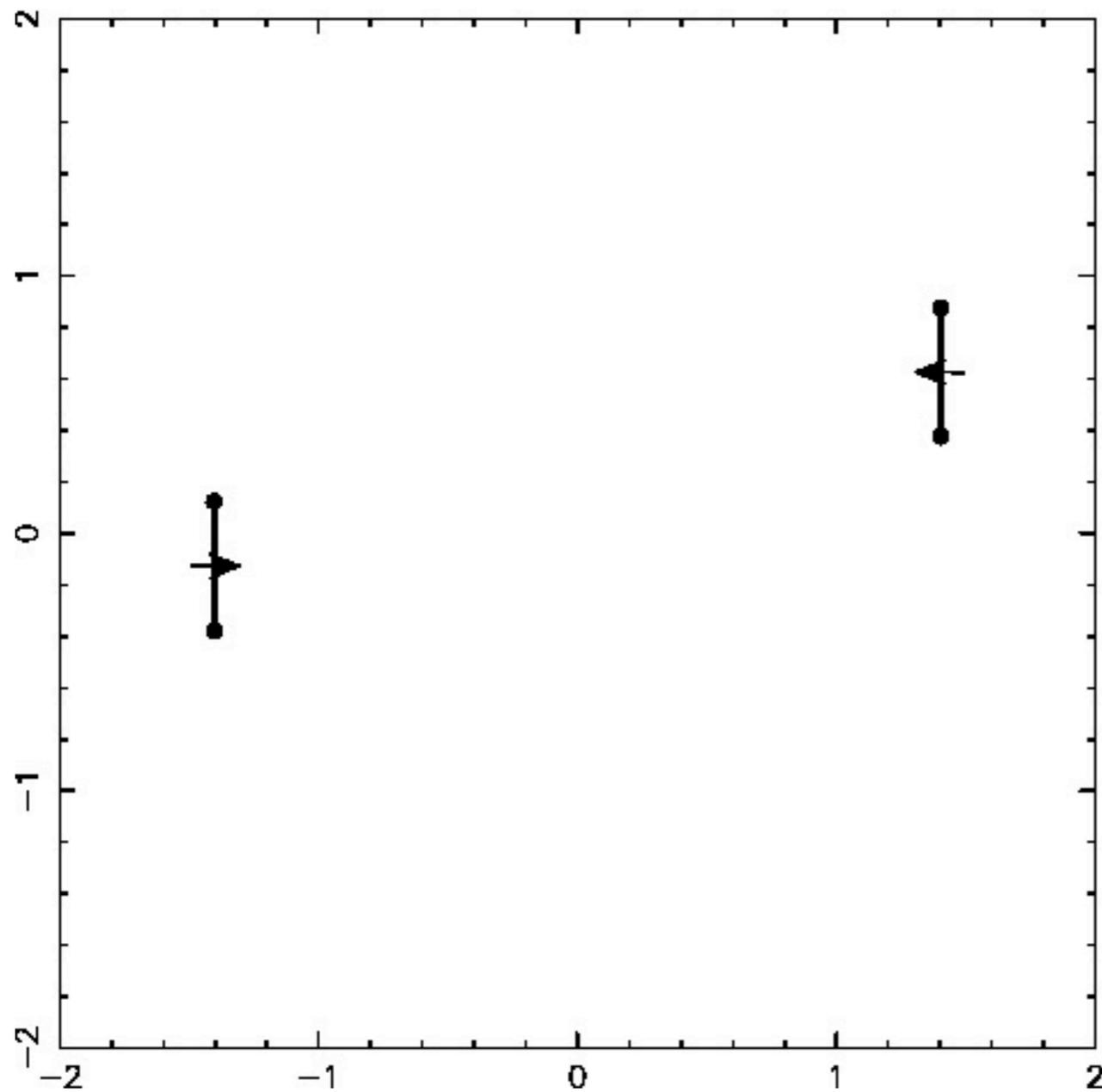
細線: 数值計算
 太線: モデル



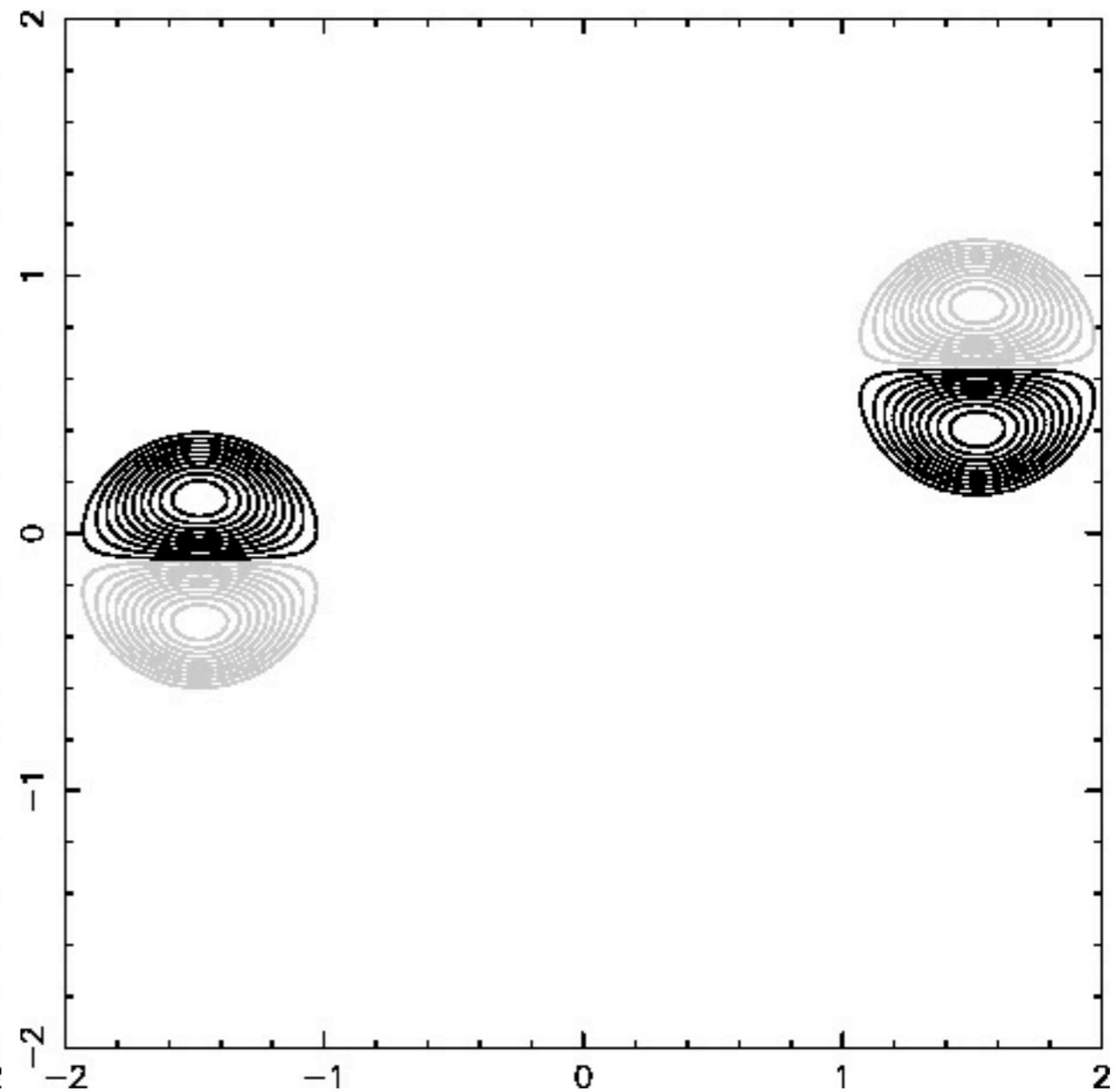
数值計算結果

— direct scattering

① direct scattering $H > H_c$

