2017年3月7日(火)第24回沼津研究会

数理物理への量子情報論的アプローチ

松枝宏明(仙台高専)

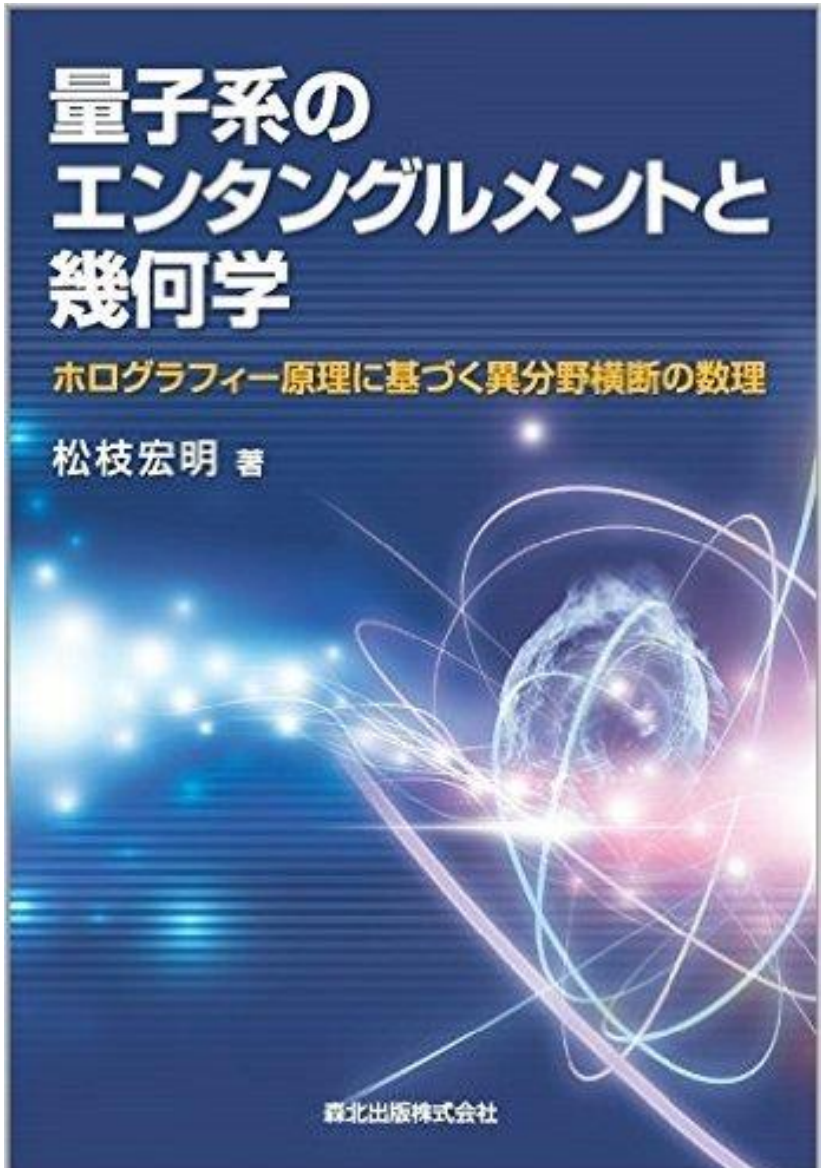
沼津研究会との関わり

第20回沼津研究会(初めての参加，鈴木先生のお供)：
鈴木増雄先生(統計物理，青本和彦先生と同級)
「物理と数学の絡み合いによる発展」

第24回沼津研究会：
待田先生からのメール(抜粋)
「本屋で松枝さんの書かれた『量子系のエンタングルメントと幾何学』を拝見しました．ちょっと値段が高く買えませんでしたけれど，
興味を持ちました．本の内容について分かりやすくお話しをして
もらえればと思います．」

2017年3月3日(金)：
鈴木先生の傘寿のお祝い研究会(東大)

昨年，本を出版しました．



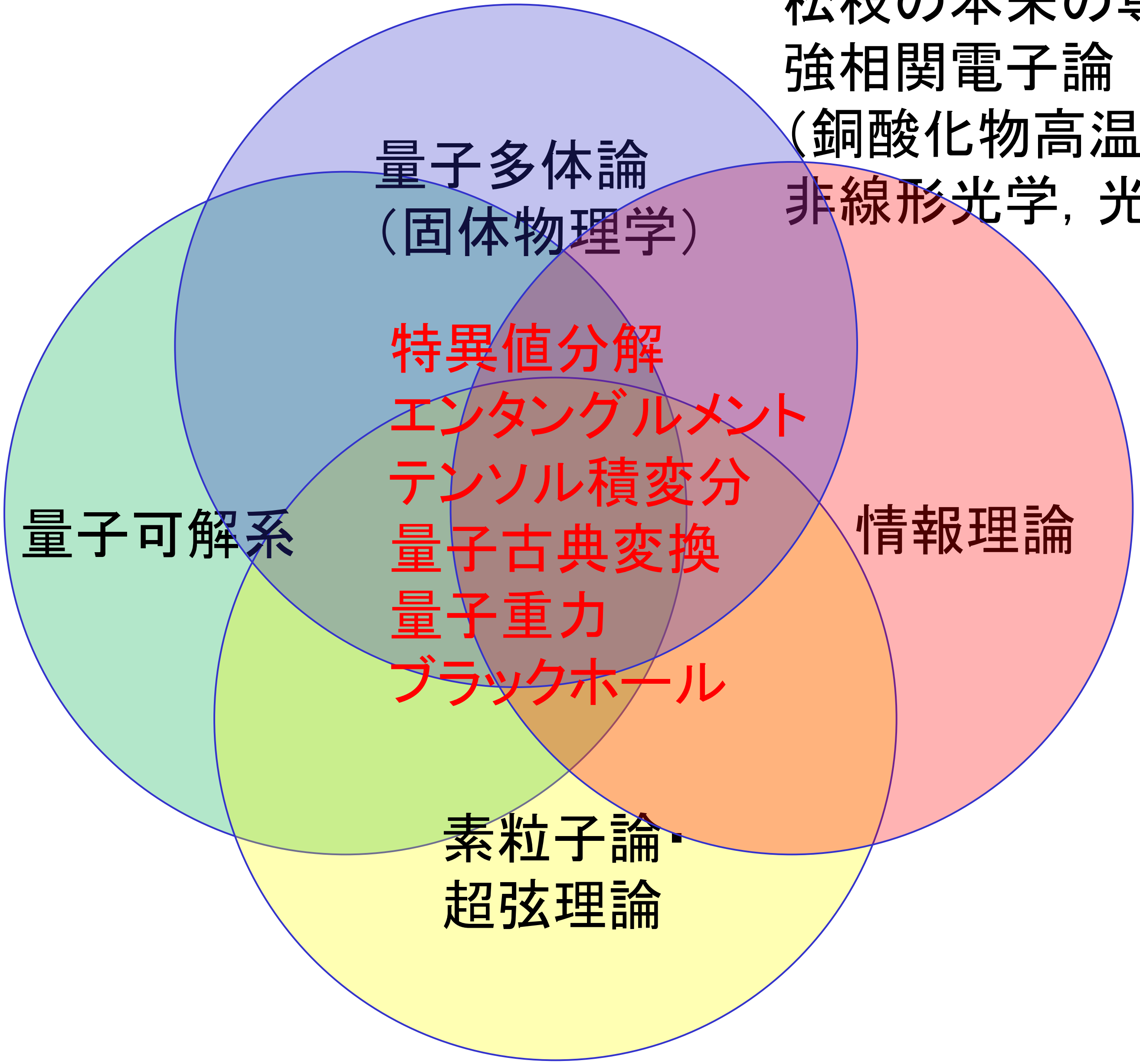
出版元：森北出版
価格：8,000円＋税
（高くなってしまってすみません…）
分量：400ページ

高柳匡教授（京大基研）に書いていただいた帯の作文：
情報理論の考え方を用いることで，物理学のさまざまな分野を融合しようという理論物理学の最先端の話題を丁寧に手際よく解説している．物理学の研究者のみならず，これから理論物理学を志す大学生にもぜひお勧めしたい．

本の目次

近年の異分野融合的研究の展開

松枝の本来の専門:
強相関電子論
(銅酸化物高温超伝導,
非線形光学, 光誘起相転移)



研究の動機と目的

複雑なデータを高次元空間のより簡単なデータ集合で表現して見通し良く解析する情報論的手法が，物理学の様々な分野で自然に現れてきている．とりわけ，次世代の理論物理学を構築するための指導原理としての認識が高まっている．
それらの発展を念頭に置いて，異分野に共通する数理構造の抽出と物理学としての意義づけを行うことを目的とする．

【松枝の具体的な研究課題例】
（１）量子くりこみ群の構築
（２）量子多体系に対するテンソル積変分法の開発・応用
（３）テンソル積変分法の時空物理・ブラックホールへの応用
（４）情報幾何的手法によるゲージ重力対応の解析
（５）量子可積分系とウェーブレットの関わり
（６）画像処理的手法による統計物理モデルの臨界的性質の抽出
（７）特異値分解のメリン逆変換とくりこみ群の関わり
などなど．

鍵となるコンセプト・量子情報理論の有用性

「エンタングルメント(量子もつれ)」と「ホログラフィー原理」

エンタングルメント・エントロピー

～相関関数の対数

～スケーリング公式，共形場理論による精密化

テンソル積状態(テンソル・ネットワーク)

～エンタングルメント・エントロピーのスケール性を備えた
　量子多体系の変分波動関数

～量子可解模型からの数理的基礎づけ　　　K, post−K

ホログラフィー原理(バルク・境界対応)

～d次元量子系と(d＋1)次元の一般相対論をつなぐ概念

～量子データの古典表現・古典的メモリとしての見方

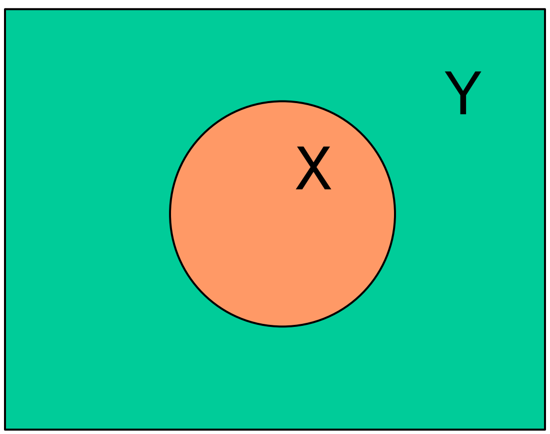
～量子情報幾何からの基礎づけ

情報理論による統計力学・場の理論の再構築

エンタングルメント・エントロピー

全系= X+Y: “Superblock”, “Universe”

$$|\psi\rangle = \sum_{x,y} \psi(x,y) |x\rangle \otimes |y\rangle \qquad \begin{array}{l} x \in X \\ y \in Y \end{array}$$



部分系X, Yに対する縮約密度行列

$$\rho_X = \mathrm{Tr}_Y |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$\rho_Y = \mathrm{Tr}_X |\psi\rangle\langle\psi|$$

エンタングルメント・エントロピー

$$S_X = -\mathrm{Tr}_X \left(\rho_X \log \rho_X\right)$$

$$S_Y = -\mathrm{Tr}_Y \left(\rho_Y \log \rho_Y\right)$$

エンタングルメント＝X, Y境界での情報の流れに関係する量

特異値分解(Singular Value Decomposition, SVD)

行列Ψの特異値分解

$$\psi(x,y)=\sum_l U_l(x)\sqrt{\Lambda_l}\,V_l(y)$$

Λ_l ：特異値(非負の量)

$U_l(x), V_l(y)$ ：ユニタリー行列

$$\rho_X(x,x')=\sum_y \psi(x,y)\psi^*(x',y)=\sum_l U_l(x)\Lambda_l U_l^*(x')$$

$$\rho_Y(y,y')=\sum_x \psi(x,y)\psi^*(x,y')=\sum_l V_l(y)\Lambda_l V_l^*(y')$$

部分系のフォン・ノイマン・エントロピー＝エンタングルメント
→「面積則」(Area-law scaling)

$$S_X=-\sum_l \lambda_l \log\lambda_l = S_Y \qquad \lambda_l=\Lambda_l \Big/ \sum_l \Lambda_l$$

エンタングルメント・エントロピーのスケーリング公式

励起ギャップのある系⇒面積則

$$S = \alpha L^{d-1} + \cdots$$

量子臨界系⇒面積則の対数的破れ

$$S = \frac{1}{3} C L^{d-1} \log L + \cdots$$

C: 有効的な励起モードの数(1Dでは共形場理論の中心電荷)

Topological Entanglement Entropy (d=2)

$$S = \alpha L - \gamma$$

有限エンタングルメント・スケーリング

$$S_{MPS} = \frac{1}{\sqrt{12/c} + 1} \log \chi$$

エンタングルメントと波動関数の因子化

S=1/2 Heisenberg 反強磁性体(2サイト)

$$H=\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2=\frac{1}{2}\left(S_1^+S_2^-+S_1^-S_2^+\right)+S_1^zS_2^z$$

基底表現: $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$

$$H=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$E_0=-\frac{3}{4}$$

一般的な変分関数:

Nサイトの場合⇒変分パラメータは2^N個

～数値計算には不向き

$$E=\langle\psi|H|\psi\rangle/\langle\psi|\psi\rangle$$

⇒最小化

$$|\psi\rangle=A|\uparrow\uparrow\rangle+B|\uparrow\downarrow\rangle+C|\downarrow\uparrow\rangle+D|\downarrow\downarrow\rangle$$

局所近似ではシングレットを表現できない.

$$|\psi\rangle = \sum_{s_1=\uparrow,\downarrow} a^{s_1}|s_1\rangle \otimes \sum_{s_2=\uparrow,\downarrow} c^{s_2}|s_2\rangle$$

$$= a^{\uparrow}c^{\uparrow}|\uparrow\uparrow\rangle + a^{\uparrow}c^{\downarrow}|\uparrow\downarrow\rangle + a^{\downarrow}c^{\uparrow}|\downarrow\uparrow\rangle + a^{\downarrow}c^{\downarrow}|\downarrow\downarrow\rangle$$

$$a^{\uparrow}c^{\uparrow} = 0$$

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) \qquad a^{\downarrow}c^{\downarrow} = 0$$

解がない！

$$a^{\uparrow}c^{\downarrow} = 1/\sqrt{2}$$

$$a^{\downarrow}c^{\uparrow} = -1/\sqrt{2}$$

$|\psi\rangle = |1\rangle \otimes |2\rangle$ 直積状態

$$\rho_1 = Tr_2|\psi\rangle\langle\psi| = |1\rangle\langle 1| \qquad S_1 = -Tr_1\rho_1 \log\rho_1 = 0$$

直積状態のエンタングルメントはゼロ

しかし，系統的数値計算のためには局所表現は捨てがたい.

