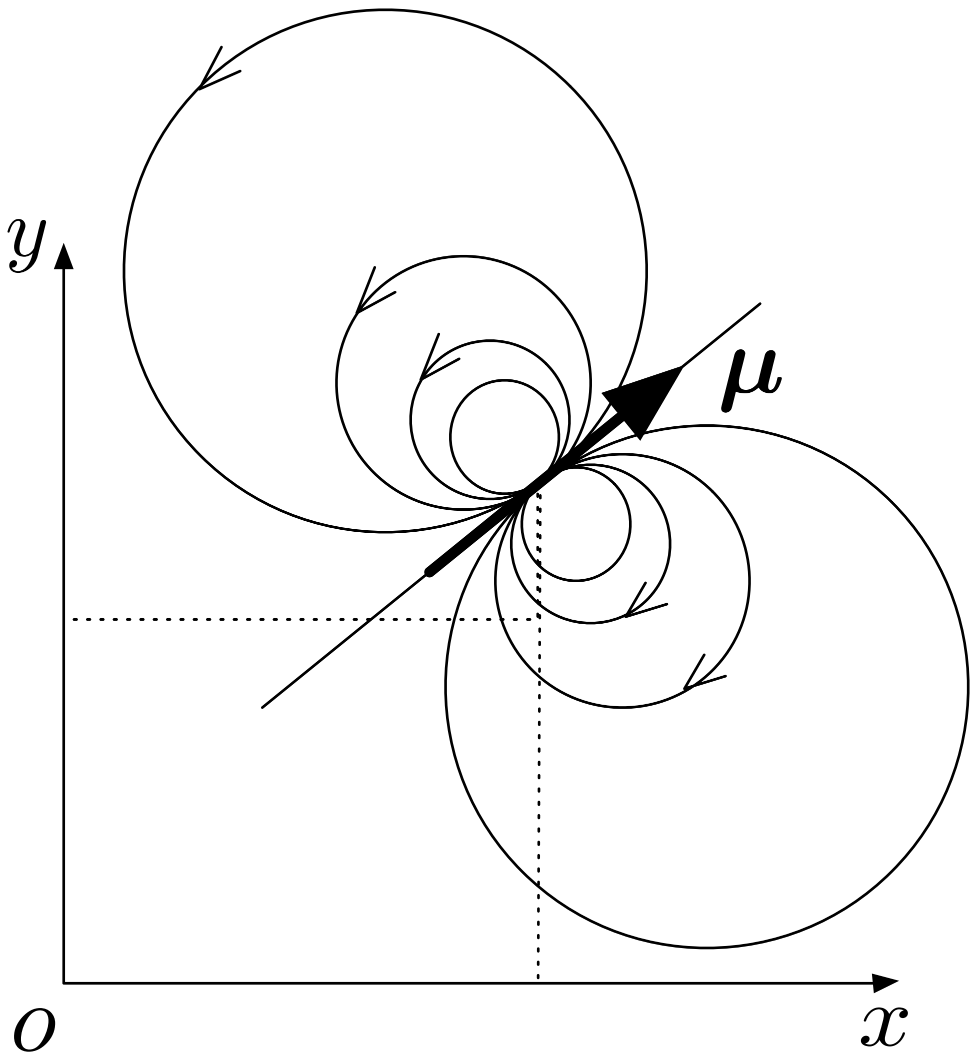
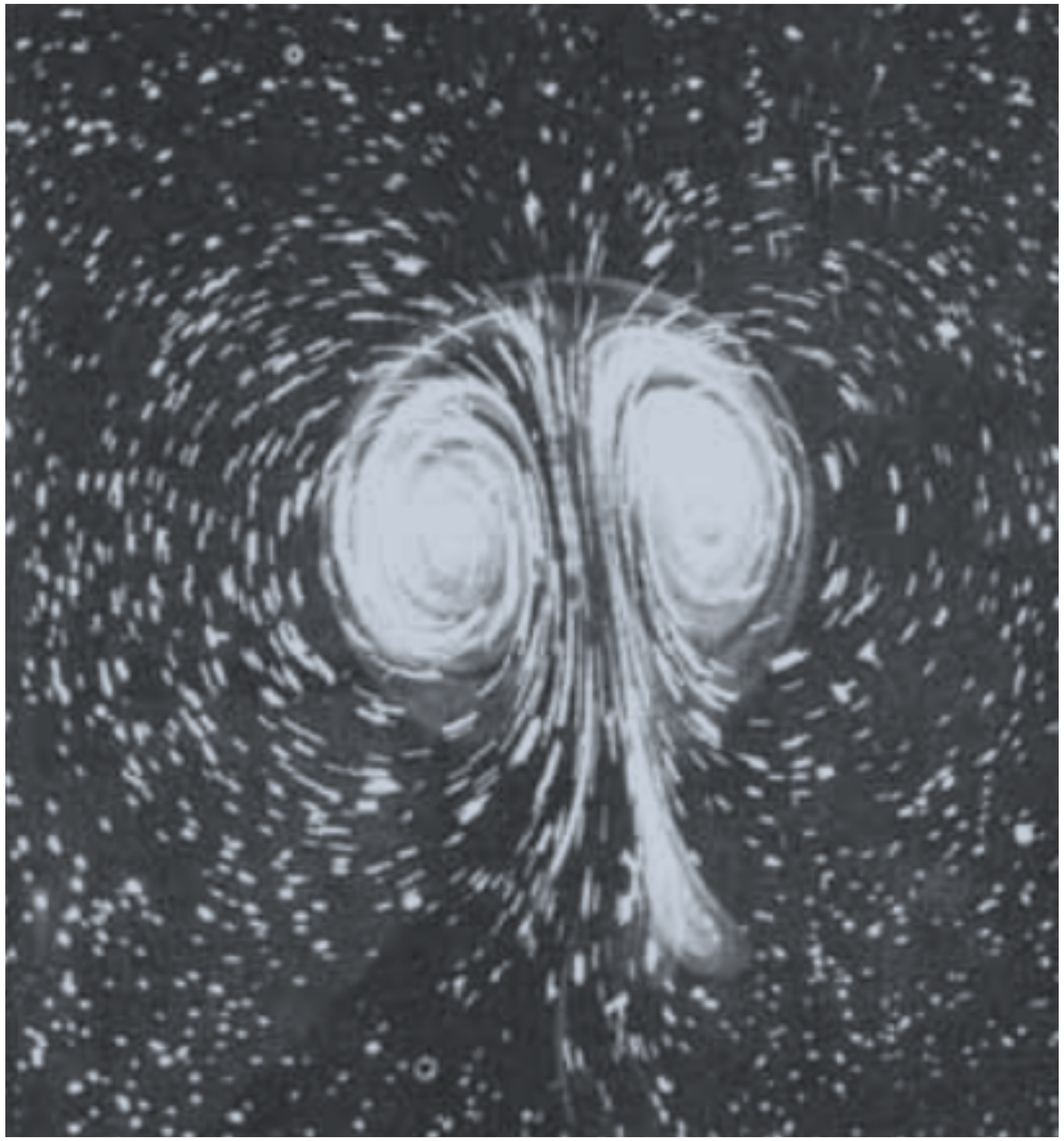
２次元流れ中の
双極子渦運動について

沼津高専　松本祐子





Flór and Heijst, J. Fluid Mech. (1994), 279, 101-133

内容

1. 背景
   - 当初の目的：双極子を使ってラグランジュ的に流れの数値計算をしたい
   - 現状：数値計算法としては未完成（向いていない？）
   - 運動モデルを使った双極子運動の解析
2. 双極子の運動モデル
3. ２次元流れ中の双極子運動（単体）
4. ２次元流れ中の双極子の相互作用
5. まとめ

渦法

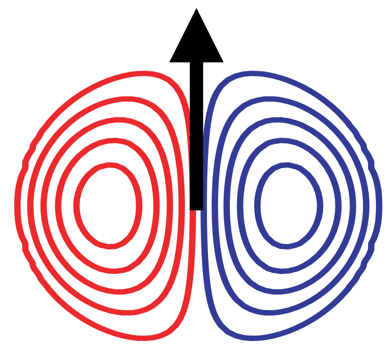
- 渦度方程式のラグランジュ的数値計算法

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$$

速度：$\boldsymbol{u}$
渦度：$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$

- 離散化 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) = \sum \Gamma_i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i)\,, \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) = \sum \Gamma_i f_\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i)$
- 計算格子が不要, 対流項が存在せず数値拡散がない
- ２次元計算
  - 簡単な計算アルゴリズム
  - 計算要素：particle（点）
- ３次元計算
  - 伸縮項の存在のため２次元計算に比べて複雑
  - 計算要素：filament（紐）, blob（球）
  - divergence-freeを満たすための操作が必要