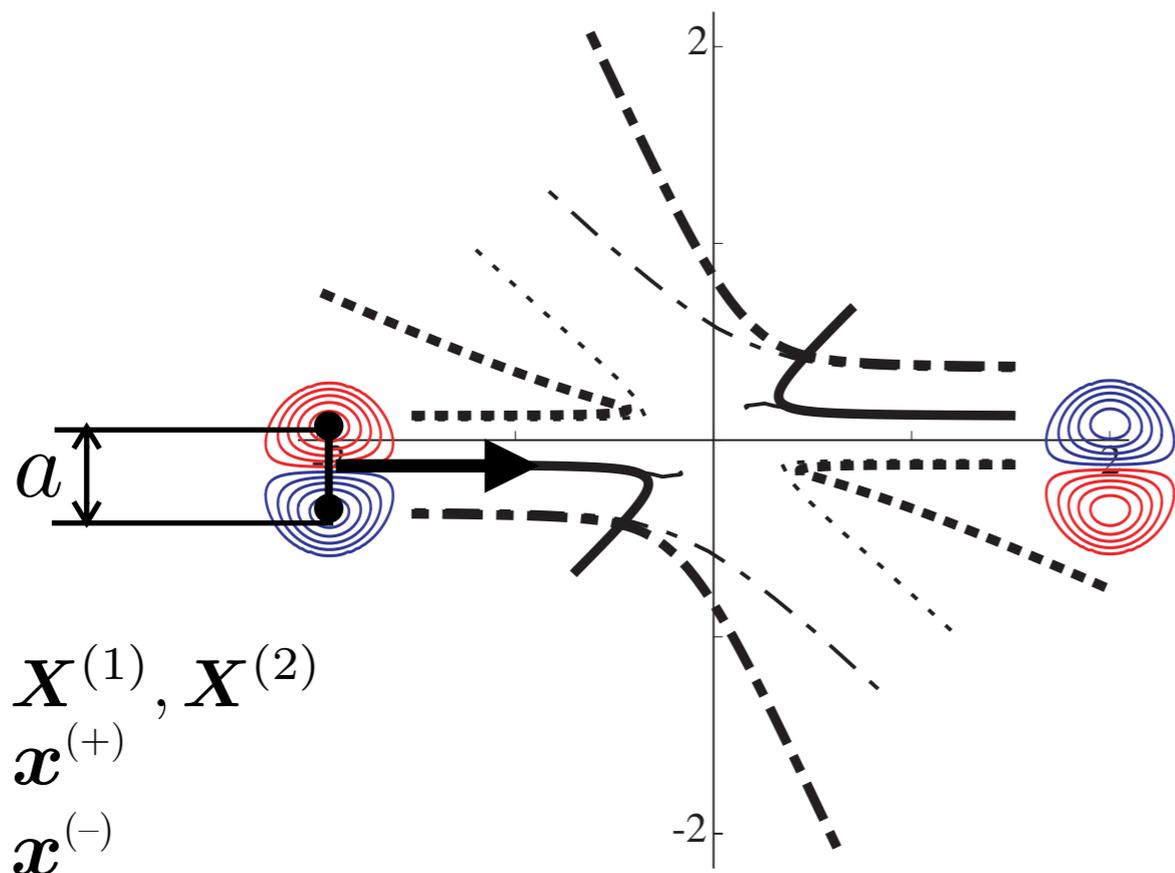


モデル



数値計算 (渦度分布)

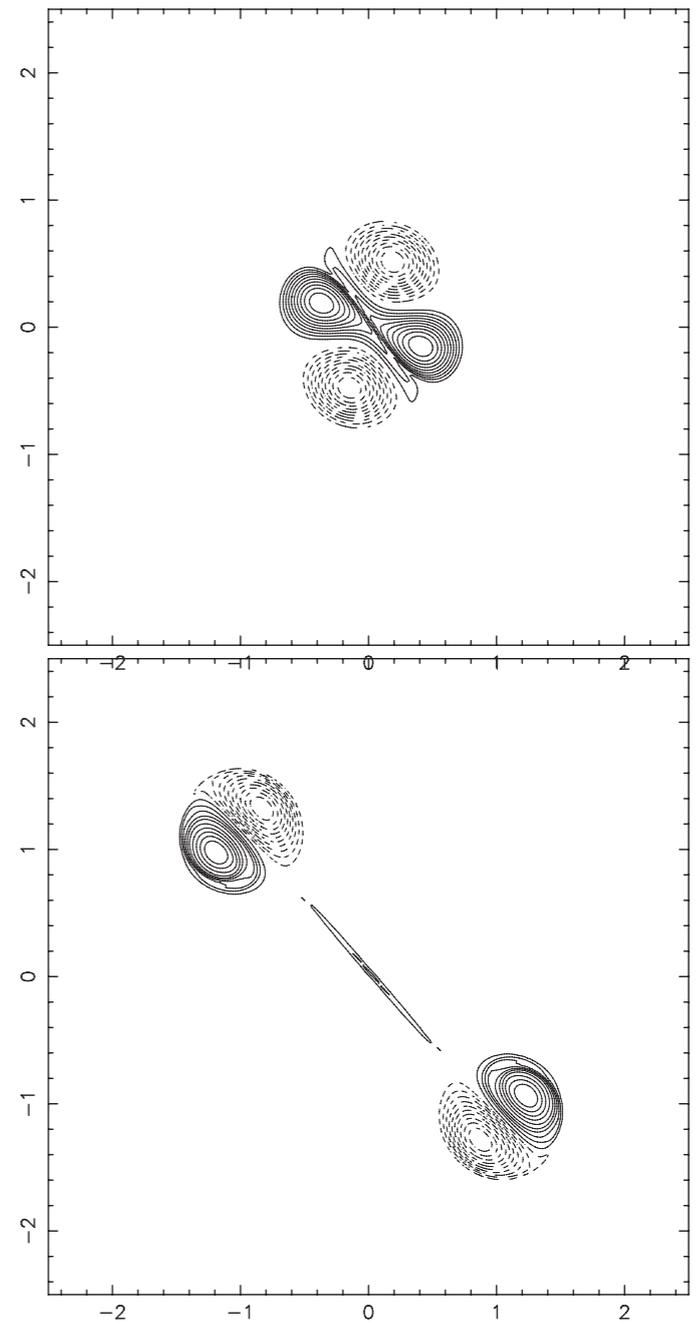
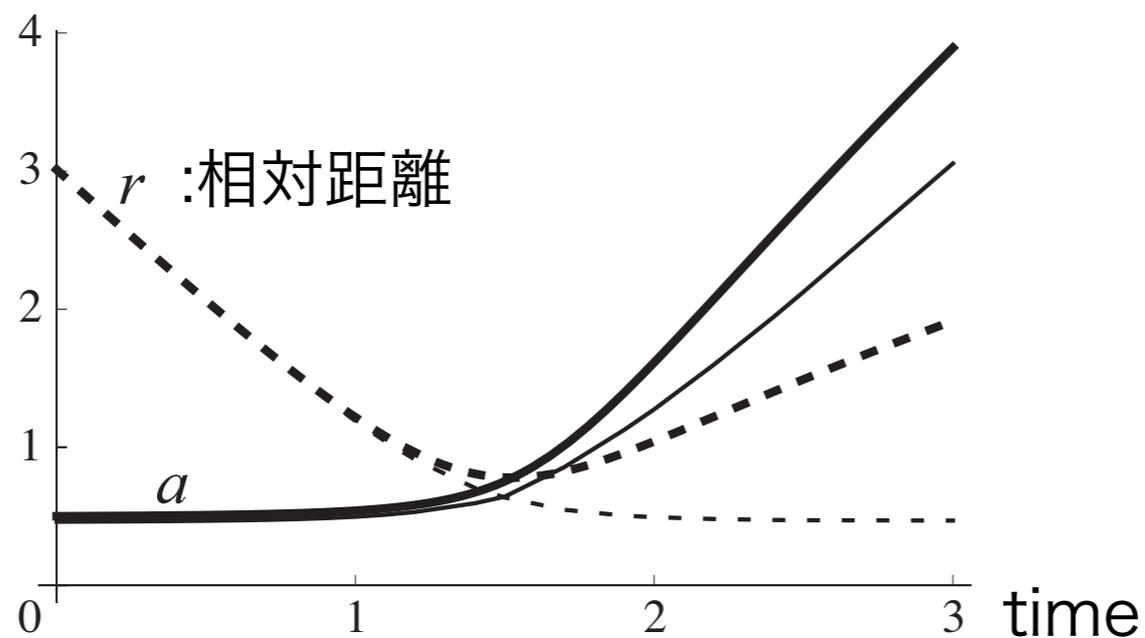
②exchange $H < H_c$