ベクトル積状態

$$|\psi\rangle = \sum_{s_1, s_2} a^{s_1} c^{s_2} |s_1 s_2\rangle \Rightarrow \sum_{s_1, s_2} A^{s_1} C^{s_2} |s_1 s_2\rangle$$

$$A^{s_1} = \left(a_1^{s_1}, a_2^{s_1}\right)$$

$$C^{s_2} = \begin{pmatrix} c_1^{s_2} \\ c_1^{s_2} \end{pmatrix}$$

見かけは局所分解だが厳密解が作れる
⇒エンタングルメントを表現する内部自由度を導入

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha=1}^{\chi=2} \left\{ \sum_{s_1=\uparrow,\downarrow} a_\alpha^{s_1} |s_1\rangle \otimes \sum_{s_2=\uparrow,\downarrow} c_\alpha^{s_2} |s_2\rangle \right\}$$

$$= \left(a_1^{\uparrow} c_1^{\uparrow} + a_2^{\uparrow} c_2^{\uparrow}\right)|\uparrow\uparrow\rangle + \left(a_1^{\uparrow} c_1^{\downarrow} + a_2^{\uparrow} c_2^{\downarrow}\right)|\uparrow\downarrow\rangle$$

$$+ \left(a_1^{\downarrow} c_1^{\uparrow} + a_2^{\downarrow} c_2^{\uparrow}\right)|\downarrow\uparrow\rangle + \left(a_1^{\downarrow} c_1^{\downarrow} + a_2^{\downarrow} c_2^{\downarrow}\right)|\downarrow\downarrow\rangle$$

$$a_1^{\uparrow} = c_2^{\uparrow} = a_2^{\downarrow} = c_1^{\downarrow} = 0$$

$$a_2^{\uparrow} c_2^{\downarrow} = 1/\sqrt{2}$$

$$a_1^{\downarrow} c_1^{\uparrow} = -1/\sqrt{2}$$

$$|\psi\rangle = |0\rangle$$

χ =2 ととれば厳密

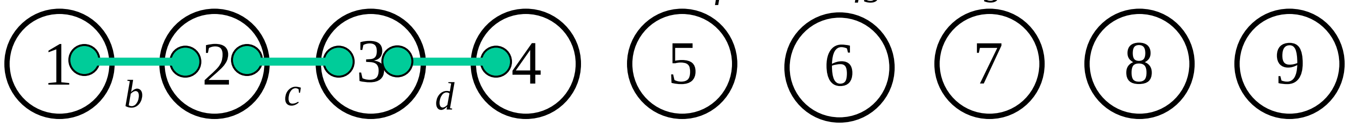
$$A^{\uparrow} = (x, y), A^{\downarrow} = (z, w), C^{\uparrow} = \begin{pmatrix} \frac{y}{xw - yz} \\ \frac{x}{yz - xw} \end{pmatrix}, C^{\downarrow} = \begin{pmatrix} \frac{w}{xw - yz} \\ \frac{z}{yz - xw} \end{pmatrix}$$

行列積状態(Matrix Product State, MPS)

開放端条件でのMPS(端がベクトルで閉じる)

$$|\psi\rangle = \sum_{\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}} \langle s_1 | A_2^{s_2} A_3^{s_3} \cdots A_{n-1}^{s_{n-1}} | s_n \rangle | s_1 s_2 \cdots s_n \rangle$$

$$\langle s_1| = A_b^{s_1} \quad A_{bc}^{s_2} \quad A_{cd}^{s_3} \quad A_{de}^{s_4} \quad A_{ef}^{s_5} \quad A_{fg}^{s_6} \quad A_{gh}^{s_7} \quad A_{hi}^{s_8} \quad |s_9\rangle = A_i^{s_9}$$



$A_j^{s_j}$ $\chi \times \chi$, χ: 非物理的自由度

$s_j = \uparrow, \downarrow$: 物理的自由度

行列＝非物理的自由度の物理的自由度への写像

↓

非物理的自由度とは何か？⇒エンタングルメント

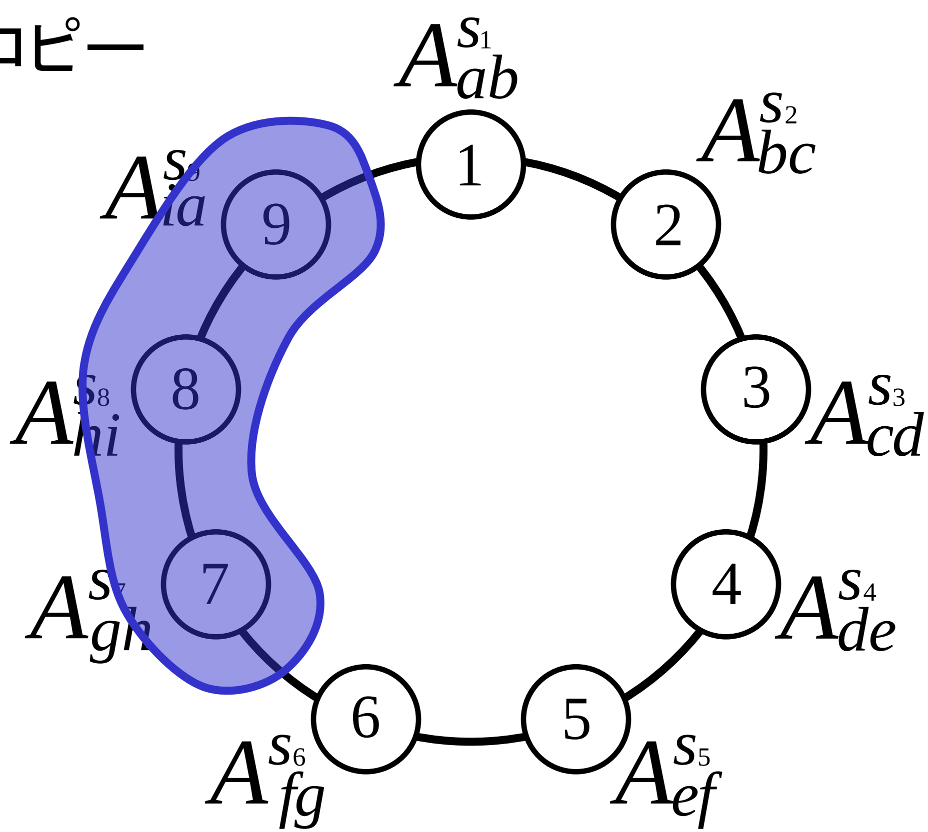
Ψ : 局所的行列の積⇔非局所相関

周期境界条件

$$|\psi\rangle = \sum_{\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}} tr\left(A_1^{s_1} A_2^{s_2} \cdots A_n^{s_n}\right)|s_1 s_2 \cdots s_n\rangle$$

エンタングルメント・エントロピー

$$S = 2\log\chi$$



適切なχの値の評価:

非臨界系〜L^{1-1}＝定数

臨界系〜$O(L^{c/6})$

$$2\log\chi = \frac{c}{3}\log L$$

$$\Rightarrow \chi = L^{c/6}$$

ベーテ仮説法からの基礎づけ

（1）代数的ベーテ仮説法の基底変換⇒MPS

（2）行列積ベーテ仮説法

最高ウエイト状態からM個の励起を生成する場合：

$$\psi_{\Omega}(x_1,\ldots,x_M)=Tr\left(E^{x_1-1}AE^{x_2-x_1-1}A\cdots E^{x_M-x_{M-1}-1}AE^{L-x_M}\Omega\right)$$

$$A=\sum_{j=1}^{M}A_{k_j}E \qquad E\,A_{k_j}=e^{ik_j}A_{k_j}E$$

$$A_{k_j}A_{k_j}=0 \qquad A_{k_j}A_{k_l}=s(k_j,k_l)A_{k_l}A_{k_j}$$

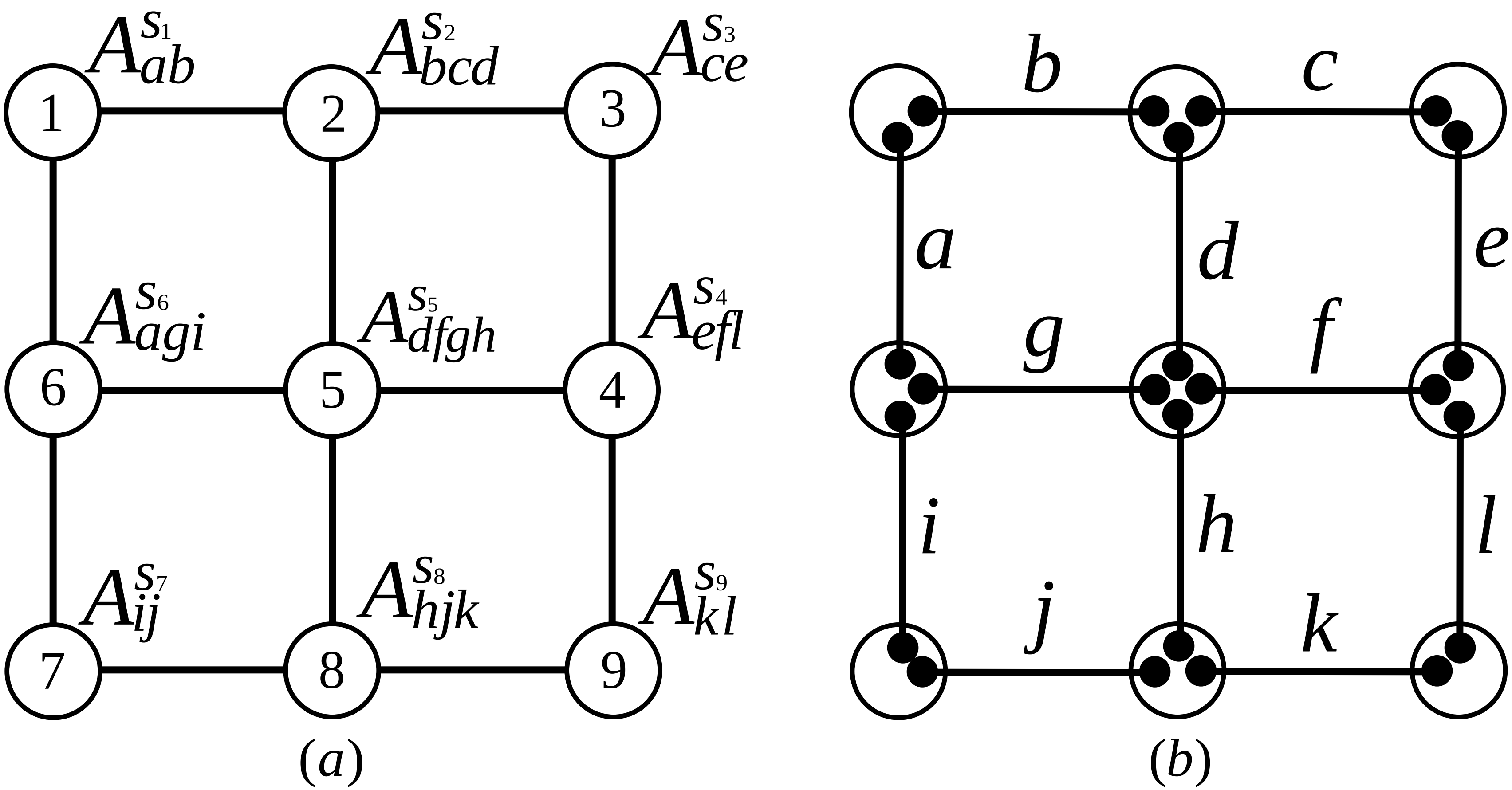
$$E\Omega=e^{-ip}\Omega E$$

（3）座標ベーテ仮説法の直観的な因子化法

$$\psi=e^{ik_1x_1+ik_2x_2}+\Theta e^{ik_1x_2+ik_2x_1}=\begin{pmatrix}e^{ik_1x_1} & e^{ik_2x_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ \Theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{ik_1x_2}\\ e^{ik_2x_2}\end{pmatrix}$$