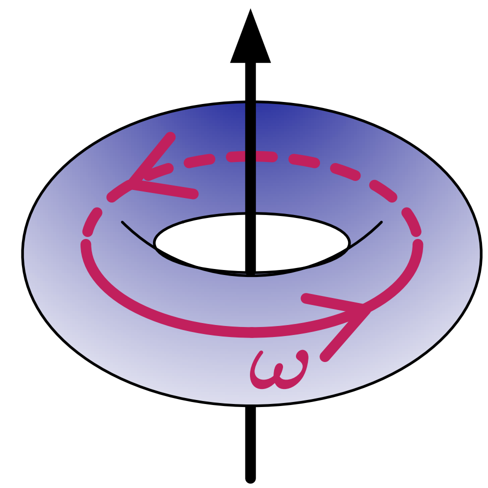
双極子法の提案



２次元（渦対）

赤：反時計回り

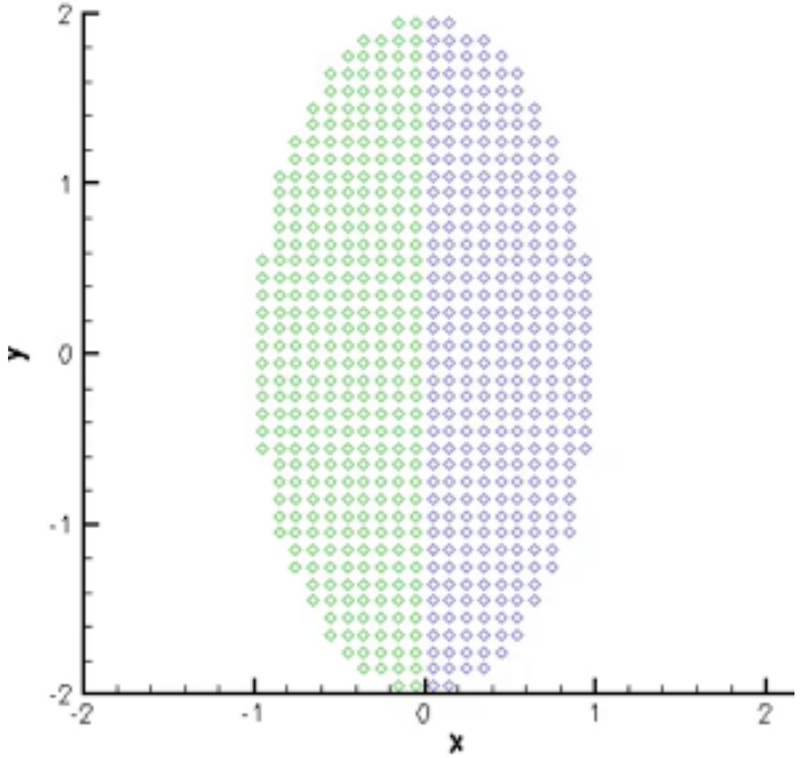
青：時計回り



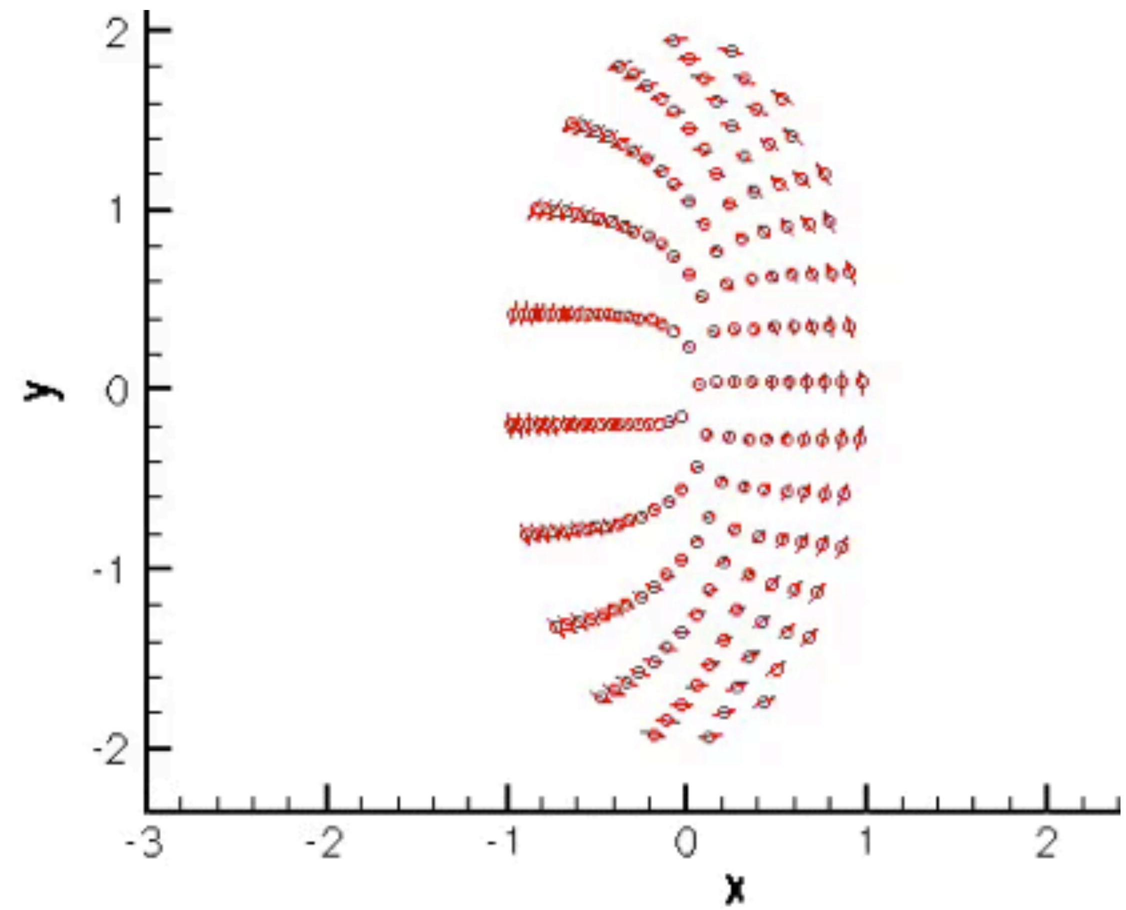
３次元（渦輪）

- 計算要素：双極子
  - ２次元流れ：逆回転する渦対
  - ３次元流れ：円形渦輪
- ２次元，３次元ともに速度と渦度はdivergence free

数値計算結果



楕円渦の回転（渦法による計算）
点：渦要素

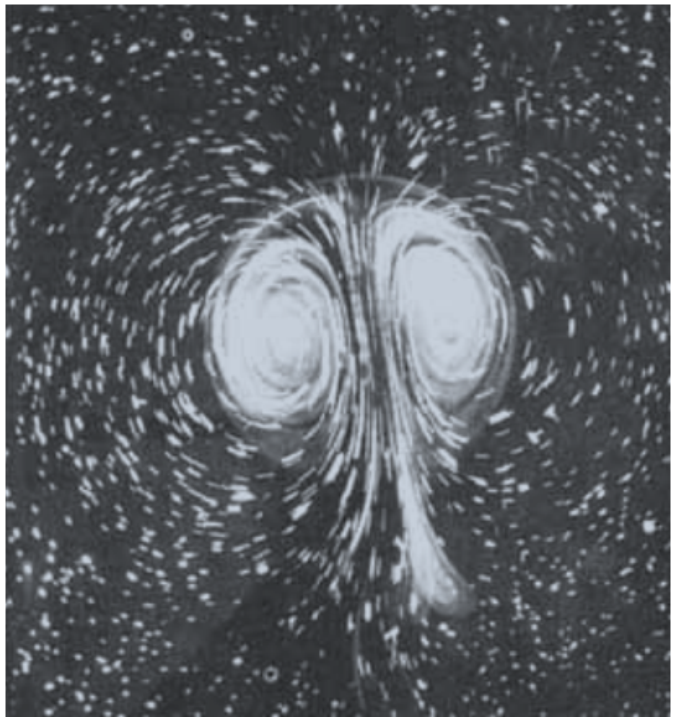


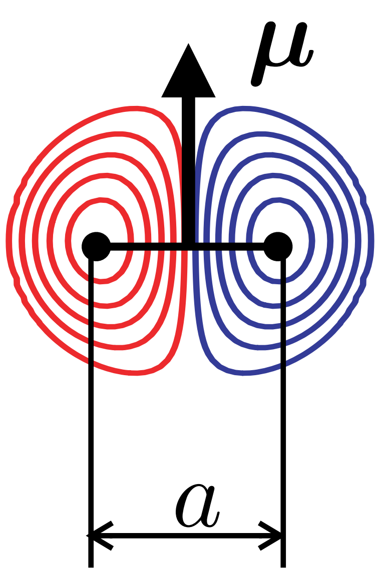
楕円渦の回転（双極子法による計算）
矢印：モーメント（双極子の強さを表すベクトル）

- 問題：モーメントの指数的増大と必要な計算要素の不足
- 解決にはrefresh（人工的な計算操作）が必要
- 数値計算法としてはひとまず棚上げ
- 過程で考えた２次元双極子運動について今日は話す

双極子の運動モデル

2次元双極子の運動モデル





双極子（dipole）

- 逆回転する２つの渦の対
- 渦同士の相互作用による自己推進

運動モデルの研究例（２つの渦の間の距離：a）

- $a \to 0$, 特異点を除去，自己推進は無視
  - Newton(2005), Yanovky et. al.(2009)
- a は有限で流れとともに変化
  - Matsumoto, Saito and Ueno(2009)
  - Llewellyn Smith and Nagem(2011)
- a は有限で固定
  - Tchieu, Kanso and Newton(2012)

Moment model for vortex patches

- Melander et. al., J. Fluid Mech., (1986)
- 渦度一定の渦の運動を重心 $\boldsymbol{X}$ とモーメント $J^{(m,n)}$ で表現