——— $X^{(1)}, X^{(2)}$
 $x^{(+)}$
 - - - - $x^{(-)}$

渦重心の軌跡

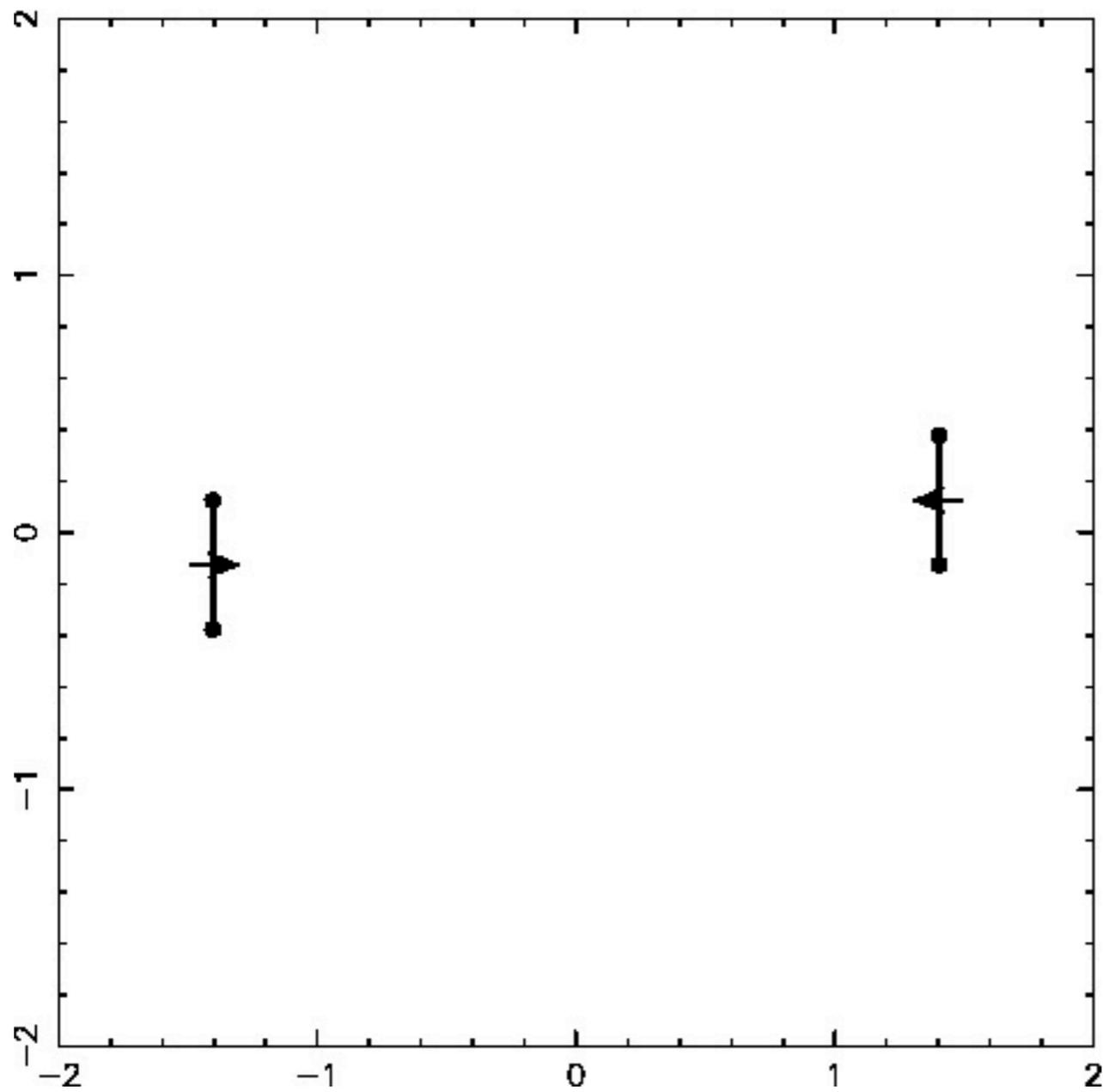
細線: 数値計算
 太線: モデル



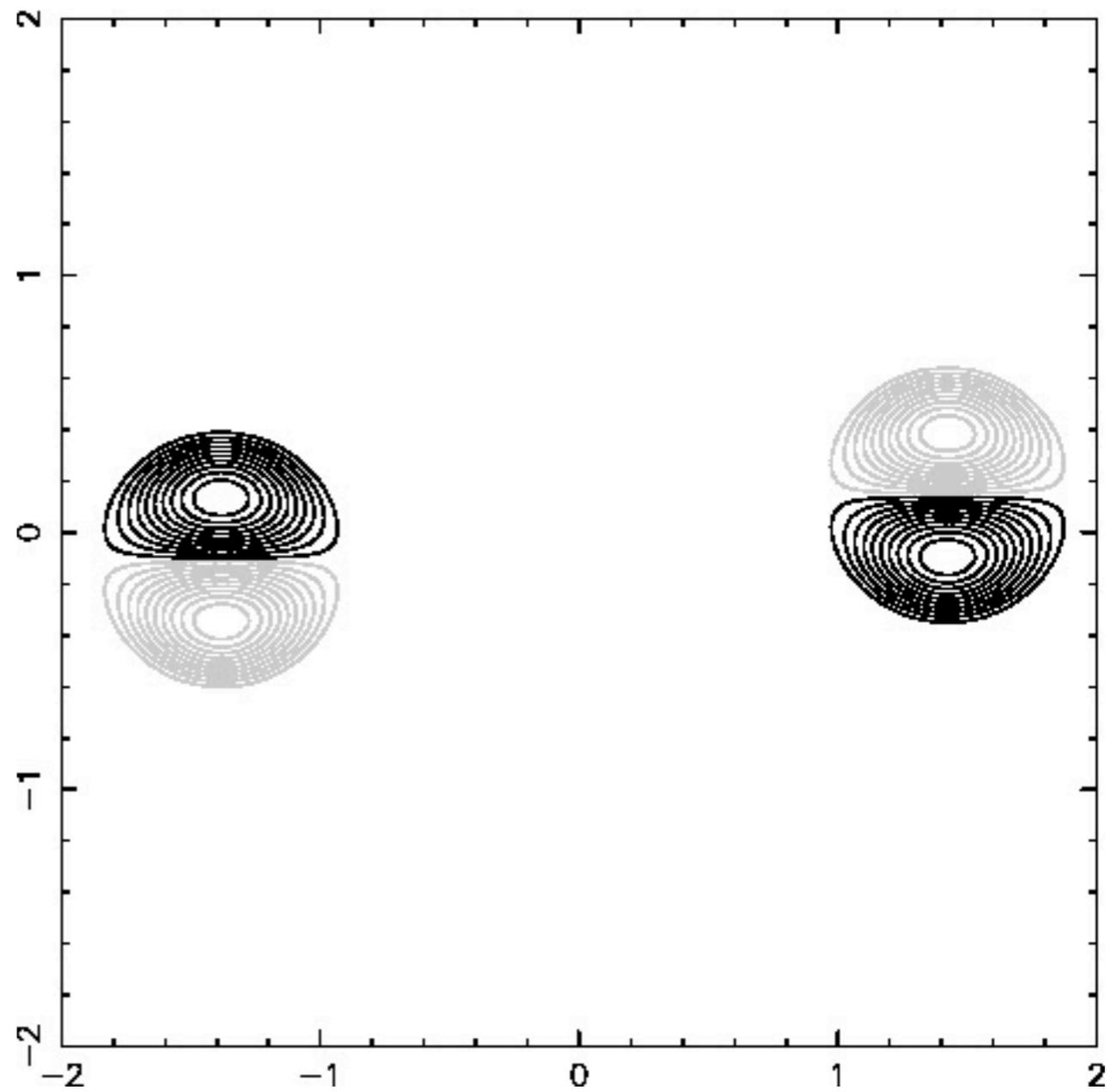
数値計算結果