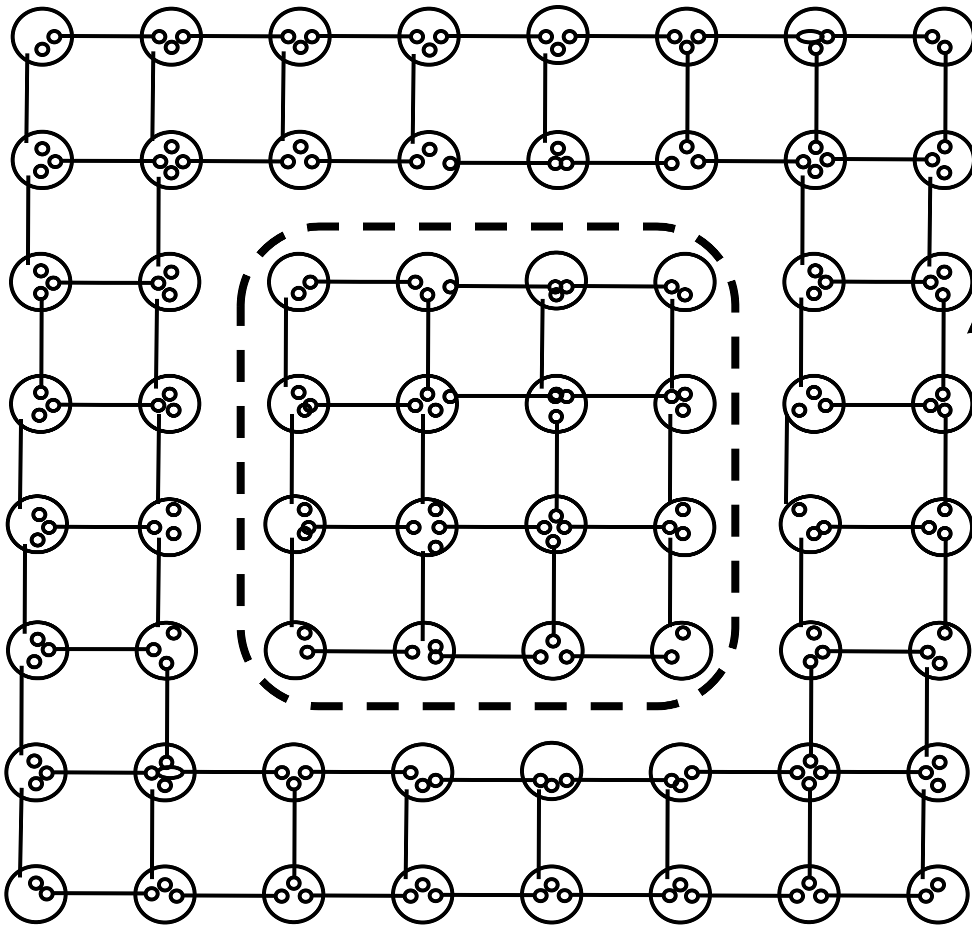
Tensor Product State (TPS), Tensor Network State (TNS)

Projected Entangled Pair State (PEPS)



$$|\psi\rangle = \sum_{\{s_j\}} \sum_{a,b,\ldots,l} A^{s_1}_{ab} A^{s_2}_{bcd} A^{s_3}_{ce} A^{s_4}_{efl} A^{s_5}_{dfgh} A^{s_6}_{agi} A^{s_7}_{ij} A^{s_8}_{hjk} A^{s_9}_{kl} |s_1 s_2 \cdots s_9\rangle$$

テンソル積状態のエンタングルメント構造



最大エンタングルメント対

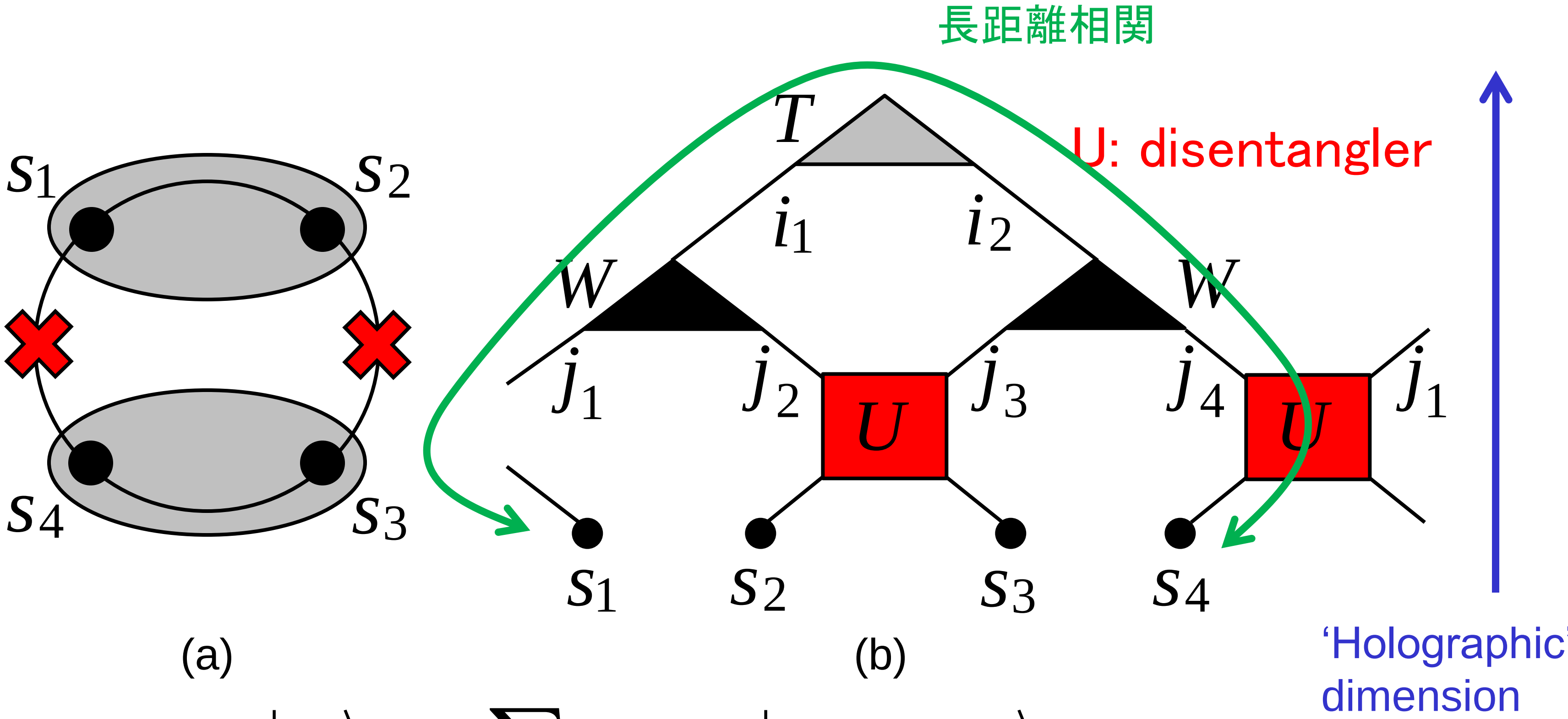
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\chi}} \sum_{\alpha=1}^{\chi} |\alpha\alpha\rangle$$

$S = N_{bond} \log \chi$ ⇒面積則を自動的に満たす

臨界系の対数補正を正しく記述するには大きなχが必要

階層的テンソルネットワーク，エンタングルメントくりこみ

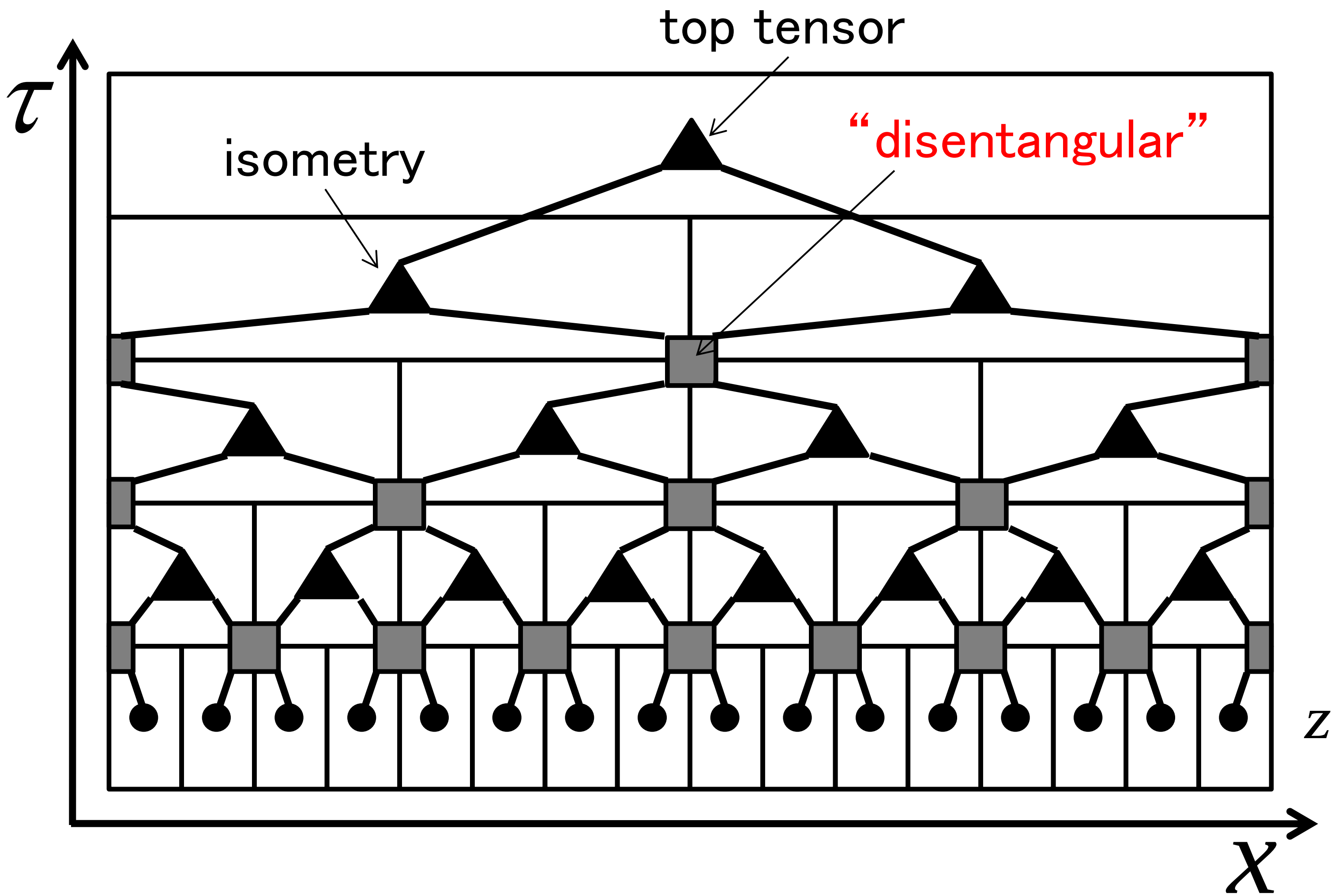
Multiscale Entanglement Renormalization Ansatz (MERA)



$$|\psi\rangle = \sum_{s_1,s_2,s_3,s_4,} T_{s_1 s_2 s_3 s_4} |s_1 s_2 s_3 s_4\rangle$$

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1,i_2} \sum_{j_1,\ldots,j_4} \sum_{s_1,\ldots,s_4} T_{i_1 i_2} W^{i_1}_{j_1 j_2} W^{i_2}_{j_3 j_4} U^{j_2 j_3}_{s_2 s_3} U^{j_4 j_1}_{s_4 s_1} |s_1 s_2 s_3 s_4\rangle$$