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{\Gamma}\int_\Omega \boldsymbol{x}\omega(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,, \quad \Gamma = \int_\Omega \omega(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$J^{(m,n)} = \int_\Omega x^m y^n \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Ω:渦領域

- 流れ関数

$$\psi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Omega \omega(\boldsymbol{x}')\,\log|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$$

- $\log|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$を渦重心周りで展開し，流れ関数をEuler方程式に代入すると，モーメント$J^{(m,n)}$の方程式が決定

Moment model for a dipole

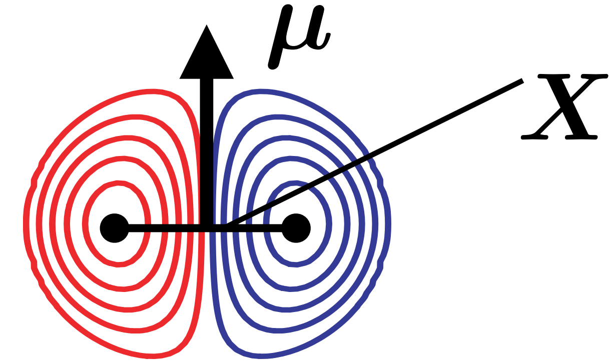
- Matsumoto et. al., Phys. Fluids, (2009) 21, 047103
- 双極子渦の運動を双極子重心 $\boldsymbol{X}$ と双極子モーメント $\boldsymbol{\mu}$ で表現

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{x}^{(+)} + \boldsymbol{x}^{(-)}}{2} \qquad \boldsymbol{\mu} = \int \boldsymbol{x} \times \omega(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

- 二つの渦の強さは等しく，逆符号と仮定
- 渦度は一定ではなく，分布$\omega(\boldsymbol{x})$を持つ
- 流れ場は双極子の誘起速度とbackground flowの重ね合わせ
- 流れ関数を双極子重心周りで展開し，Euler方程式に代入すると，双極子モーメント $\boldsymbol{\mu}$ の方程式が決定

$$\frac{\mathrm{d}\mu_i}{\mathrm{d}t} = -\mu_j \left.\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}}$$

$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$: background flow

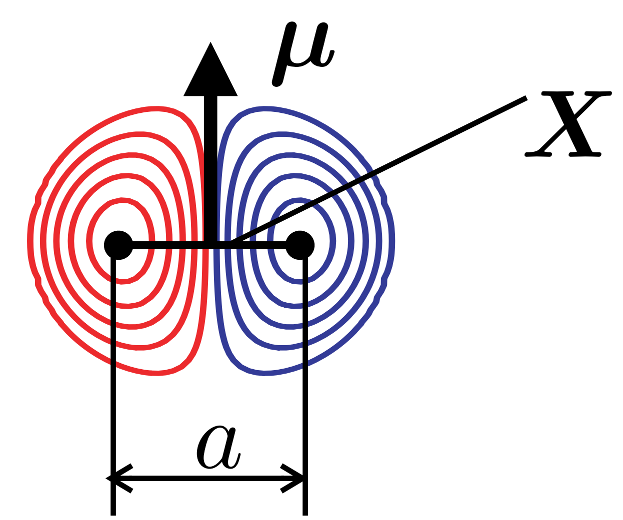


運動方程式

background flow $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ 中の単独双極子の運動を考える

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X})$$

$$\frac{\mathrm{d}\mu_i}{\mathrm{d}t} = -\mu_j \left.\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}}$$



$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$: background flow

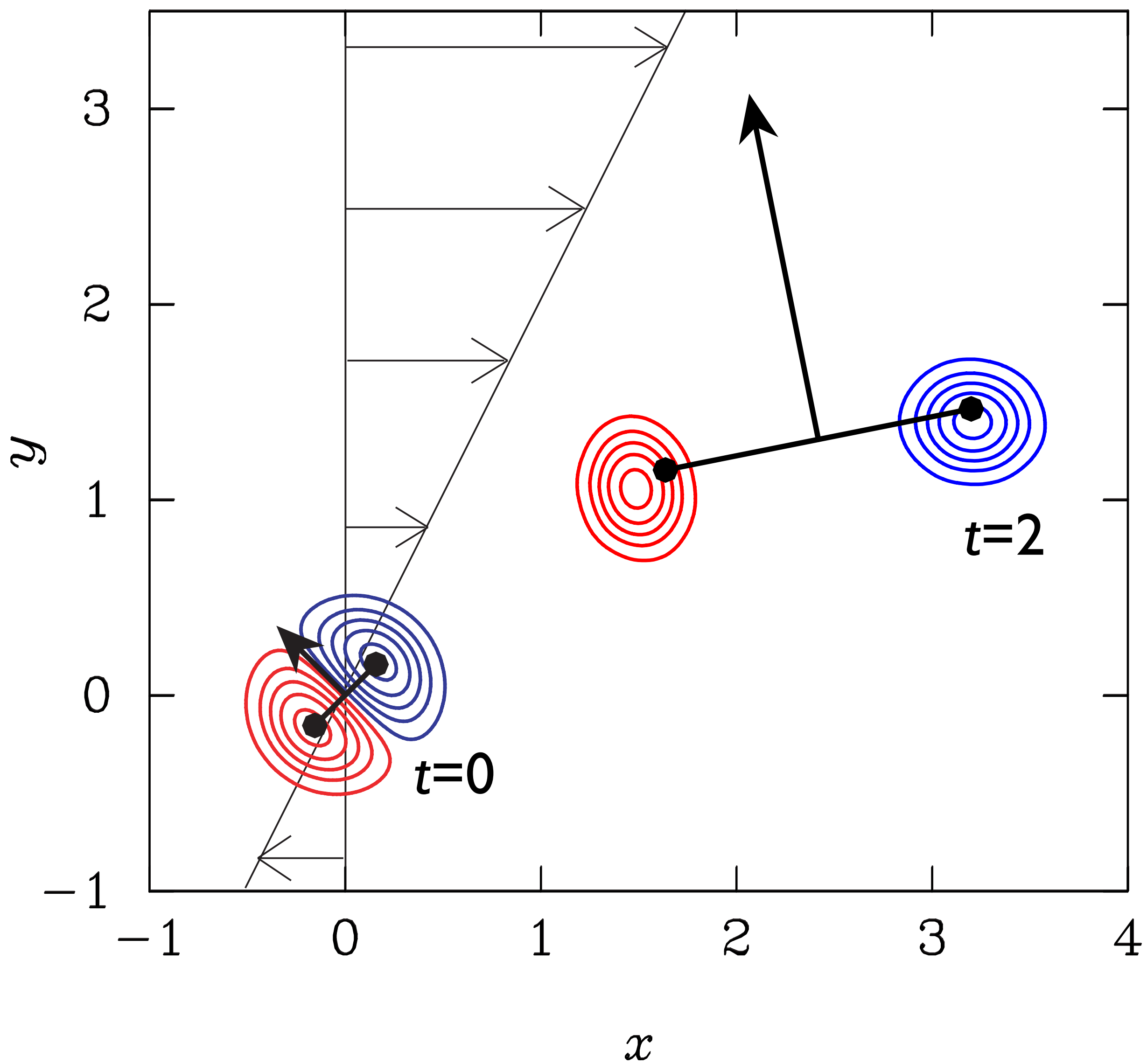
$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{\mu}}{2\pi a^2}$$: 自己推進速度

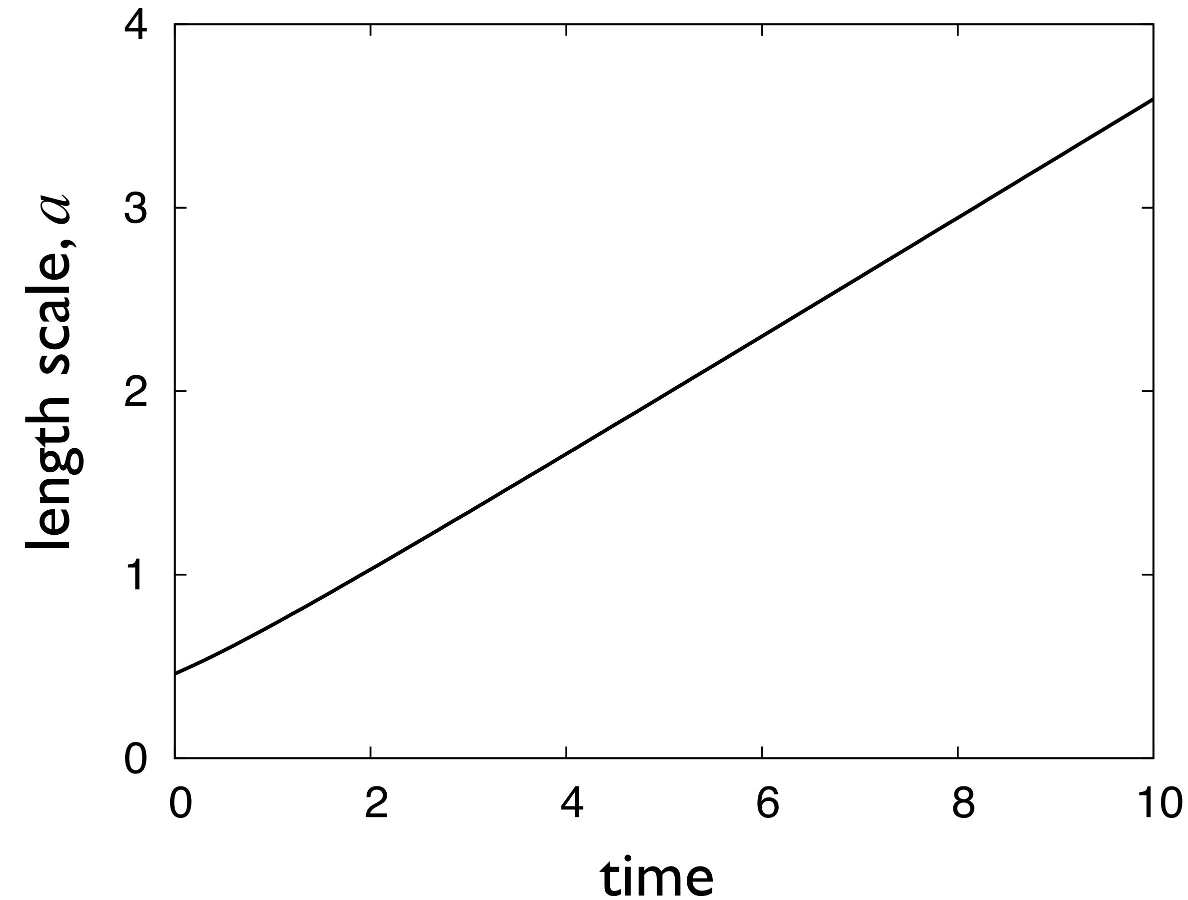
$$a = |\boldsymbol{x}^{(+)} - \boldsymbol{x}^{(-)}| = \frac{|\boldsymbol{\mu}|}{\Gamma}$$:渦間距離