— exchange

②exchange $H < H_c$

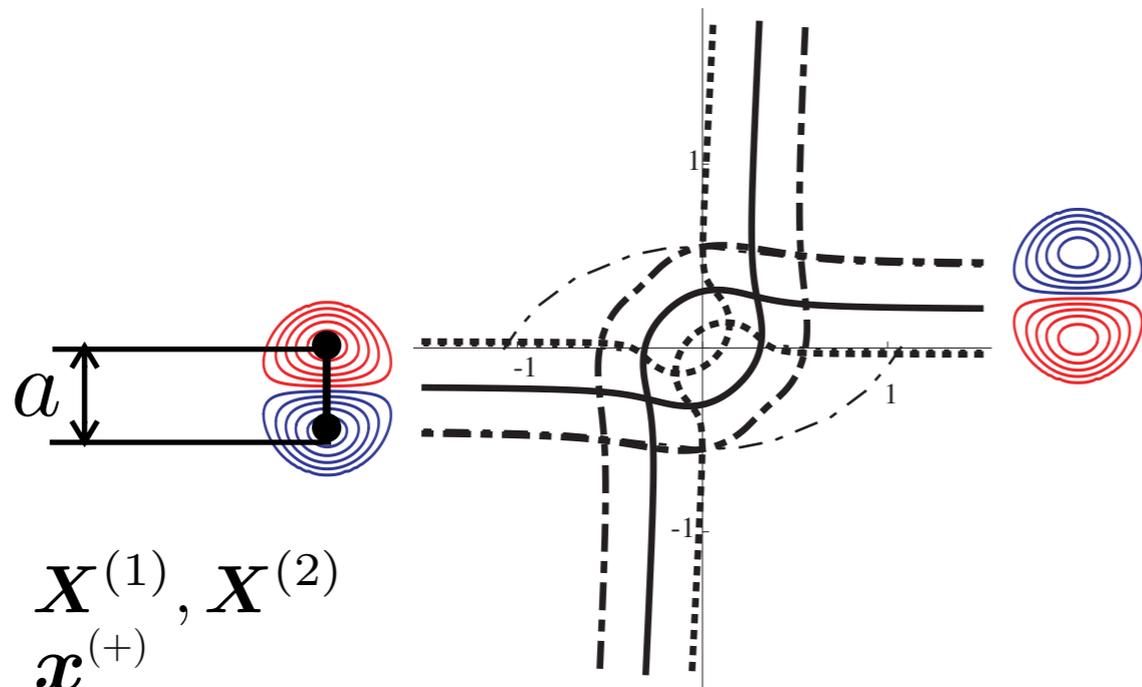


モデル



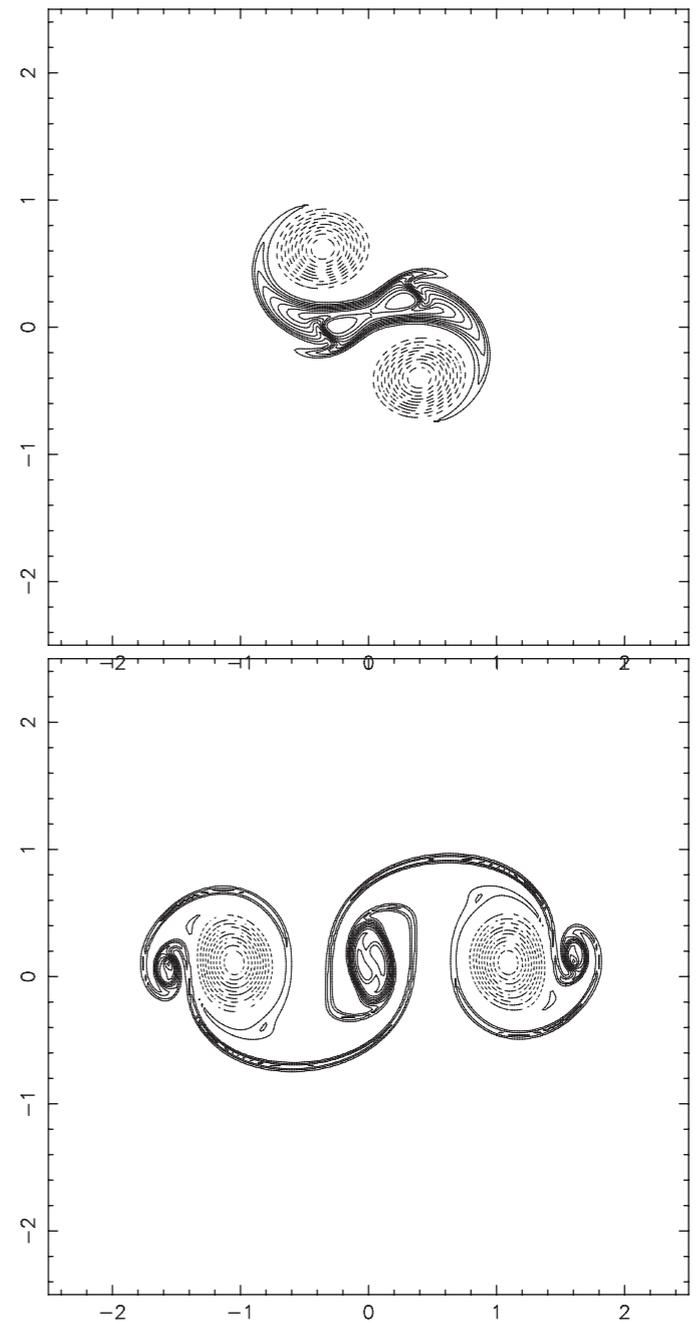
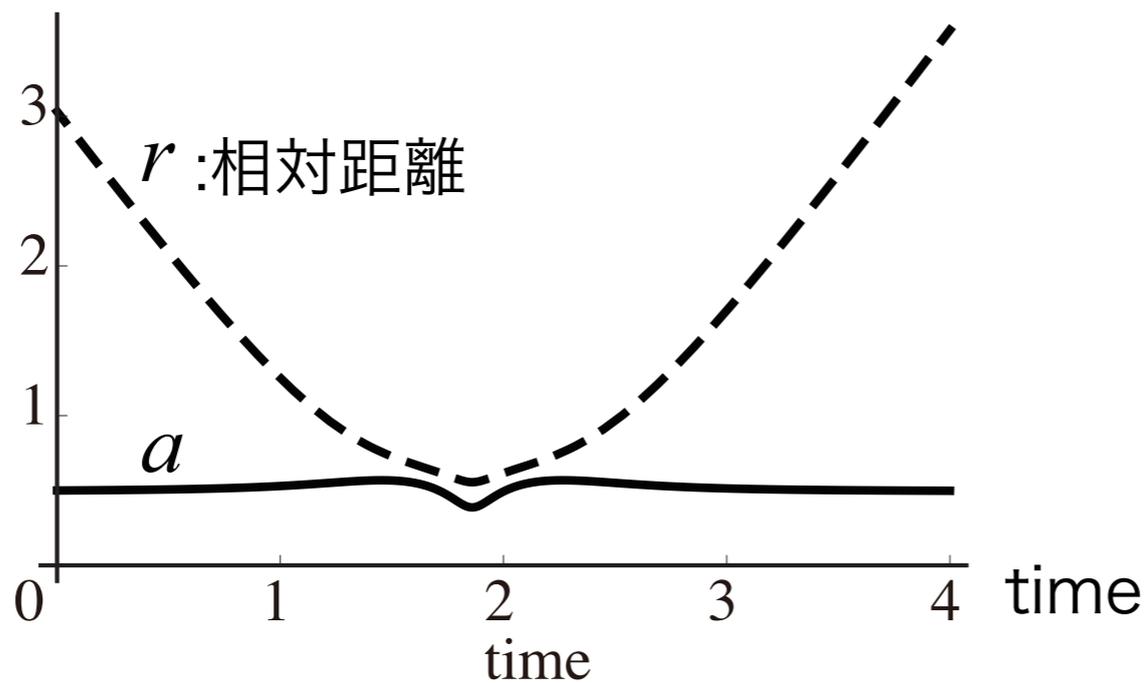
数値計算 (渦度分布)