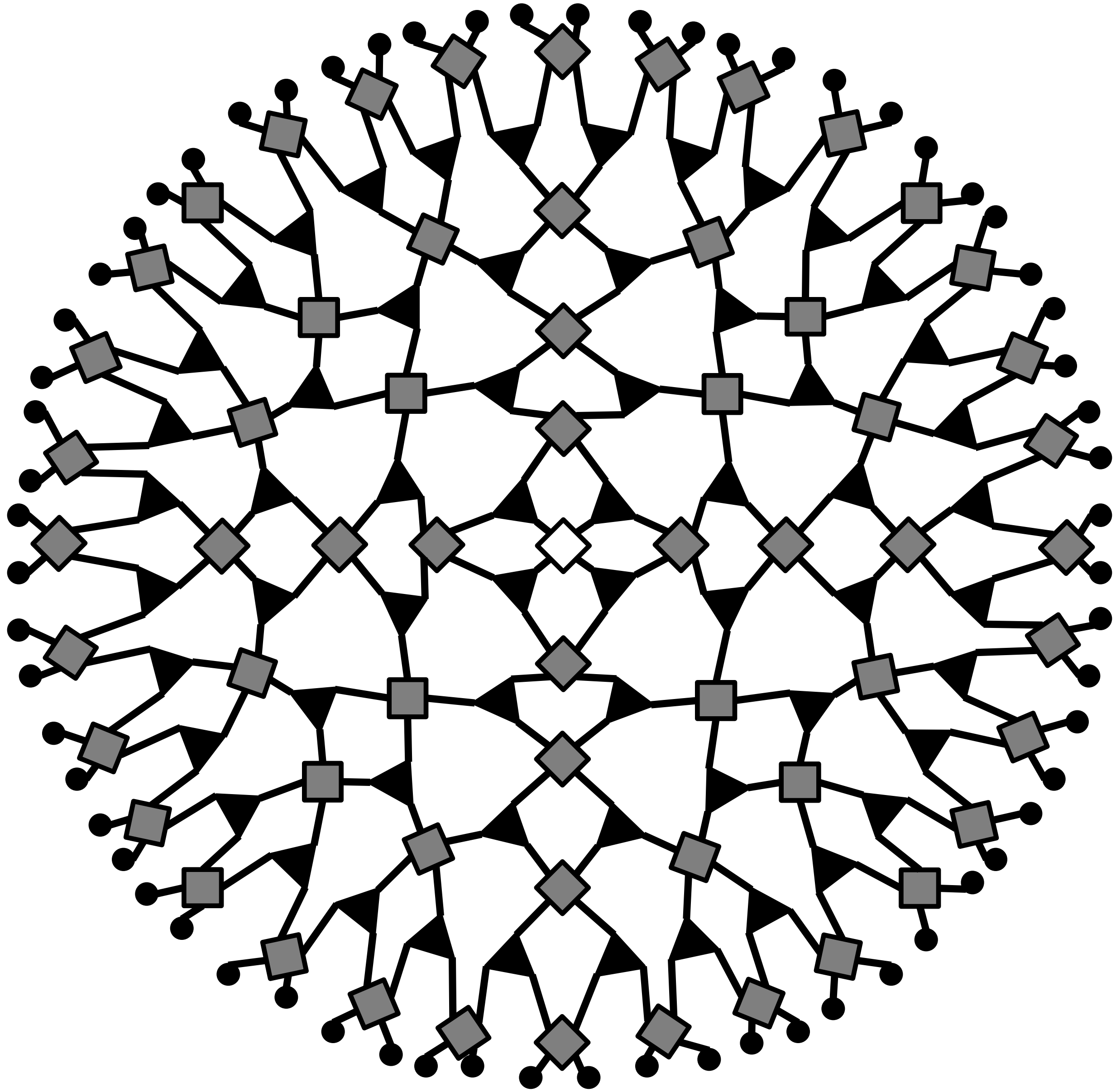
MERAネットワーク⇒離散的双曲空間



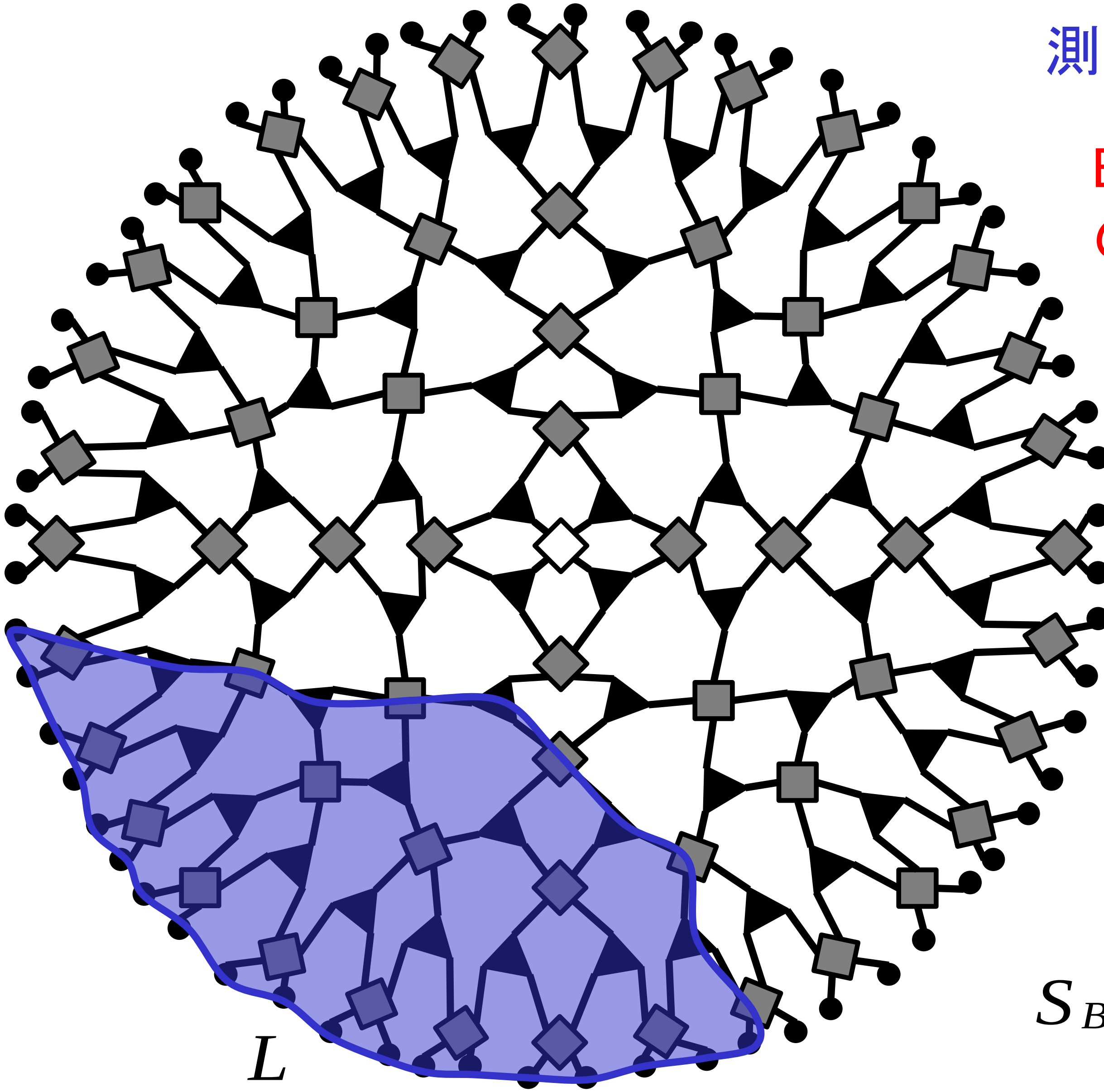
$$z = 2^{\tau/l}\, l$$

$$ds^2 = (d\tau \log 2)^2 + \left(2^{-\tau/l}dx\right)^2 = \frac{l^2}{z^2}\left(dz^2 + dx^2\right)$$

MERAのポアンカレ円板表現



エンタングルメントとブラックホール・エントロピーの対応



測地線～ $2l \ln L$

Bekenstein-Hawking
の法則

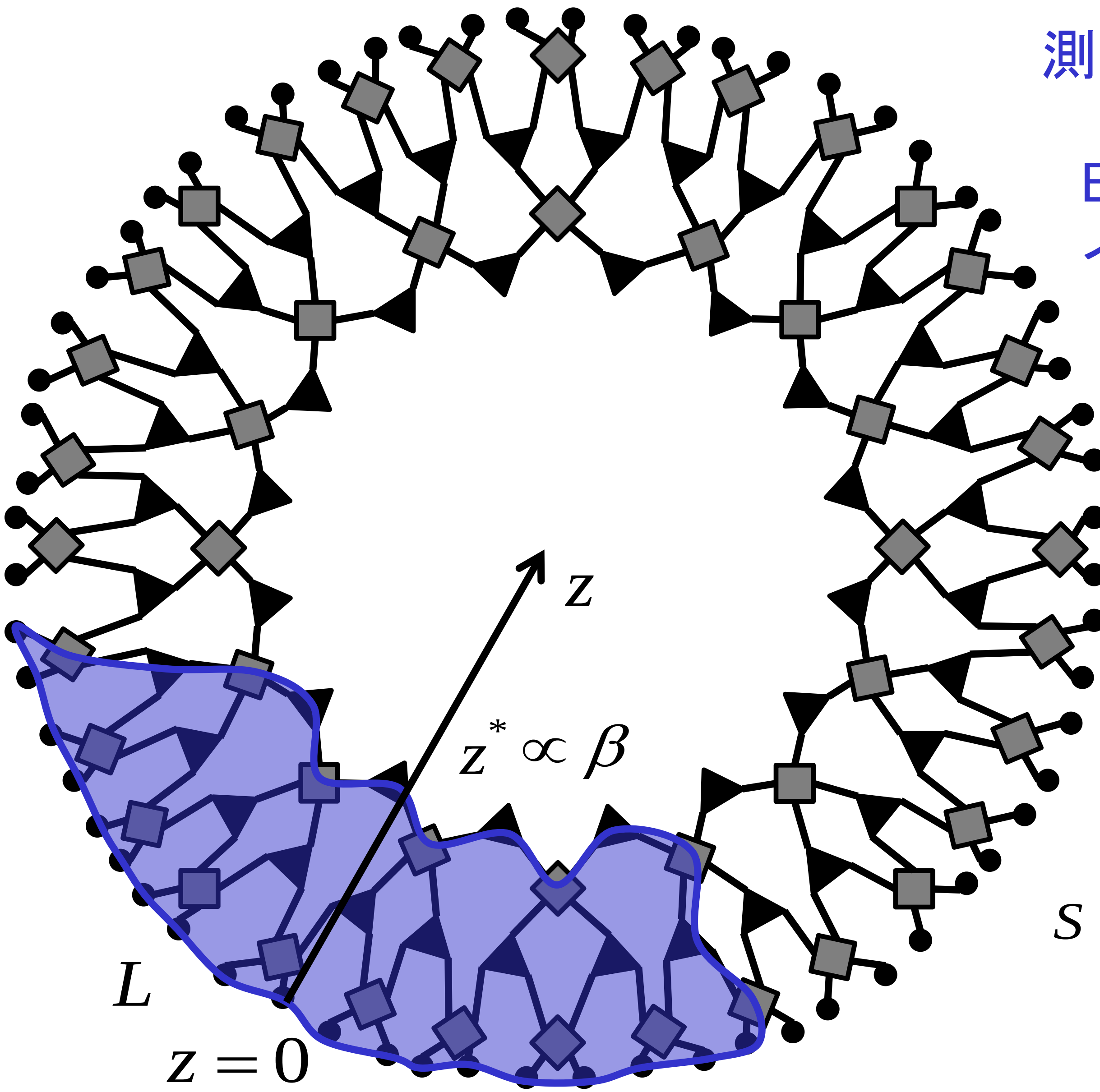
$$S_{BH} = \frac{A}{4G}$$

Brown-Henneaux
中心電荷

$$c = \frac{3l}{2G}$$

$$S_{BH} = \frac{c}{3} \log L = S_{EE}$$

BTZブラックホールと有限温度MERAの対応



測地線の変形

BTZブラックホールの
イベントホライズン

$$z^* \propto \beta$$

$$S = \frac{c}{3}\log\left(\frac{\beta}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi L}{\beta}\right)\right)$$

ゲージ重力対応との類似性

ホログラフィー原理

ストリング理論，ブラックホール物理：
トフーフト（1974,1993），サスカインド（1995），マルダセナ（1997）

AdS／CFT対応

ｄ次元量子系
（共形対称性を持つ）

（ｄ＋１）次元古典系
（双曲時空上の一般相対論）

モデル依存

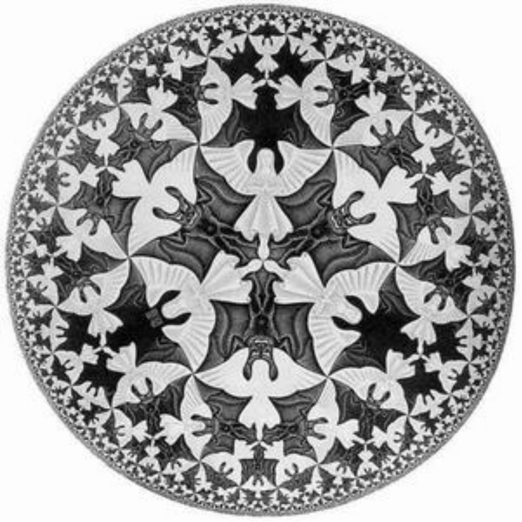
N=4 超対称ヤン・ミルズ理論　　$\boxed{AdS_5}\times\boxed{S^5}$上のタイプⅡＢ弦理論