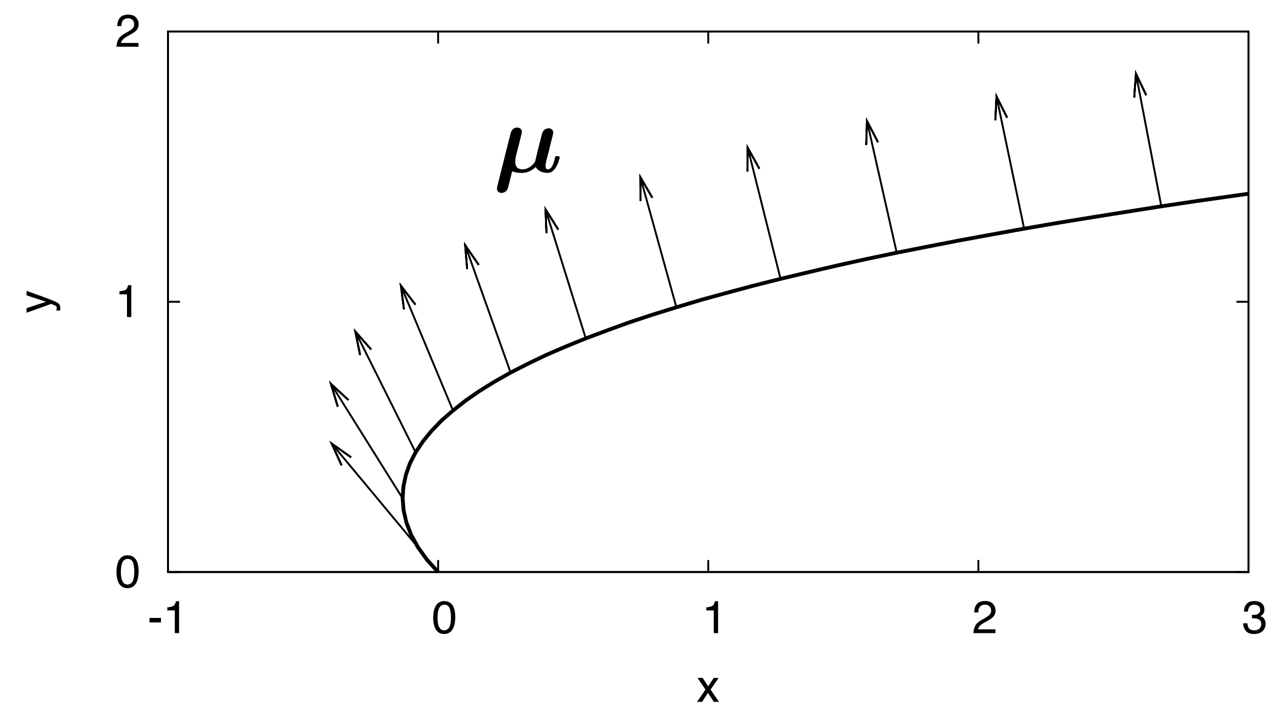
$\boldsymbol{x}^{(+)}, \boldsymbol{x}^{(-)}$:各渦の重心