③merge $H \sim H_c$



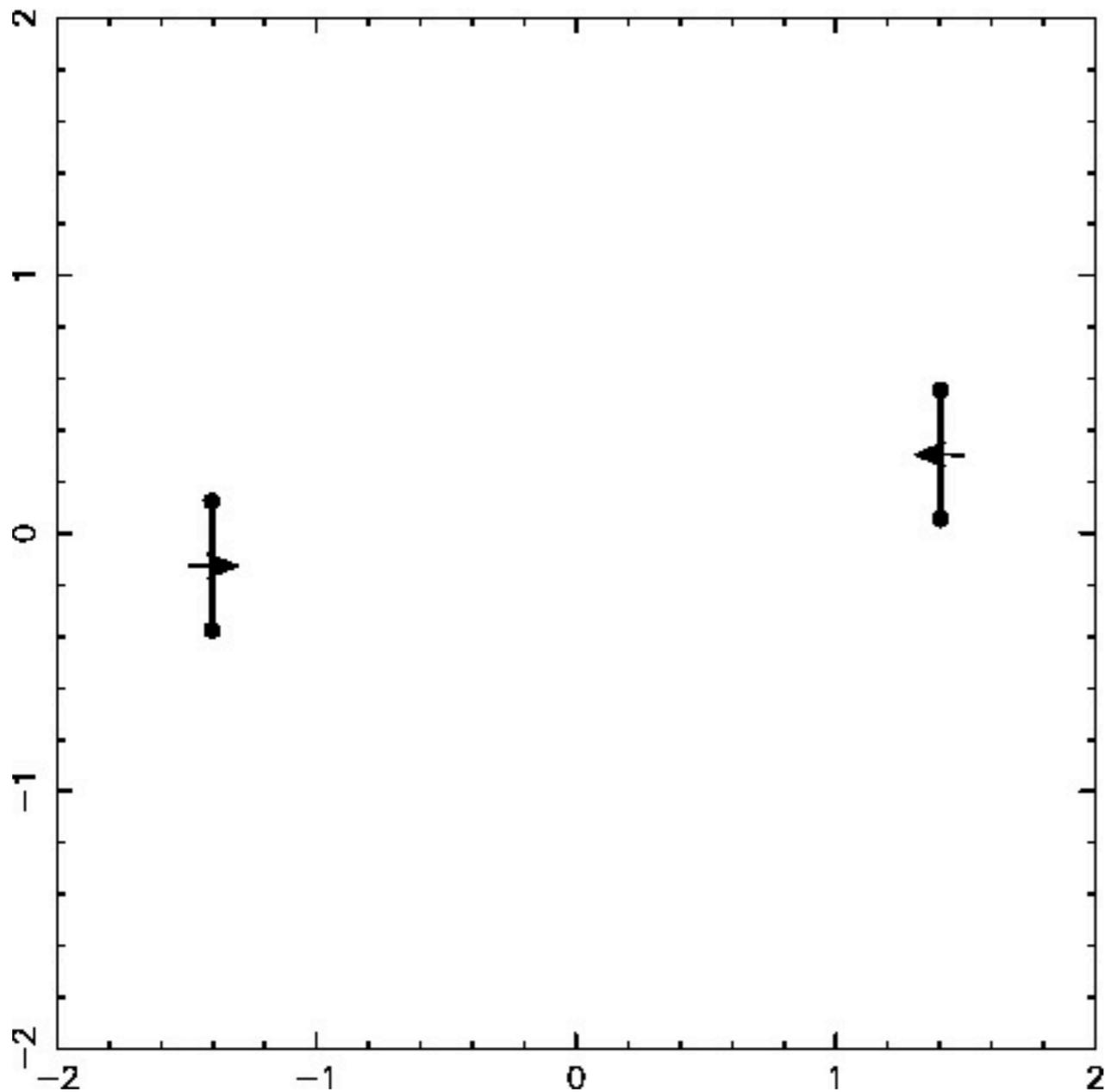
——— $X^{(1)}, X^{(2)}$
 $x^{(+)}$
 - - - - $x^{(-)}$

細線: 数值計算
 太線: モデル

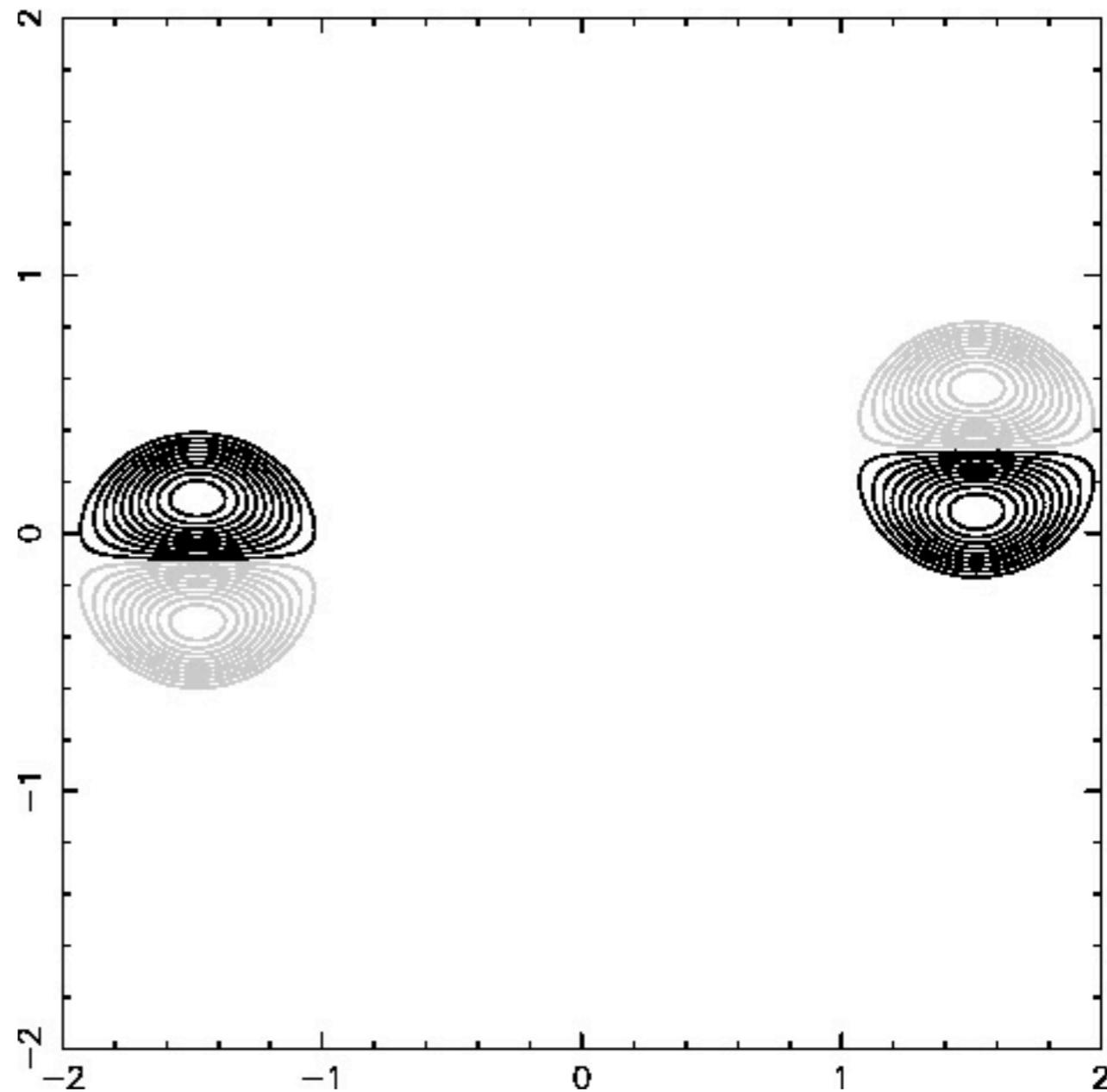


数值計算結果
 — merge

③merge $H \sim H_c$



モデル



数値計算 (渦度分布)