ユニバーサルな性質

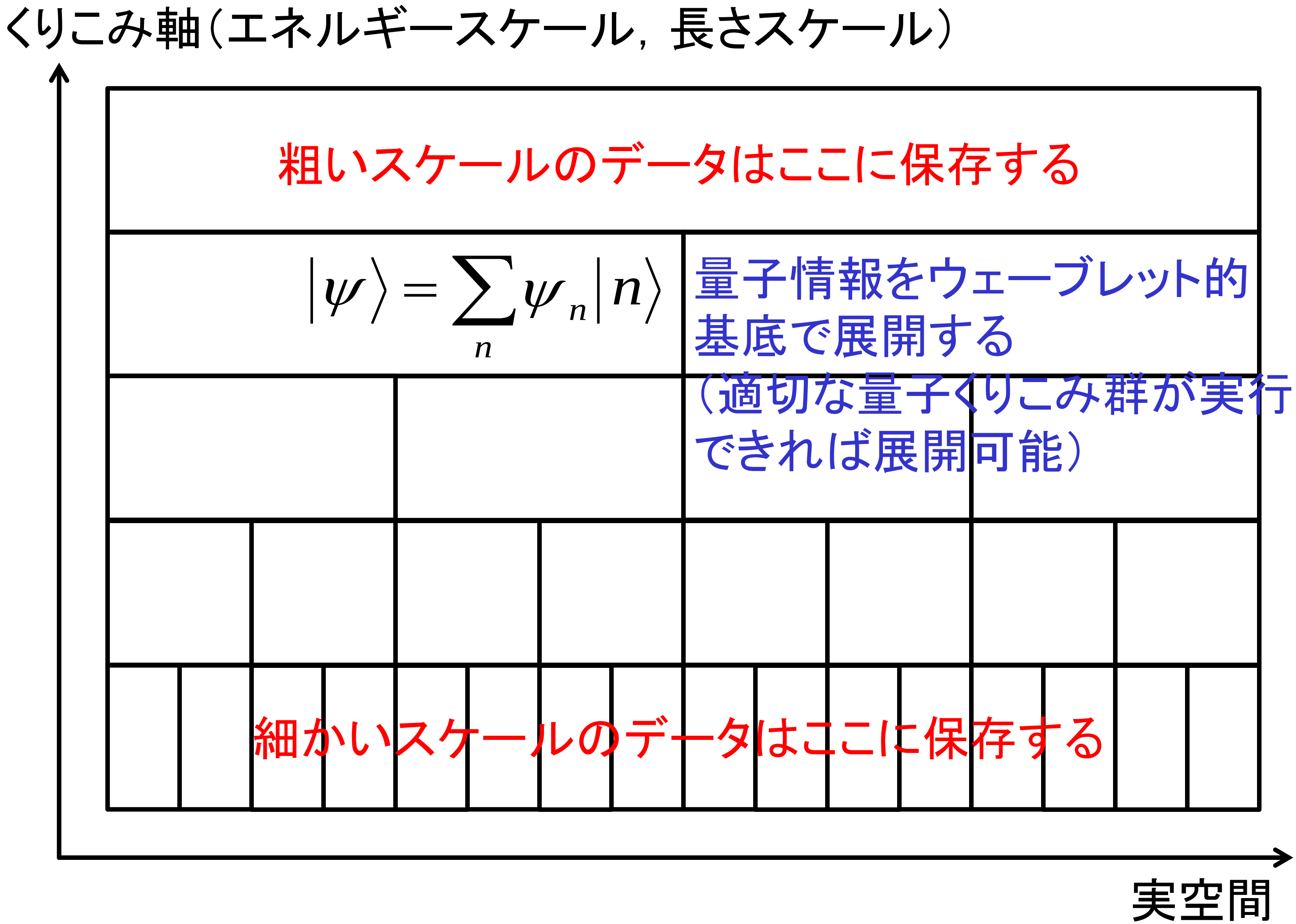
MERAによるエントロピーの計算
⇔笠・高柳の式（ホログラフィック・エントロピー）

トークのまとめにかえて

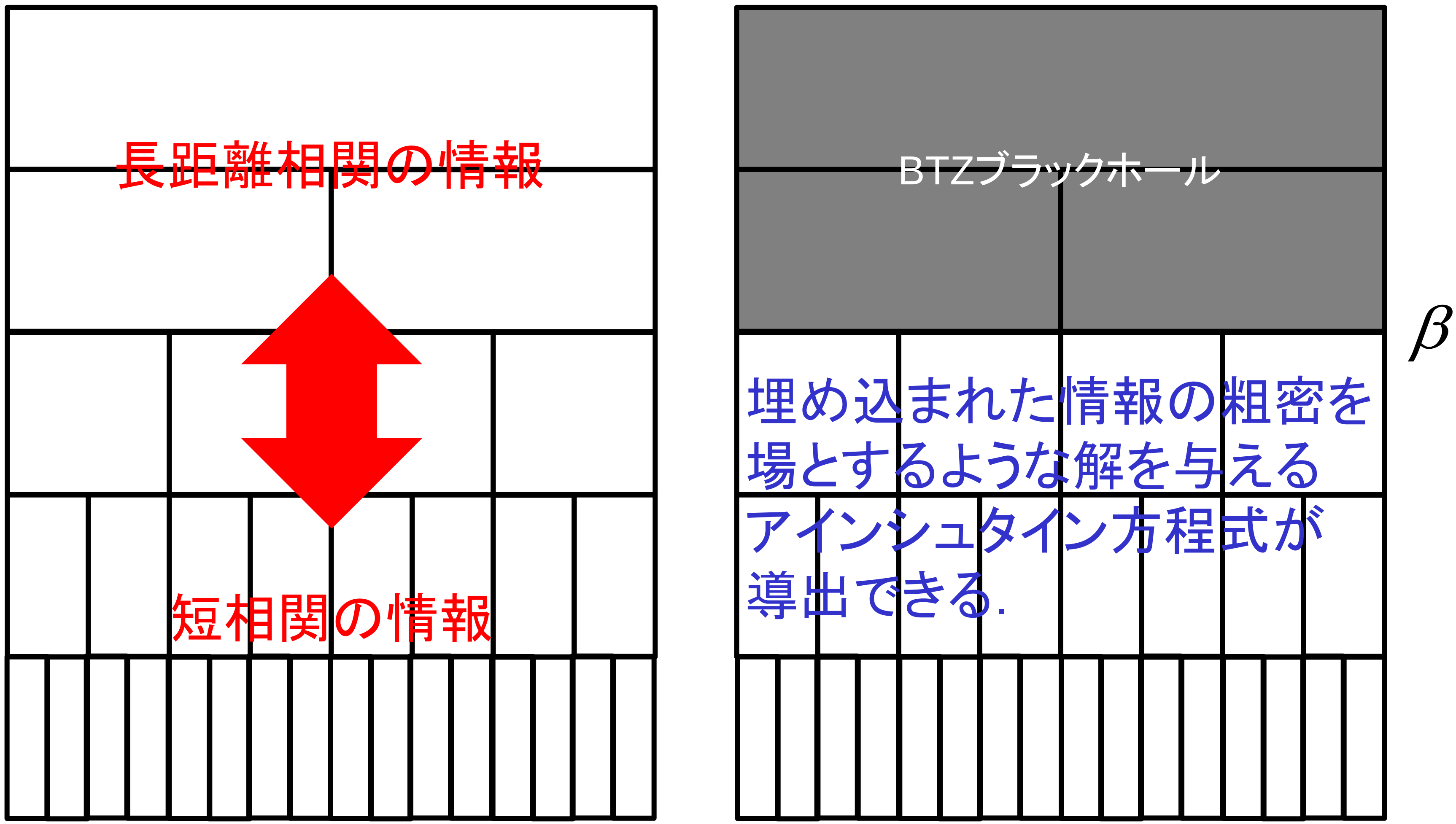
本当はここまでを物性論サイドからのアプローチ・出発点として，
色々な展開や異分野連携，私の研究などがあるのですが，
トークの時間は限られていますので，この後の時間で色々な
議論をよろしくお願いいたします．



双曲空間への量子データ埋め込み



場の量子論の一般相対論への変換



量子臨界系（基底状態）

励起状態，有限温度

臨界点の画像情報を非臨界的情報の和で表すこと

行列の特異値分解

$$M\left(x,y\right)=\sum_n U_n(x)\sqrt{\Lambda_n}\,V_n(y)$$

臨界点では
$\Lambda_n \propto n^{\eta-1}$

密度行列(相関関数)

$$\rho\left(x,x'\right)=\sum_n U_n(x)\,U_n(x')\,\Lambda_n$$

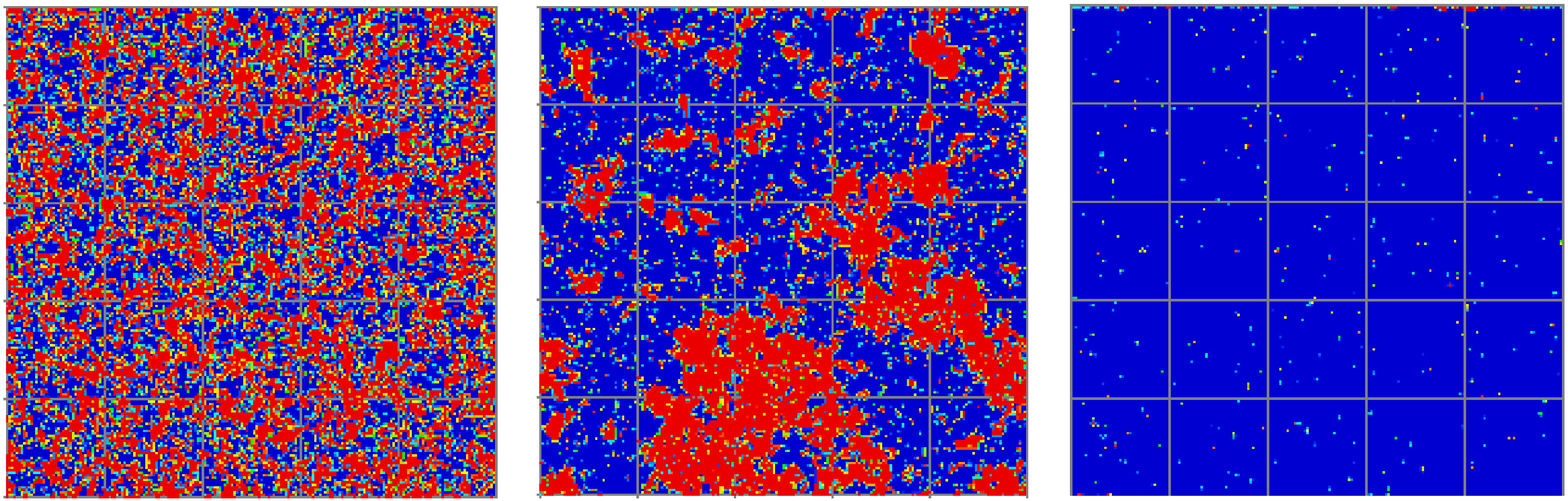
連続極限での分解公式(Mellin変換)

$$\lim_{\eta'\to\eta-0}\frac{A}{\left|x-x'\right|^{\eta}}\Gamma\left(\eta-\eta'\right)=\lim_{\eta'\to\eta-0}\int_0^{\infty}dz\,\frac{Ae^{-z\left|x-x'\right|}}{\left(z\left|x-x'\right|\right)^{\eta'}}\,z^{\eta-1}$$

Monte Carlo Simulation of the 2D Ising Model

Classical Ising Spin Model: $H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^z \sigma_j^z \qquad \sigma_i^z = \pm 1$