せん断流れ中の
双極子運動

shear flow, $v(x) = (y, 0)$

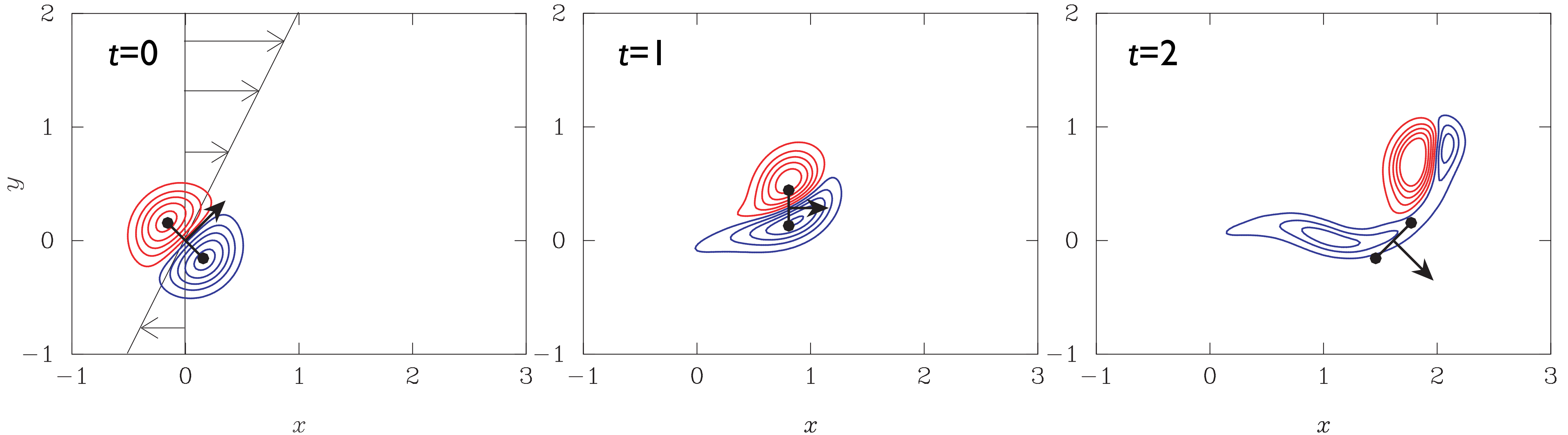


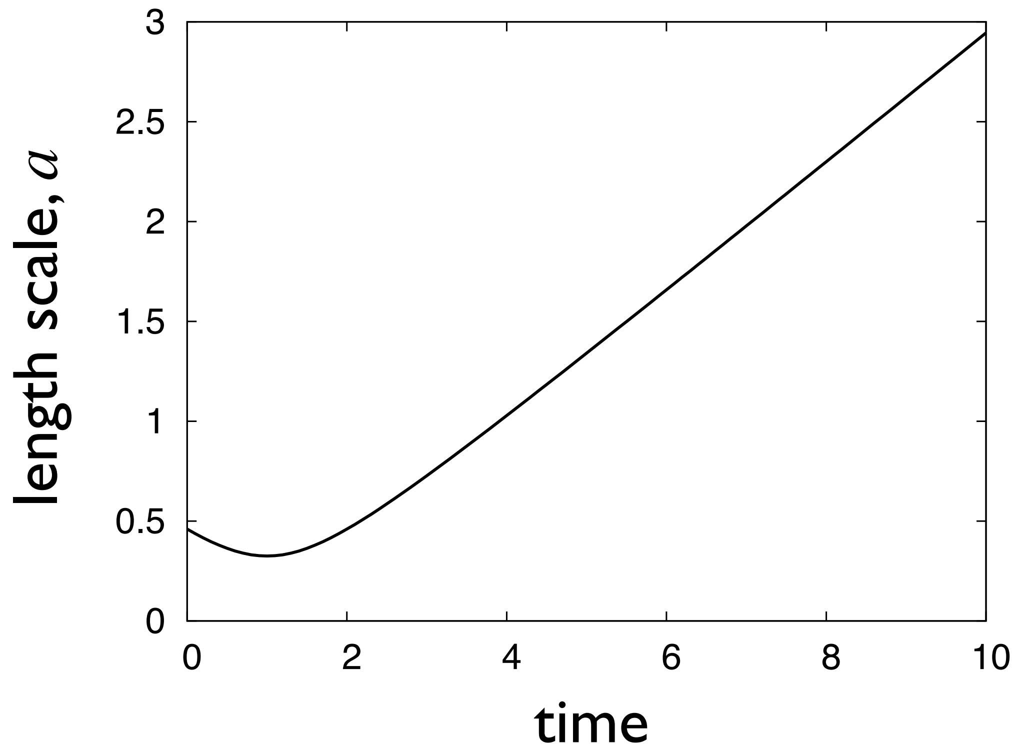


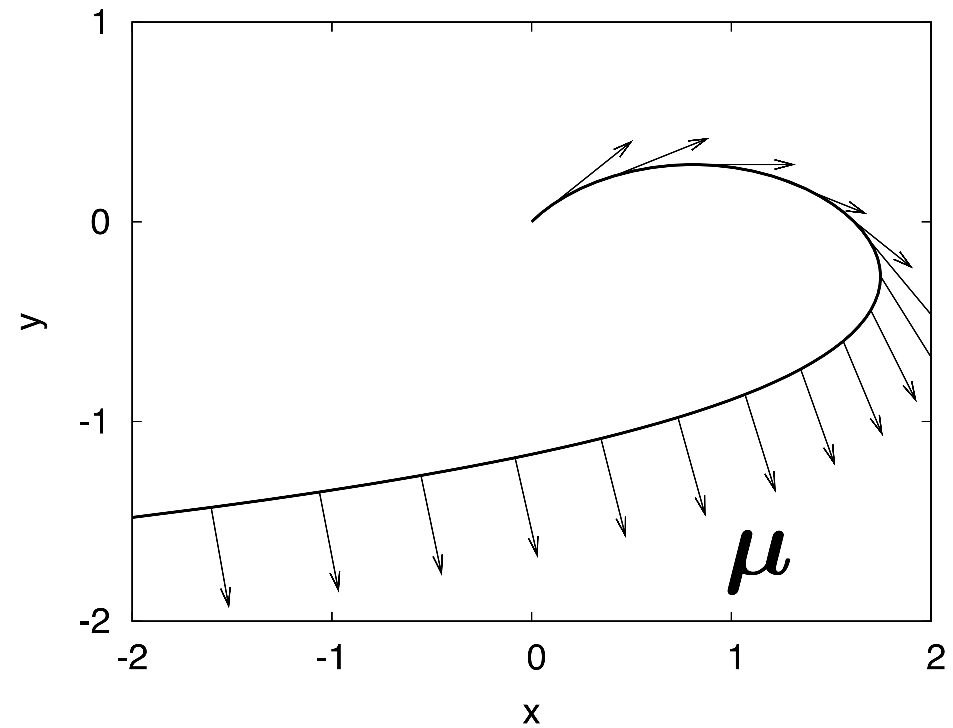


等高線：初期渦度分布をLamb dipoleで与えた場合の渦度数値計算結果

shear flow, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = (y, 0)$







双極子の相互作用

運動方程式（相互作用）

Matsumoto and Ueno, Fluid Dyn. Res. (2014), 46, 031413

N個の双極子の相互作用を考える

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{(m)}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u}^{(m)} + \sum_{n \neq m}^{N} \boldsymbol{v}^{(n)}(\boldsymbol{X}^{(m)})$$

$$\frac{\mathrm{d}\mu_i^{(m)}}{\mathrm{d}t} = -\sum_{n \neq m}^{N} \mu_j^{(m)} \left. \frac{\partial v_j^{(n)}}{\partial x_i} \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}^{(m)}}$$

$$(m = 1, \cdots, N)$$

$\boldsymbol{u}^{(m)}$: m番目の双極子の自己推進速度

$\boldsymbol{v}^{(n)}(\boldsymbol{X}^{(m)})$: n番目の双極子がm番目の双極子重心に誘起する速度

誘起速度

$$\boldsymbol{v}^{(m)}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi^{(m)}(\boldsymbol{x})$$

$$\psi^{(m)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{\mu}^{(m)} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}^{(m)}) \cdot \boldsymbol{e}_z}{2\pi|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}^{(m)}|^2} + O\left[\frac{(a^{(m)})^2}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}^{(m)}|^2}\right]$$

双極子同士の距離はそれぞれの長さスケールに比べて
大きいと仮定する

不変量

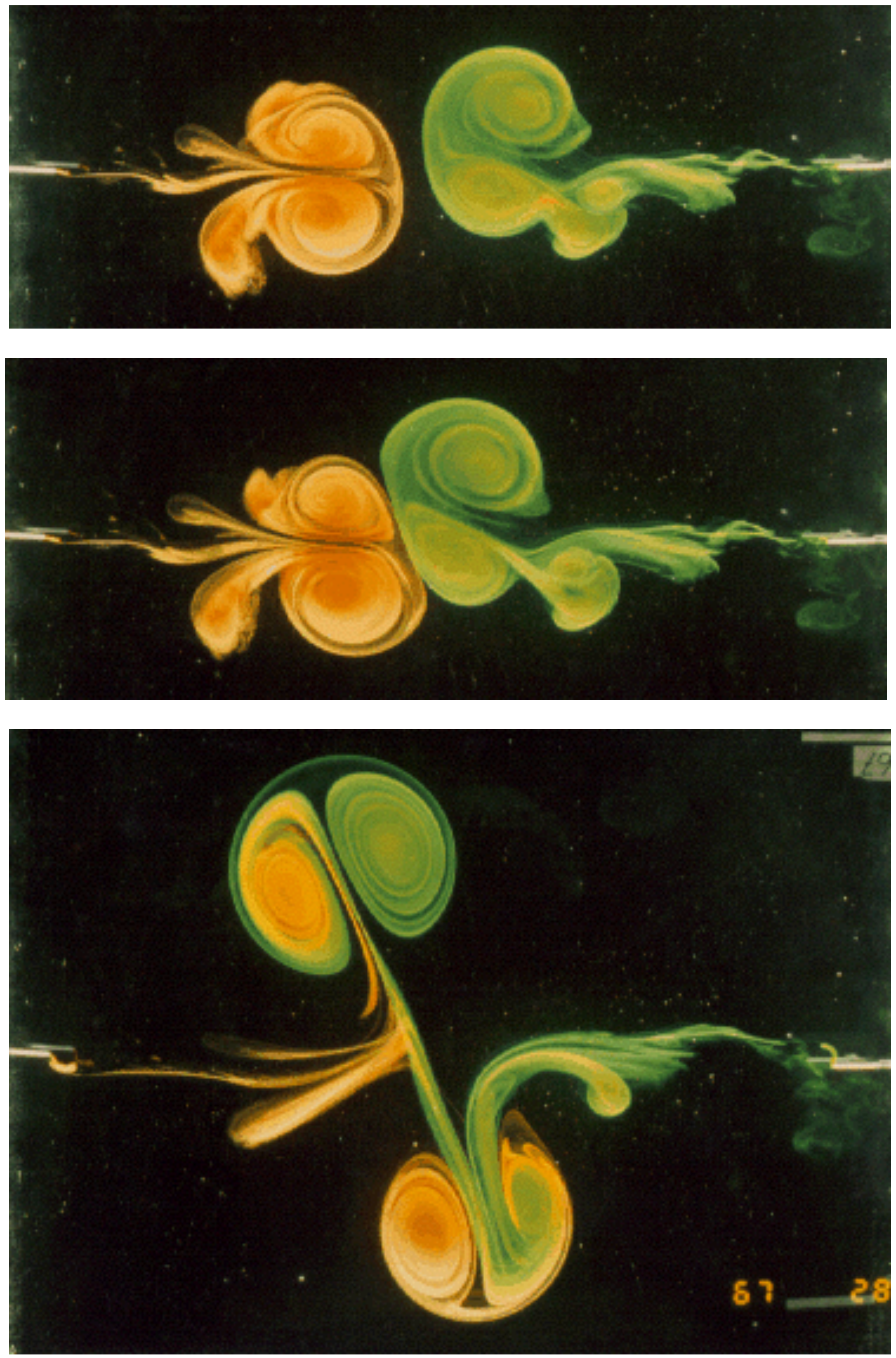
Total impulse

$$\boldsymbol{I} = \int \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\omega} \, \mathrm{d}S = \sum_{n}^{N} \boldsymbol{\mu}^{(n)} = \mathrm{const}$$

Angular impulse

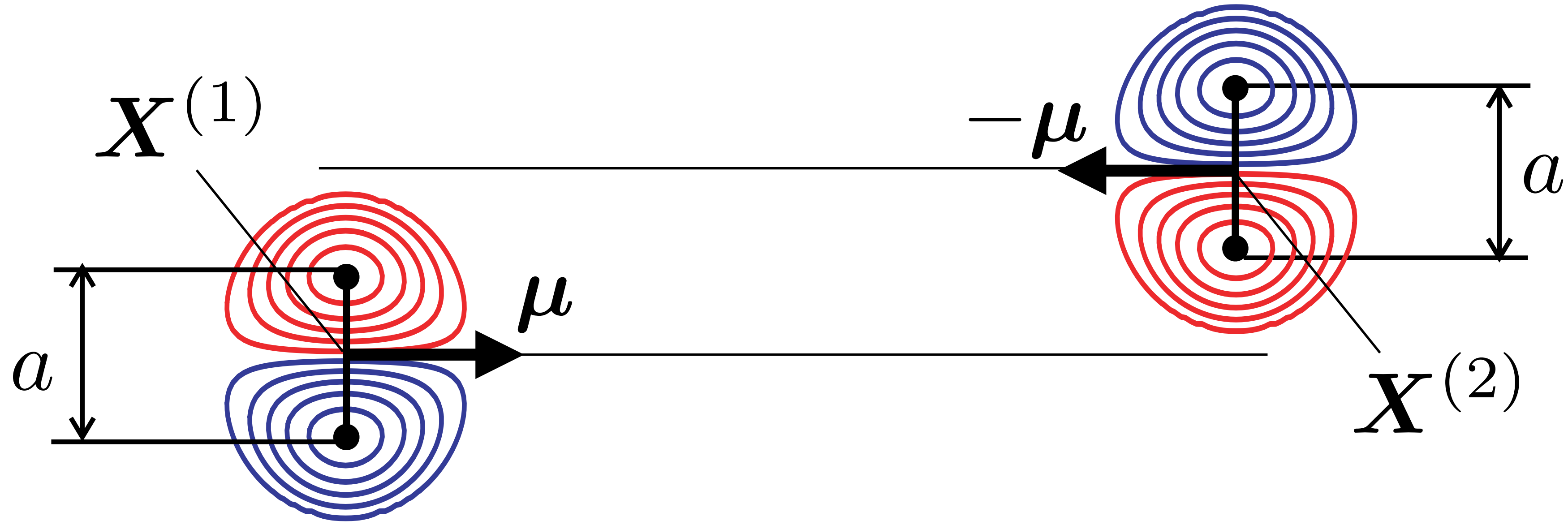
$$A = \int |\boldsymbol{x}|^2 \omega(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}S = \sum_{n}^{N} (\boldsymbol{X}^{(n)} \times \boldsymbol{\mu}^{(n)}) \cdot \boldsymbol{e}_z = \mathrm{const}$$