物体後流中の渦列

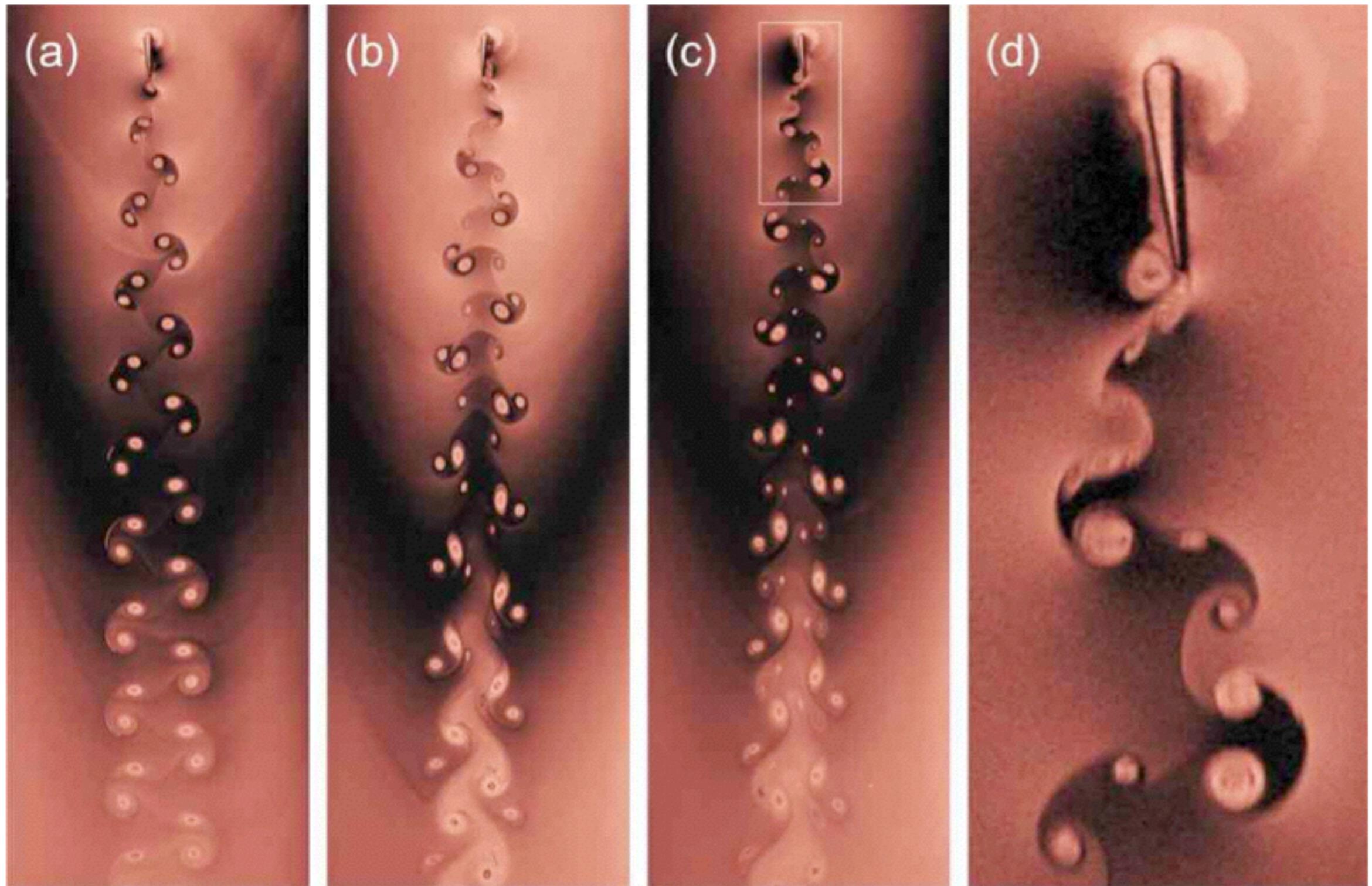
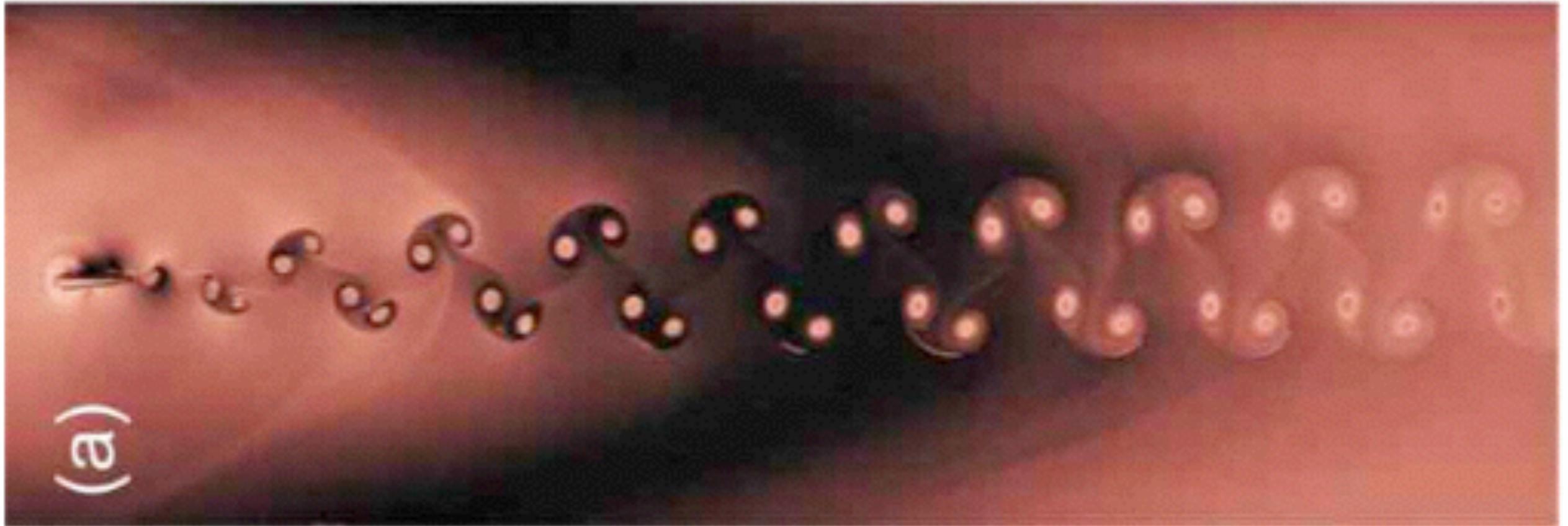
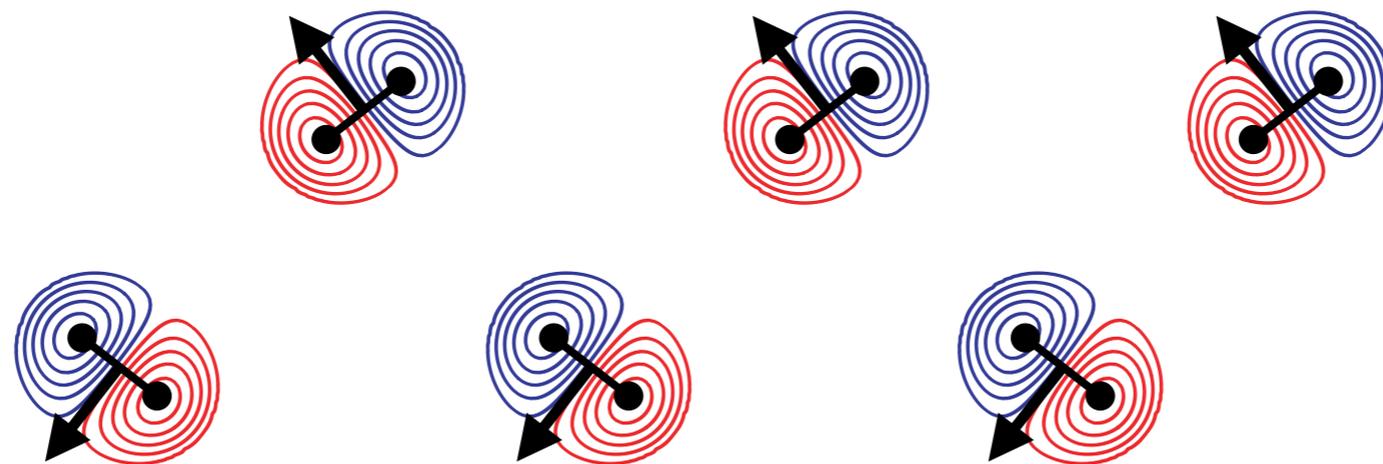


Fig. 4 Wakes generated by a flapping foil in a flowing soap film. (a) $St = 0.085$, $A_D = 1.2$. (b) $St = 0.074$, $A_D = 1.5$. (c) $St = 0.069$, $A_D = 1.6$. (d) Magnification showing clearly the vortex formation process