Snapshots at various temperature



(a) $T = 3.02J$ (b) $T \approx T_c = 2.27J$ (c) $T = 1.52J$

$$L = 256 \qquad T_c = \frac{2J}{\log(1+\sqrt{2})} = 2.2692J$$

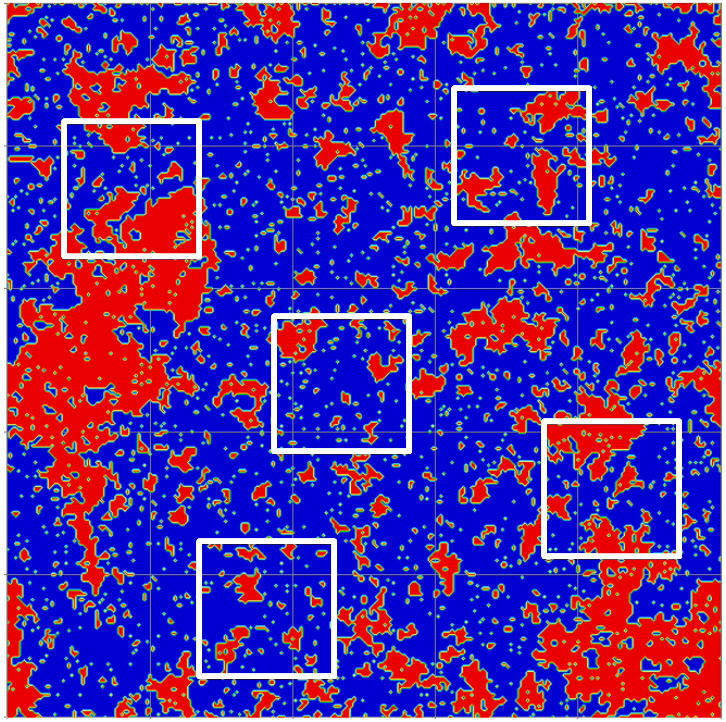
臨界性・フラクタル性と情報量

2次元イジング模型

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^z \sigma_j^z$$

臨界点でのスナップショット
→ フラクタル的なスピン構造

白枠で囲まれた部分系の集合
→ 全ての熱揺らぎを近似的に表す

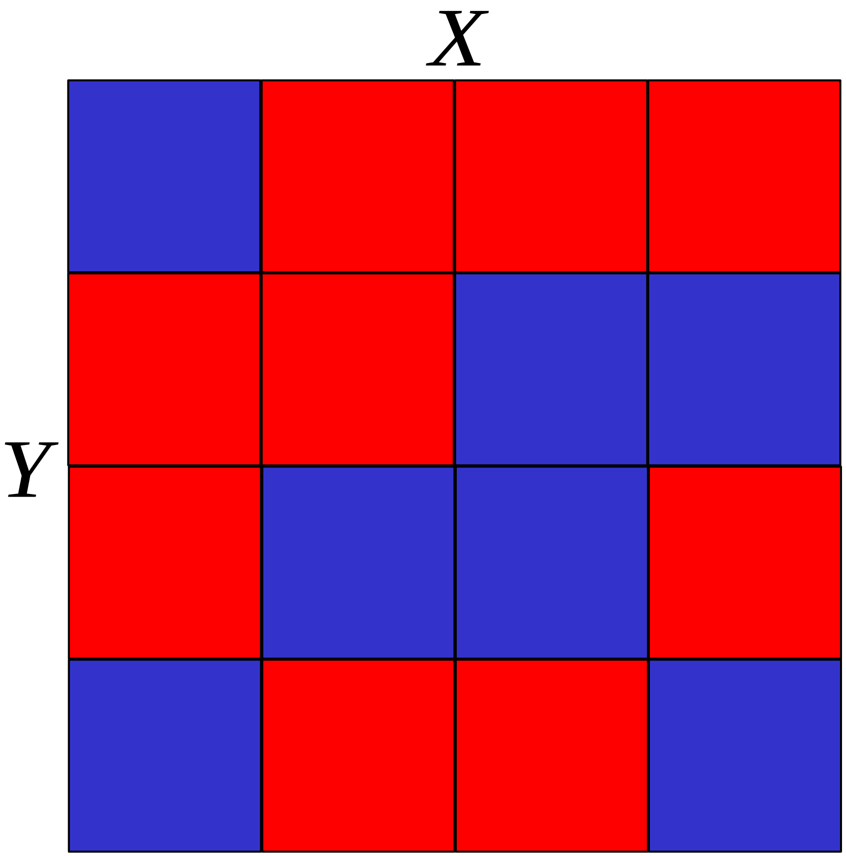


A typical snapshot of
the Ising model
256x256, T=2.26J

臨界点での1枚のスナップショット⇔分配関数とほぼ同じ情報量

Density matrix of a snapshot

A snapshot determined by Monte Carlo simulation



$$= \begin{array}{c} \psi \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\rho_Y = \psi \psi^* \quad \rho_X = \psi^* \psi$$

Matrix product → trace over partial degree of freedom

特異値分解(Singular Value Decomposition, SVD)

Singular Value Decomposition (SVD) of matrix Ψ (Snapshot Data)

$$\psi(x,y) = \sum_l U_l(x)\sqrt{\Lambda_l}\,V_l(y)$$

Λ_l : singular value (non-negative, uniquely determined)

$U_l(x), V_l(y)$: (unitary matrices, various choices)

$$\rho_X(x,x') = \sum_y \psi(x,y)\psi^*(x',y) = \sum_l U_l(x)\,\Lambda_l\,U_l^*(x')$$

$$\rho_Y(y,y') = \sum_x \psi(x,y)\psi^*(x,y') = \sum_l V_l(y)\,\Lambda_l\,V_l^*(y')$$

Snapshot Entropy → boundary law (not extensive)

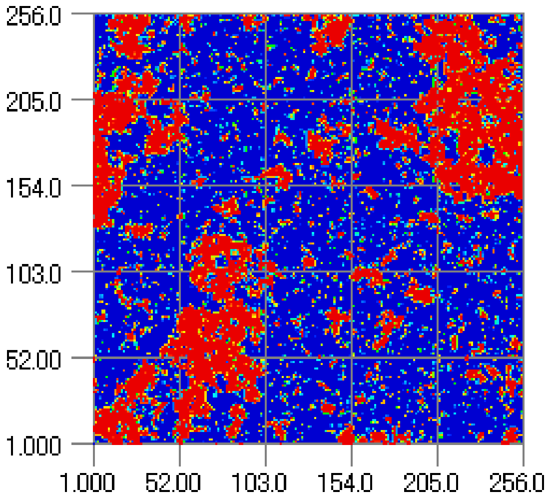
$$S_X = -\sum_l \lambda_l \log \lambda_l = S_Y \qquad \lambda_l = \Lambda_l / \sum_l \Lambda_l$$

スナップショット・SVDに隠れた双曲的空間構造

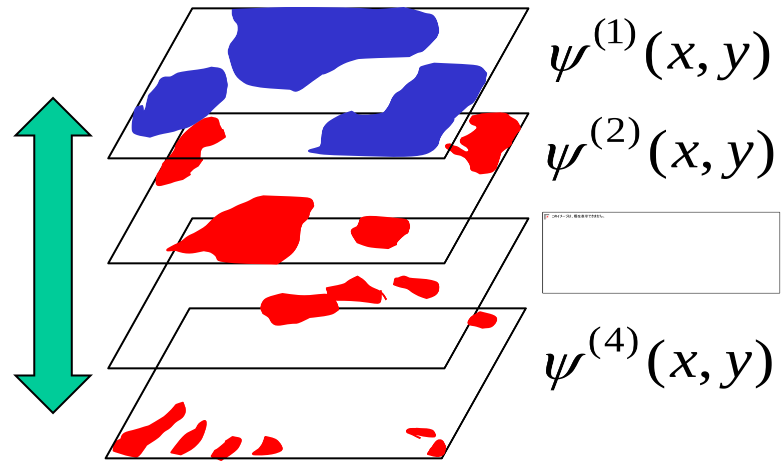
±1エンコーディング

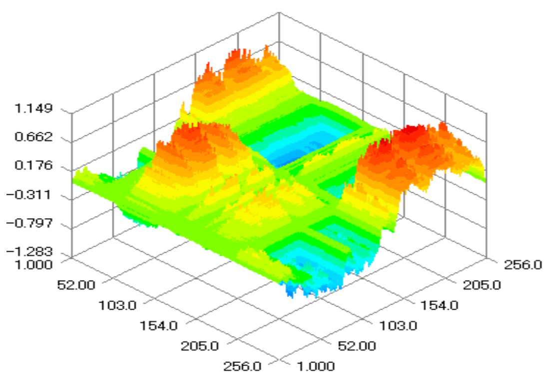
HM, Phys. Rev. E85, 031101 (2012)

$$\psi(x,y)=\sum_{l=1}^{L}\psi^{(l)}(x,y) \qquad \psi^{(l)}(x,y)=U_l(x)\sqrt{\Lambda_l}V_l(y)$$

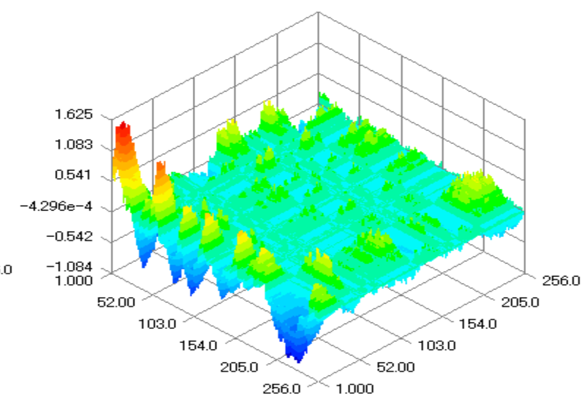


$$ds \propto \frac{dl}{l}$$

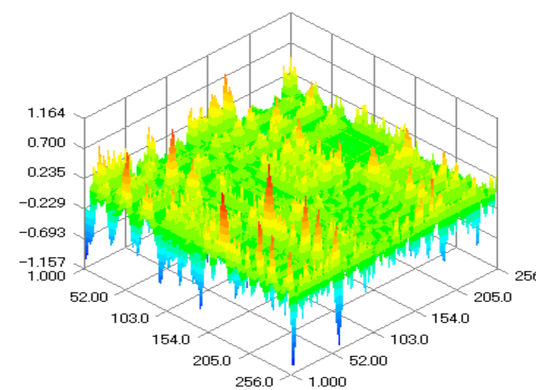




$\psi^{(2)}(x,y)$



$\psi^{(4)}(x,y)$

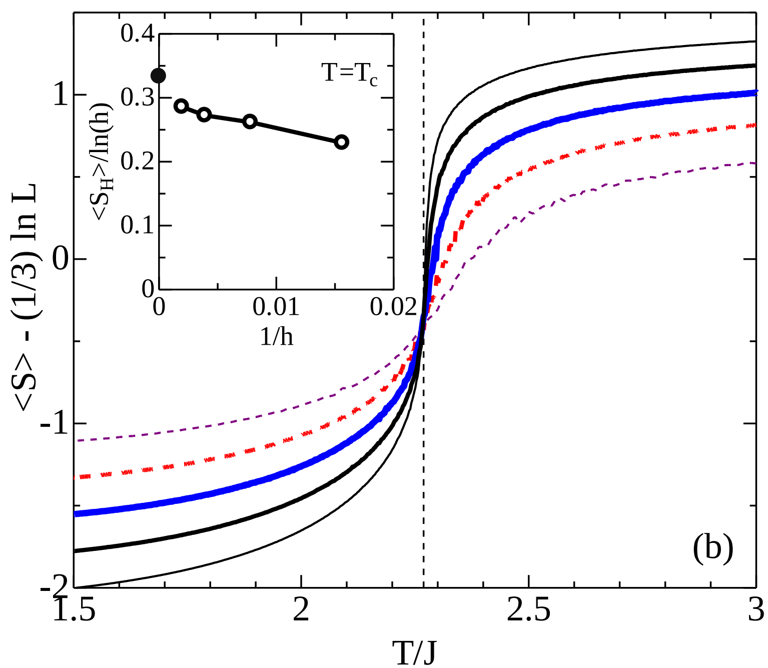


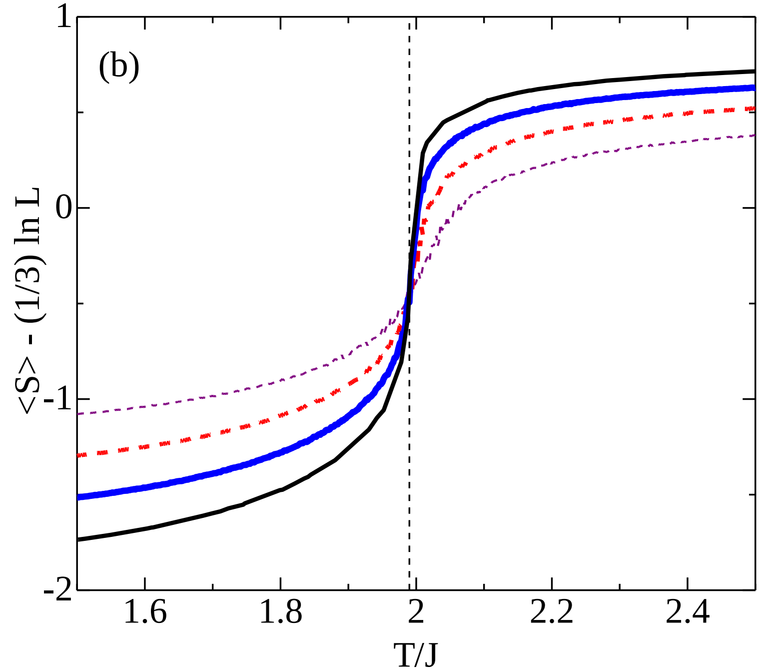
$\psi^{(8)}(x,y)$

スナップショット・エントロピーのスケーリング公式

(0,1)エンコーディング

HM and D.Ozaki, Phys. Rev. E92, 042167 (2015)





2次元イジング模型(c=1/2)　2次元3状態ポッツ模型(c=4/5)