Colinear dipoles



Heijst and Flór, Nature(1989), 340, 212-215

問題設定

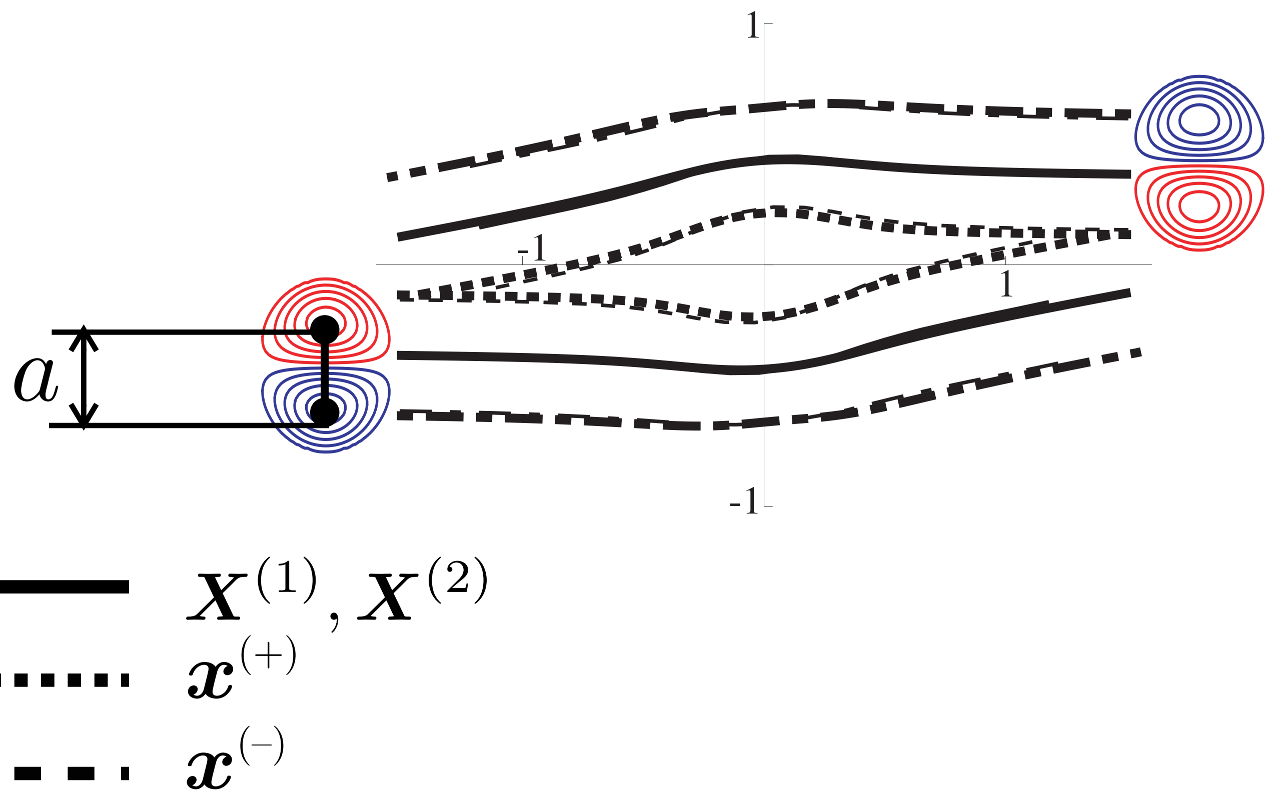


- 平行かつ逆向きに２つの双極子（Lamb dipole）を配置

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^{(1)} = -\boldsymbol{\mu}^{(2)}, \quad \Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$$

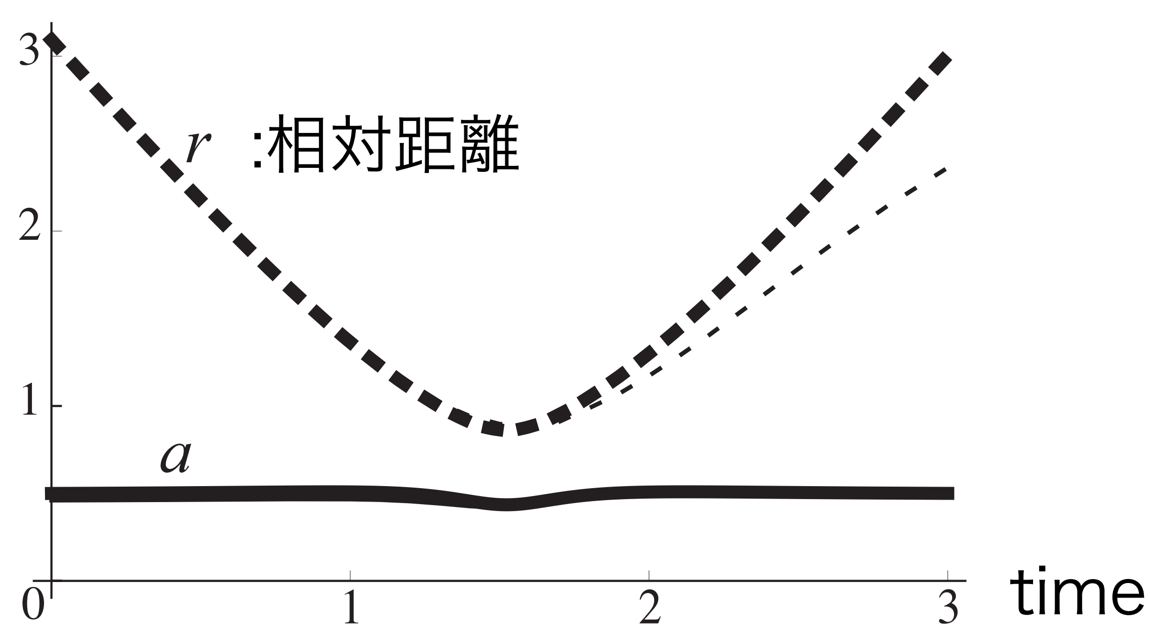
- 対称性より，系の重心は一定
- 相対位置ベクトル $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{X}^{(2)} - \boldsymbol{X}^{(1)}$ を導入