解析対象

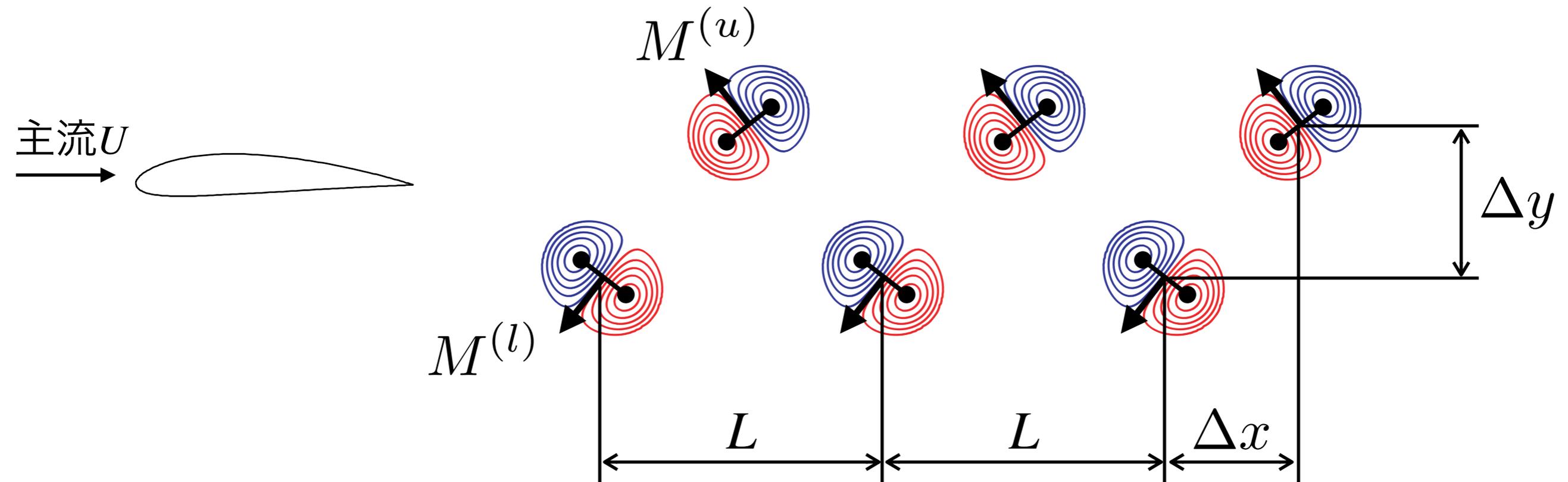


Andersen et al., Theor.Comput. Fluid Dyn. (2010)



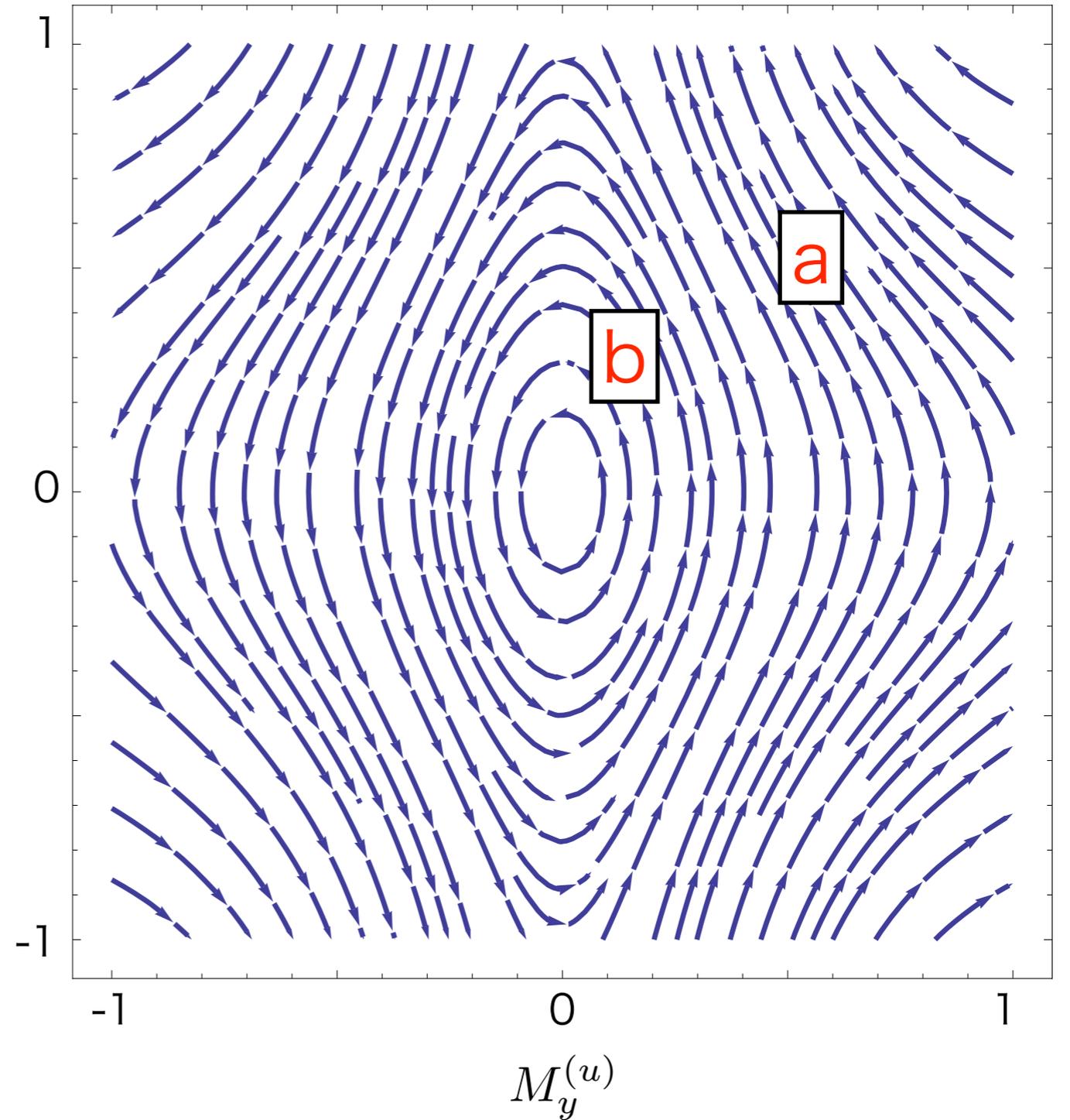
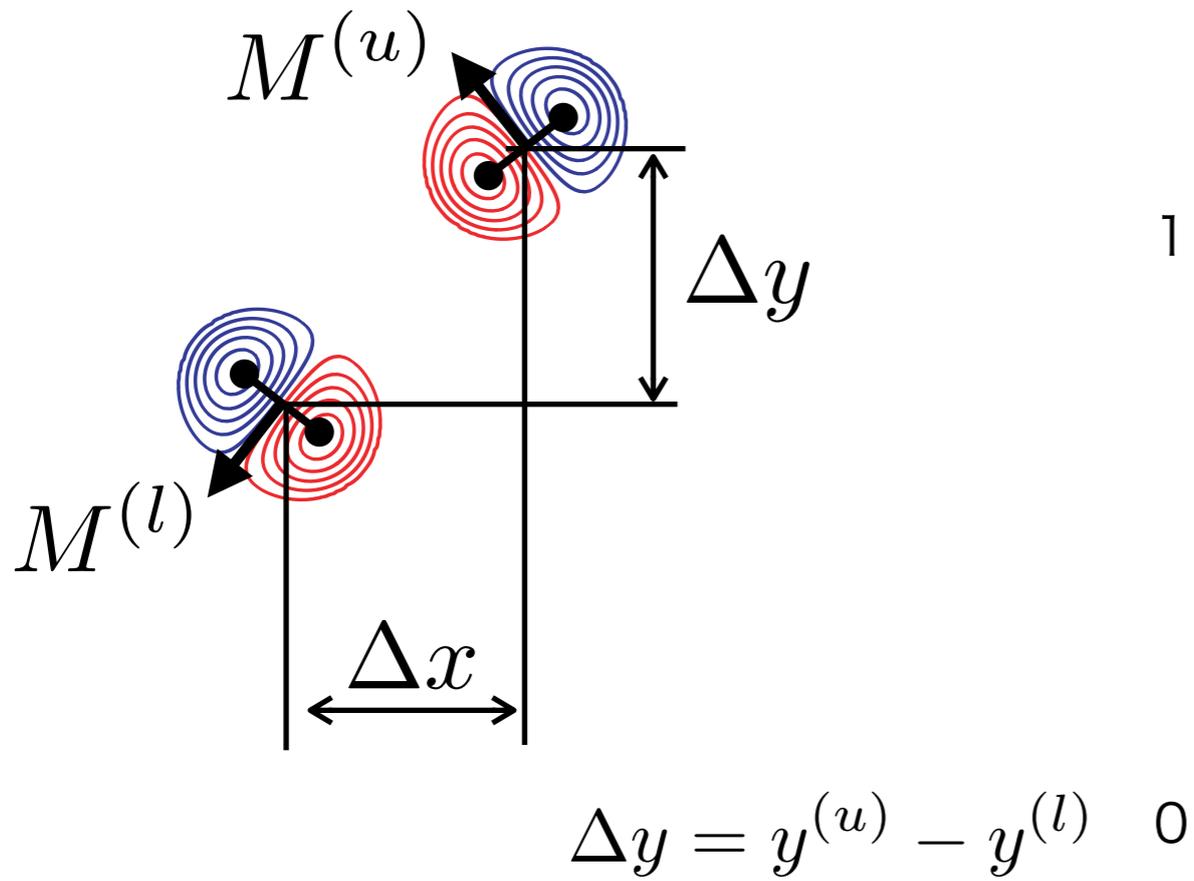
無限に続く双極子渦列として近似