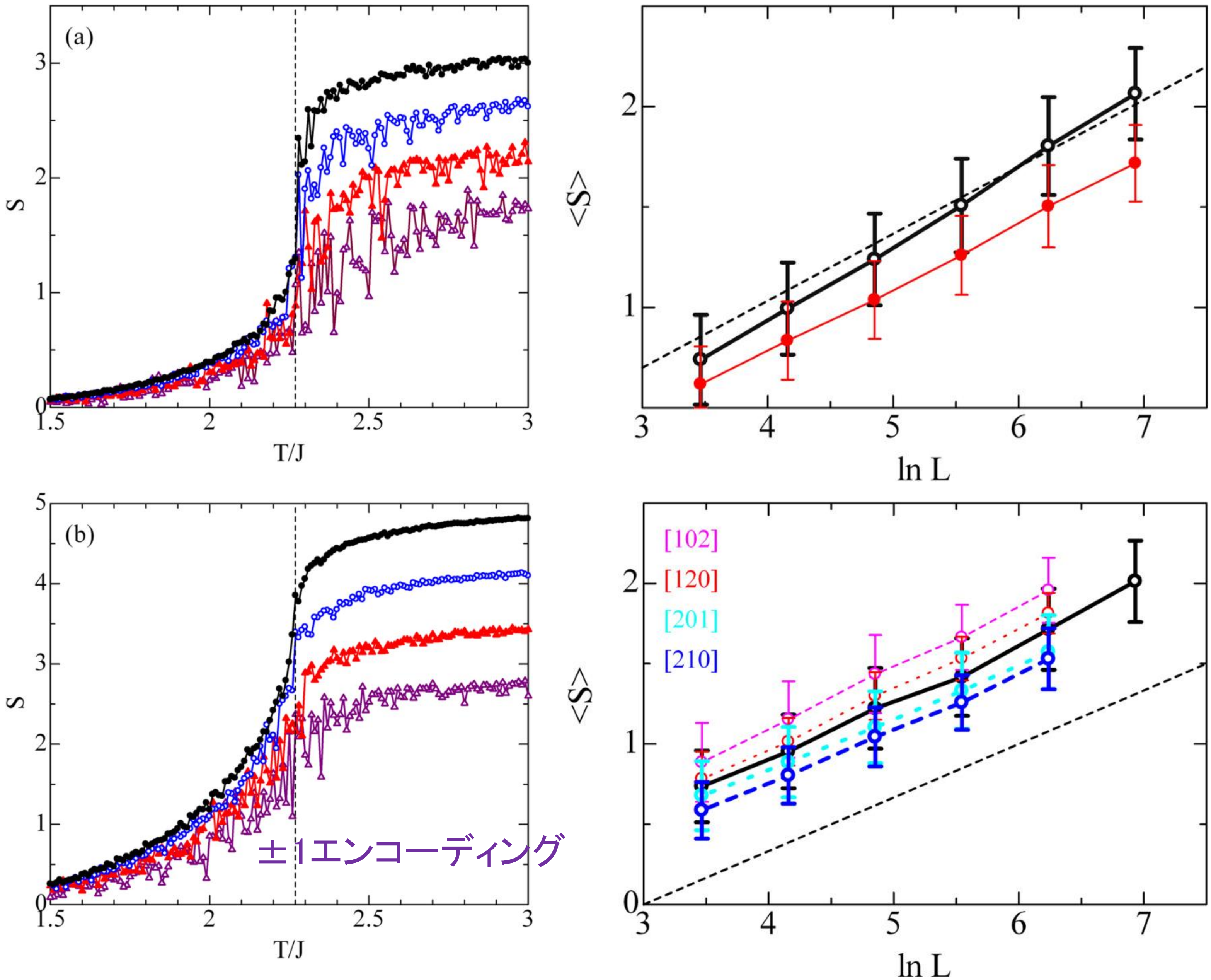
スケーリング公式:

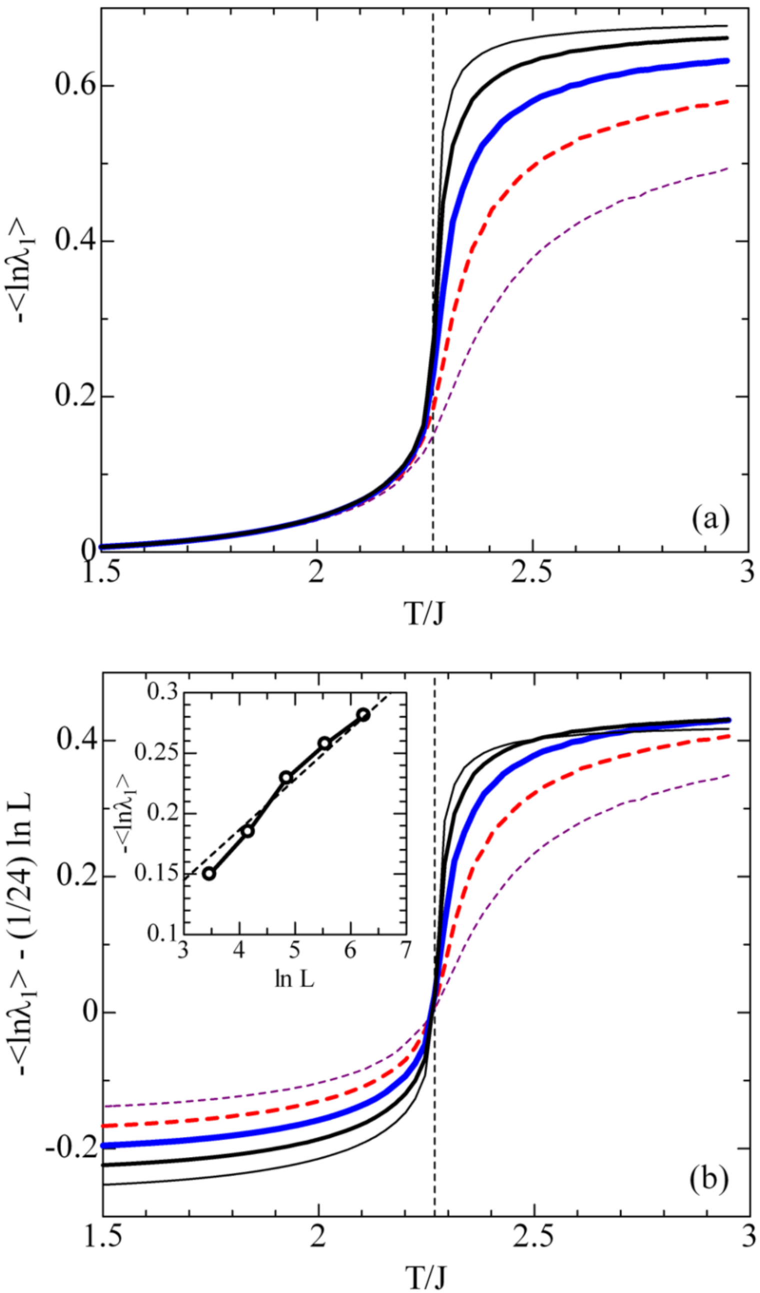
$$\langle S \rangle \approx \frac{1}{3} \log L - \frac{1}{2}$$

1次元量子臨界系の公式
を連想させる.

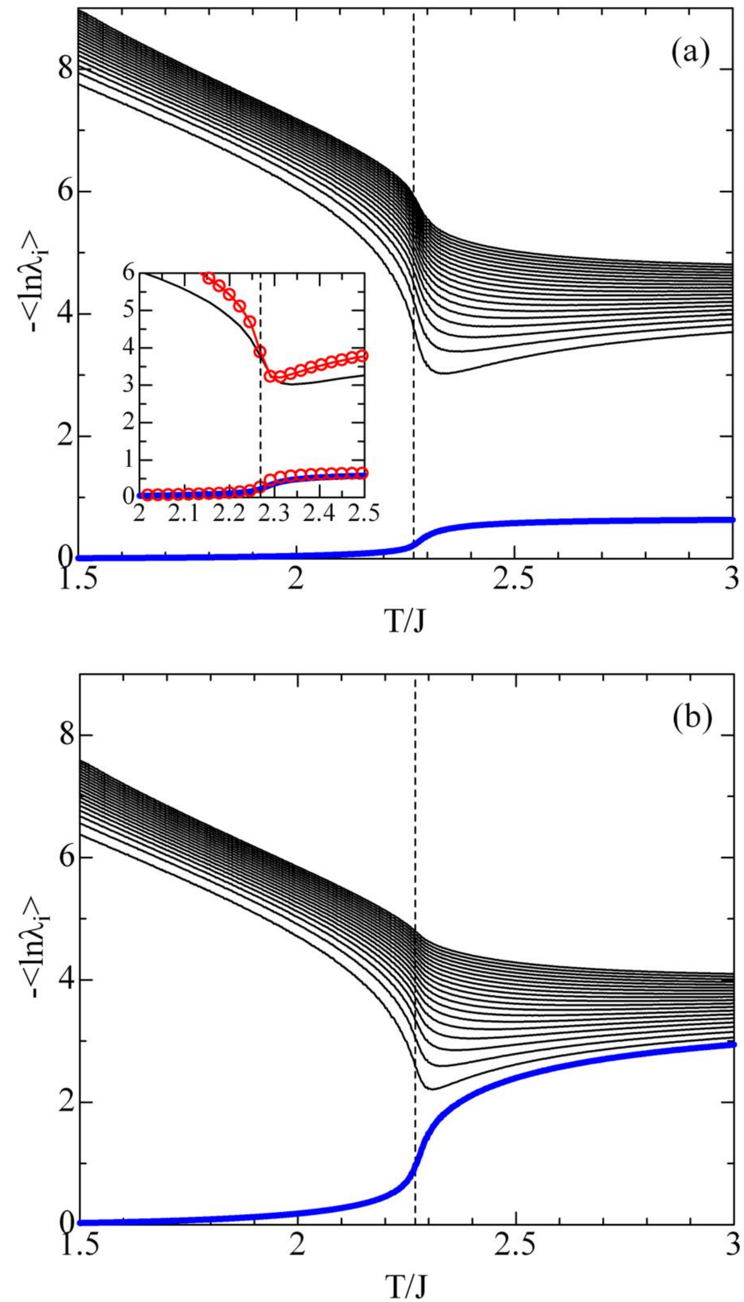
スケーリングの起源
⇒前ページのスケール分解の階層数
～笠・高柳の式と同等

$$S_{EE} \sim c \langle S \rangle$$

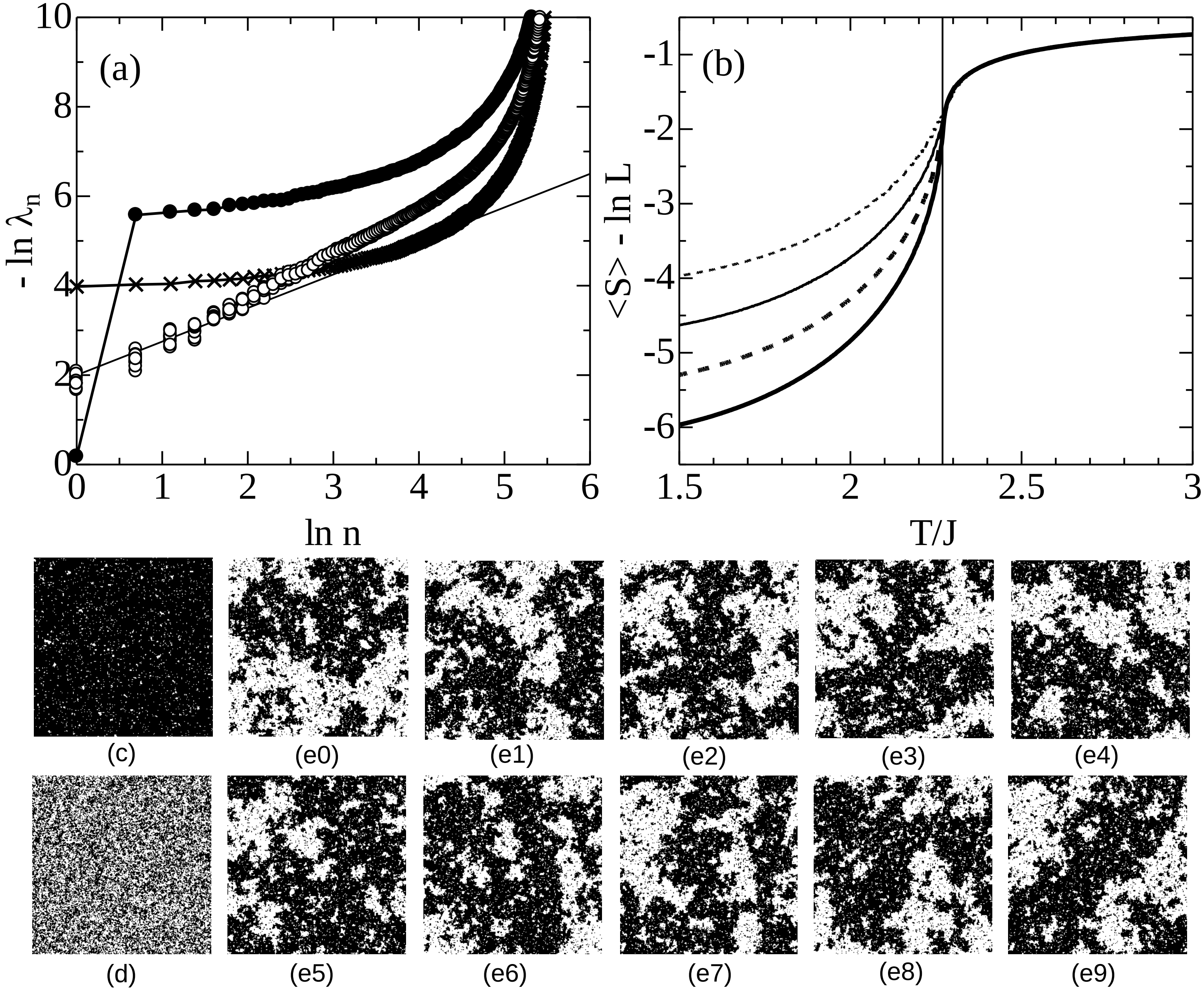

(a)
S
T/J
⟨S⟩
ln L
(b)
S
T/J
[102]
[120]
[201]
[210]
⟨S⟩
ln L
±1エンコーディング



-<lnλ1>
T/J
(a)
-<lnλ1> - (1/24) ln L
-<lnλ1>
ln L
(b)