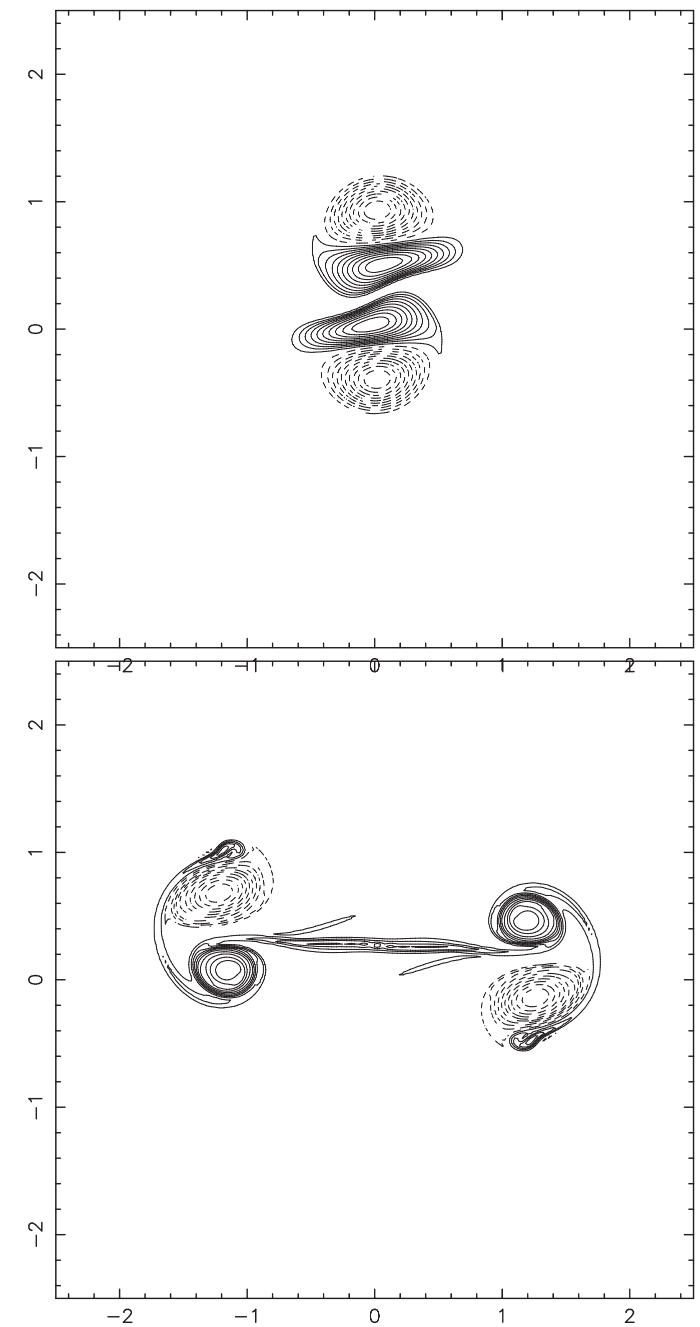
①direct scattering $H > H_c$



細線:数値計算

太線:モデル

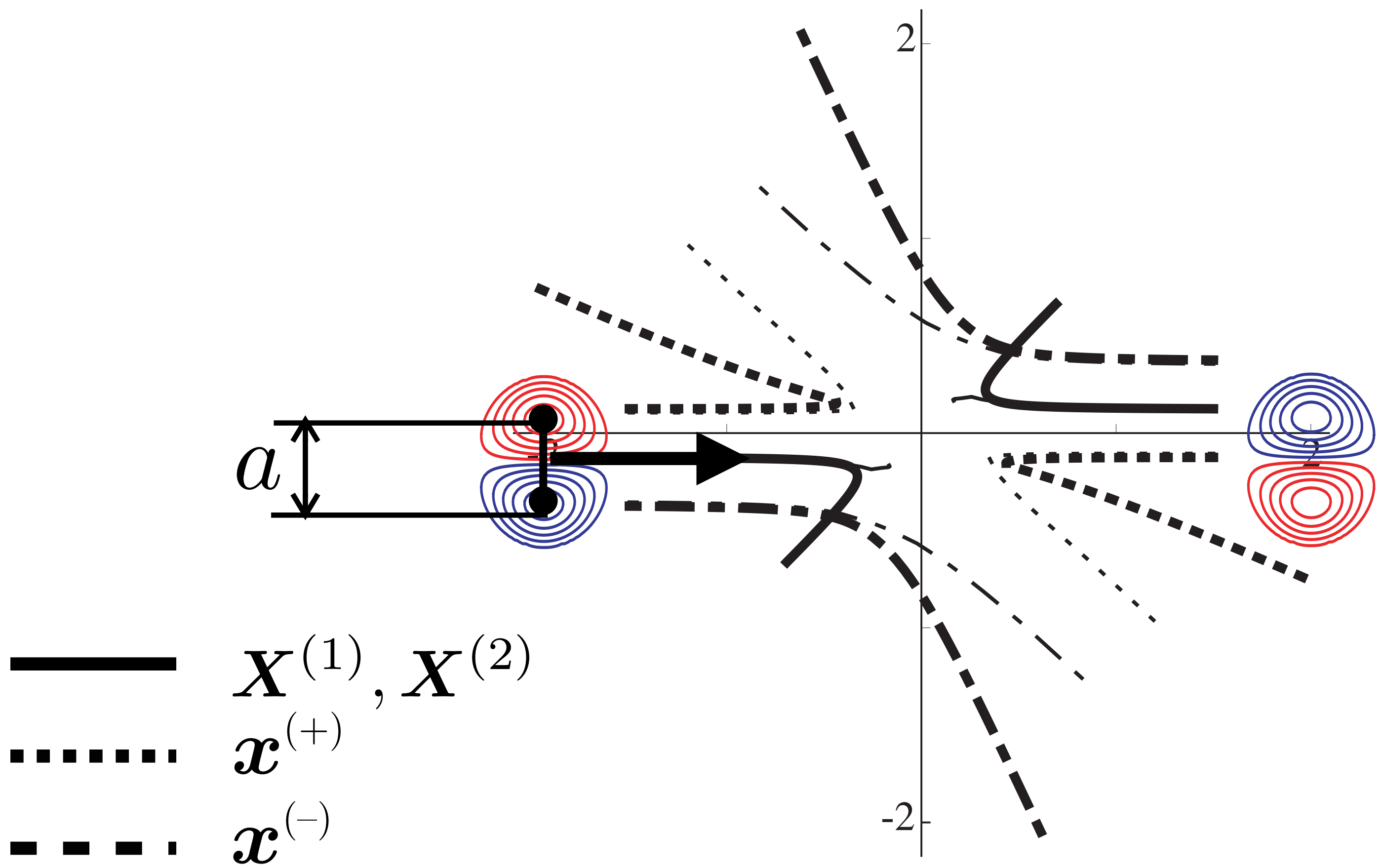




数値計算結果

- direct scattering

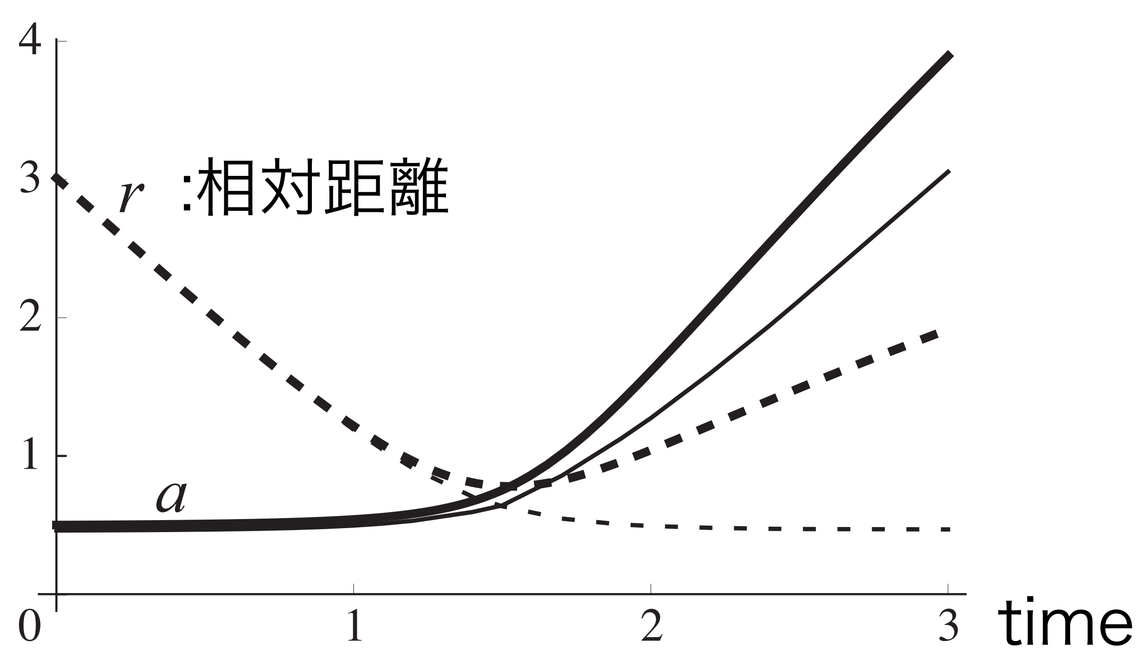
②exchange $H < H_c$

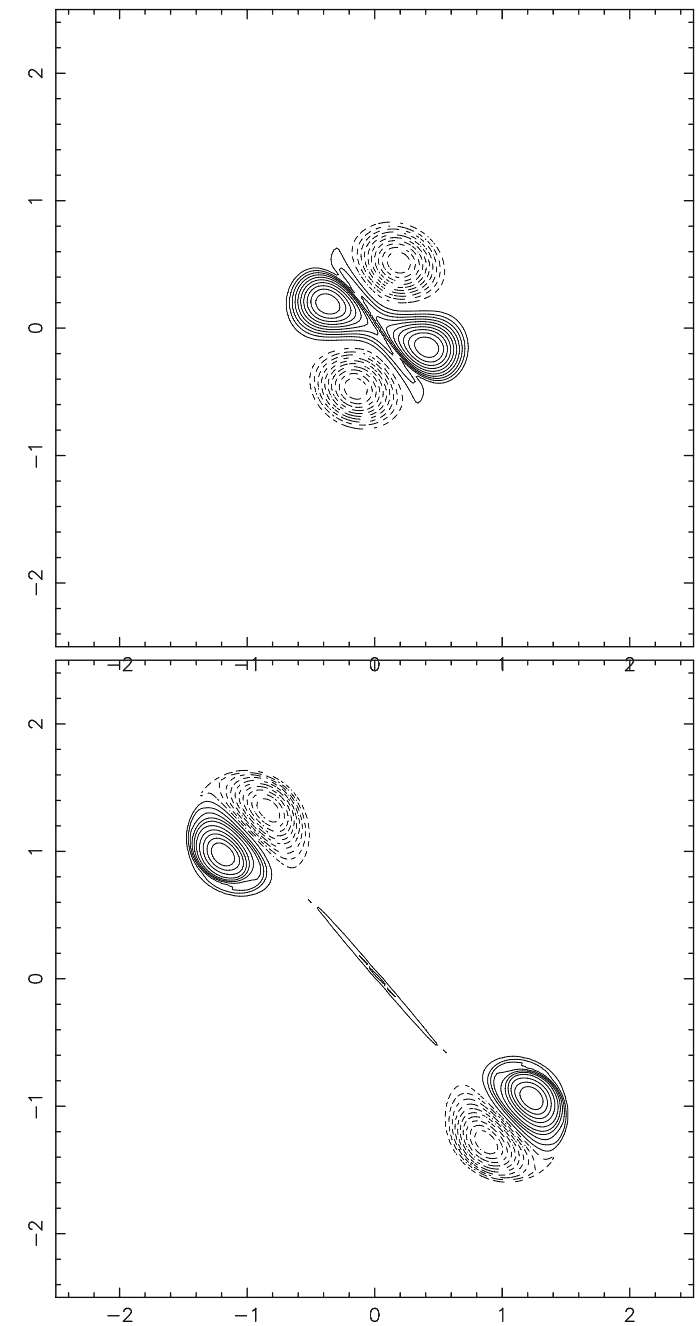


渦重心の軌跡

細線:数値計算

太線:モデル

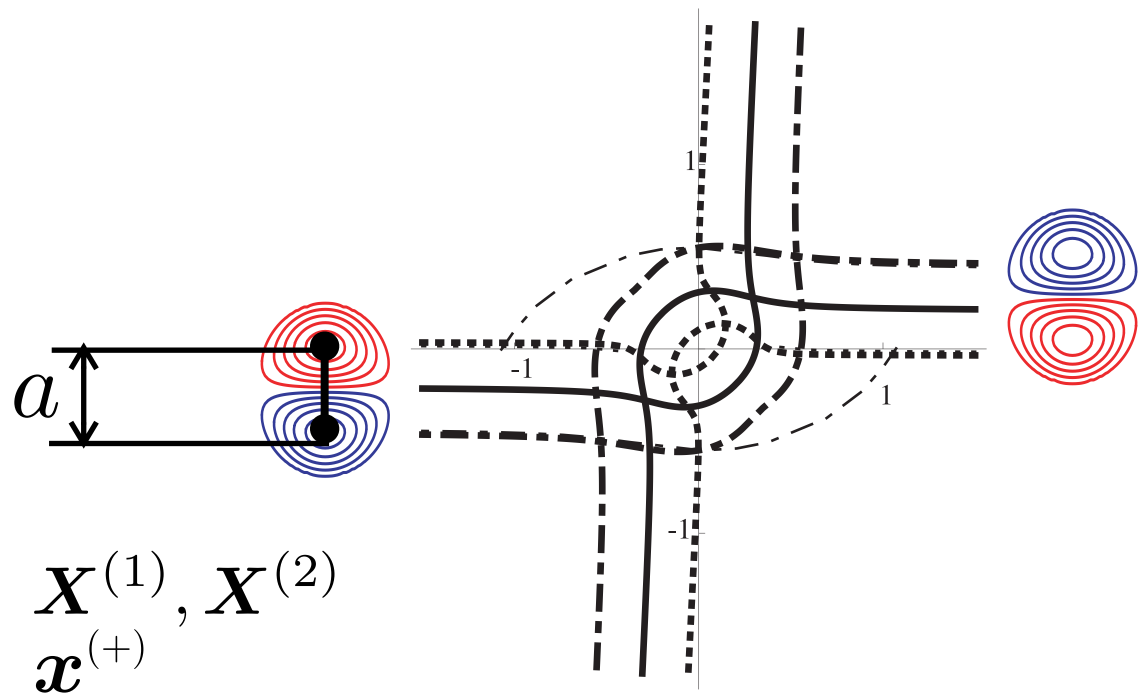




数値計算結果

– exchange