解析対象



- ・ 上下対称の無限に続く双極子列
- ・ 主流とともに動く座標系（複素平面）で考える
- ・ それぞれの列は同じ大きさ、向き of 双極子が等間隔に並ぶ
 - 位置 $z_n^{(l)} = nL$ $z_n^{(u)} = nL + \Delta x + i\Delta y$
 - モーメント $M^{(l)}, M^{(u)}$ ($-\infty < n < \infty$)

$$H(\Delta y, M_y)$$



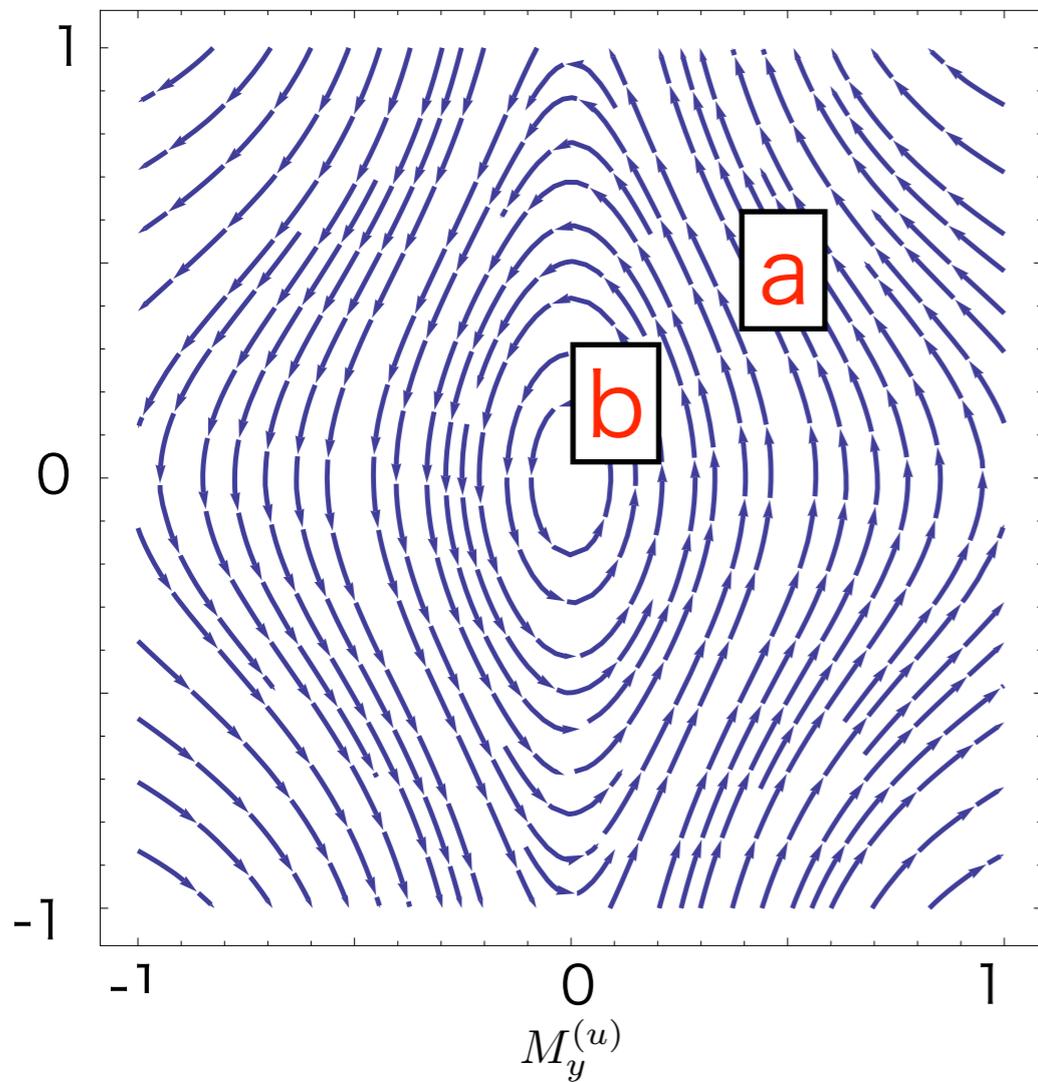
・ 対称性により

$$M^{(l)} = \overline{M}^{(u)}$$

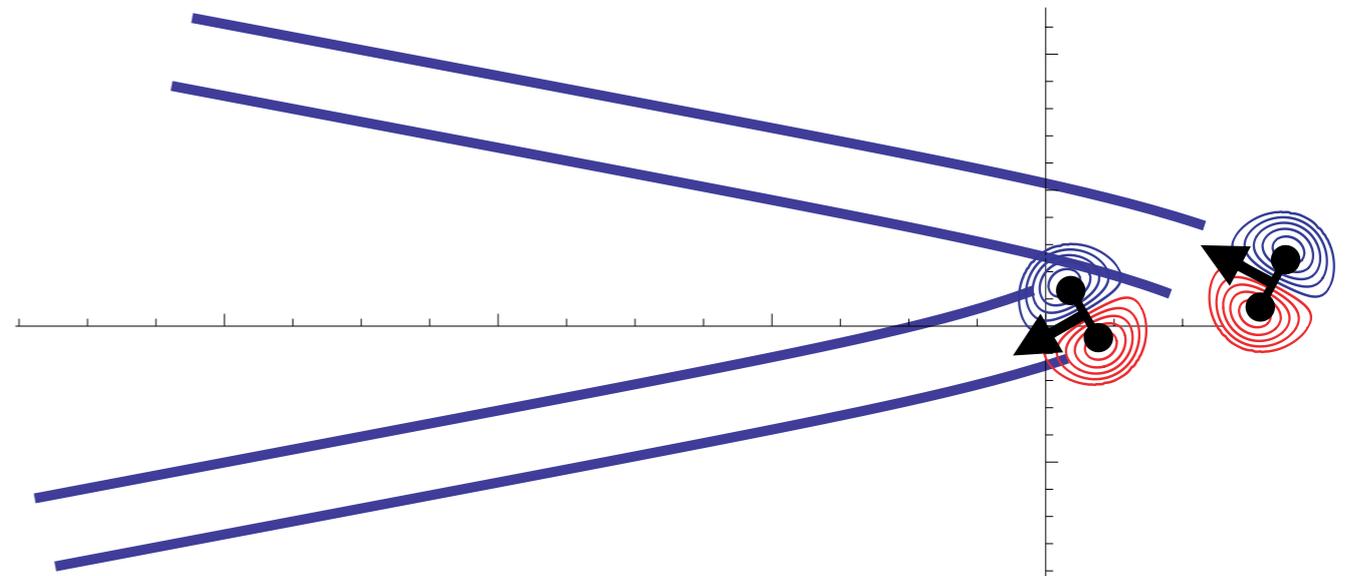
$$M_x^{(l)} = M_x^{(u)} = \text{const.}$$

$$\Delta x = \frac{L}{2} = \text{const.}$$

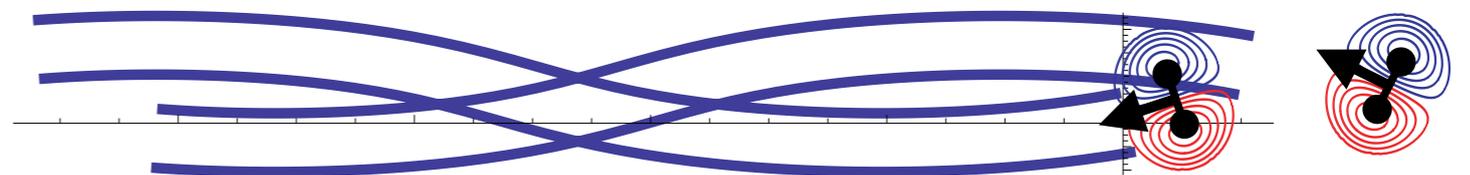
渦の軌道



a. 徐々に離れる (実験で観察)



b. 周期的に振動する



まとめ

- ・ 2次元流れ中の双極子運動の計算モデルを構築
- ・ 双極子の衝突、無限列に適用
- ・ 多重極渦への展開、数値解析手法への発展