③merge $H \sim H_c$



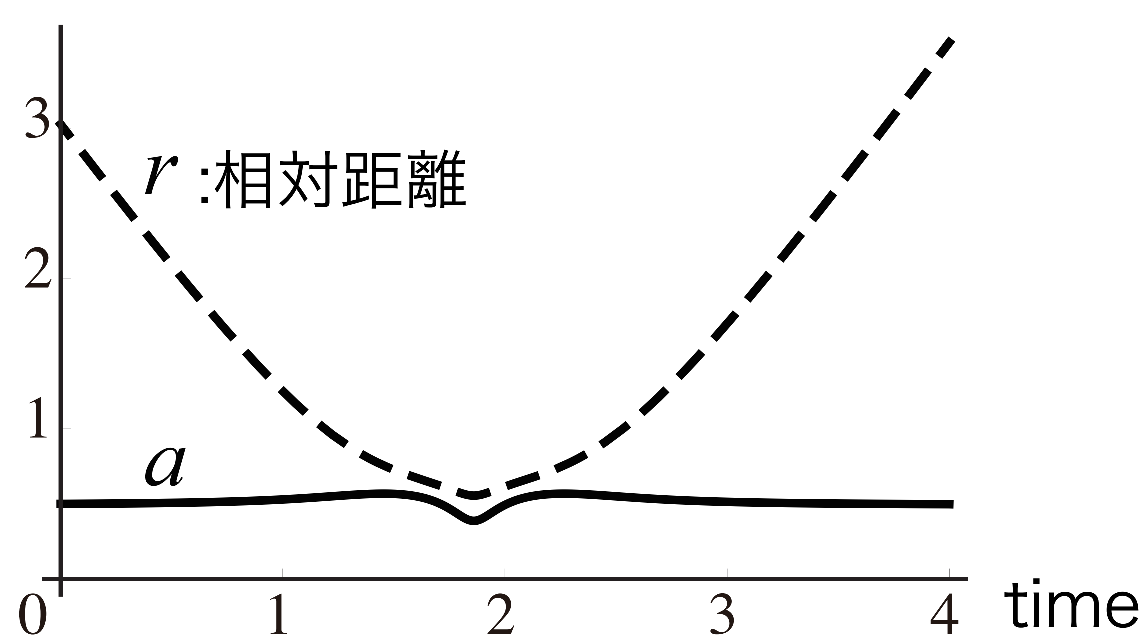
$\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)}$

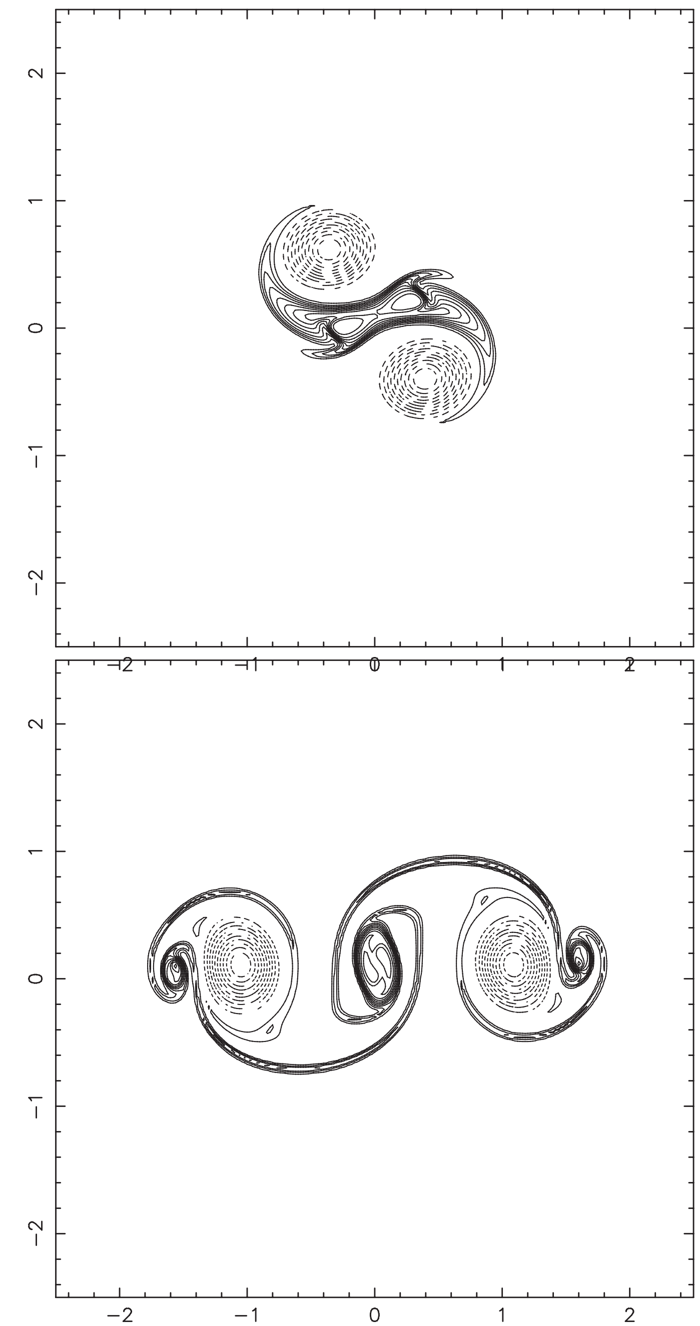
$\boldsymbol{x}^{(+)}$

$\boldsymbol{x}^{(-)}$

細線:数値計算

太線:モデル





数値計算結果

– merge

まとめと今後の展望

- ２次元流れ中の双極子運動の計算モデルを構築
- 数値計算要素としては検討が必要
- background flow中の単体の双極子運動，相互作用の解析
- ほかの問題への応用
- 多重極渦の運動