-<lnλi>
T/J
(a)
(b)



±1エンコーディング

HM, Ching-Hua Lee, and Y. Hashizume (2014)

SVD spectrum → 転移点以上で代数的減衰

＊指数が異常次元を与える

$$f(\lambda)=\sum_n \delta(\lambda-\lambda_n)=A\lambda^{-\alpha} \qquad \alpha=\frac{2-\eta}{1-\eta}$$

←奥西さん

$$\lambda_n=\frac{a}{n^{\Delta}} \qquad \Delta=1-\eta$$

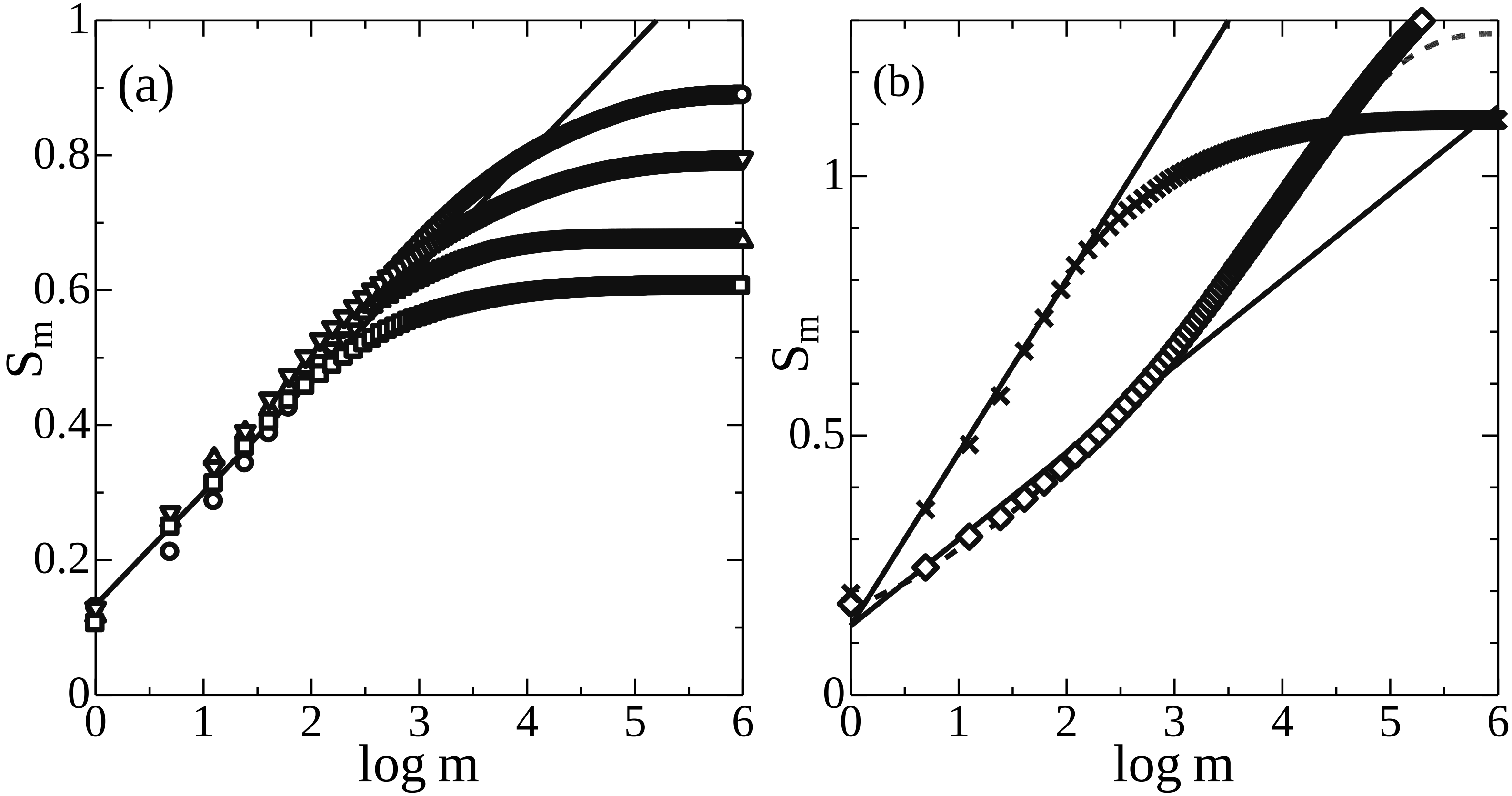
$$S_\chi=-\sum_{n=1}^{\chi}\lambda_n \ln\lambda_n$$

$$\approx\frac{\chi^{1-\Delta}-1}{N^{1-\Delta}-1}\left\{\ln\left(N^{1-\Delta}-1\right)-\gamma(\Delta)\right\}+\frac{\Delta}{N^{1-\Delta}-1}\chi^{1-\Delta}\ln\chi$$

$$S_L=\ln L-\gamma(\Delta) \qquad \gamma(\Delta)=\ln(1-\Delta)+\frac{\Delta}{1-\Delta}$$

高温極限⇒ランダム行列理論 $S_L=\ln L-\dfrac{\pi}{4}$

現実的な画像でもスケーリングは見られる



○zebra, △largo, ▽matsueda office, □cat, ×flower, ◇tree

$$S_m = -\sum_{l=1}^{m} \lambda_l \log \lambda_l \approx \frac{1}{6} \log m + \gamma$$

Tensor-product construction of Sierpinski carpet

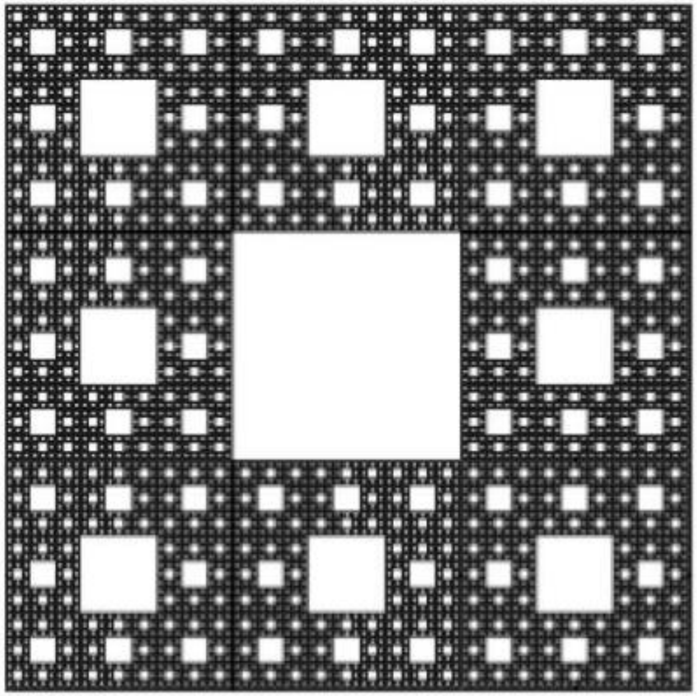
h × h(=3 × 3) unit cell

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Factorized form

$$M = H \otimes H \otimes \cdots \otimes H \otimes H$$

$$H \otimes H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{0} & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{0} & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Fractal image

→ L × L matrix

→ N different scales

$$L = h^N$$

SVD spectrum of Sierpinski carpet

$$M = H \otimes H \otimes \cdots \otimes H \otimes H$$

$$\left(-\sum_{i=\pm} \gamma_i \ln \gamma_i \right) \frac{1}{\ln h} = \frac{c}{3}$$

$$M^2 = H^2 \otimes H^2 \otimes \cdots \otimes H^2 \otimes H^2$$

Two non-zero eigenvalues of H^2 : $\Gamma_\pm = 4 \pm 2\sqrt{3}$

Normalization of Γ: $\gamma_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$ $\qquad \gamma_- = 1 - \gamma_+$

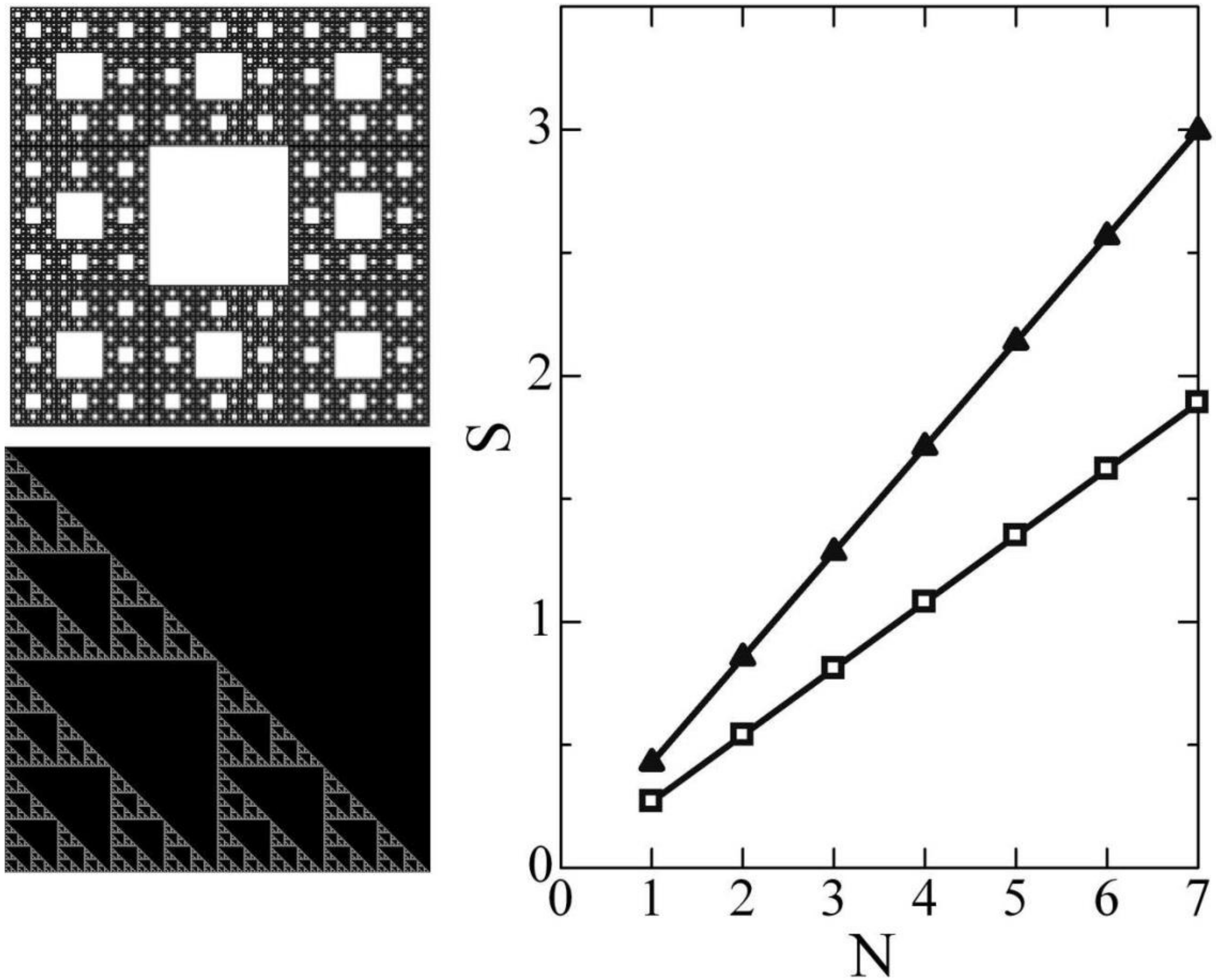
Eigenvalues of M^2 : $\lambda_j = \gamma_+^j \gamma_-^{N-j} = \gamma_+^j (1-\gamma_+)^{N-j}$ (Degeneracy : ${}_N C_j$)

Snapshot entropy ⇔ entanglement entropy of 1D free fermions

$$S = -\sum_{j=0}^{N} {}_N C_j \left(\lambda_j \ln \lambda_j \right) = \left(-\sum_{i=\pm} \gamma_i \ln \gamma_i \right) N = \left(-\sum_{i=\pm} \gamma_i \ln \gamma_i \right) \frac{\ln L}{\ln h}$$

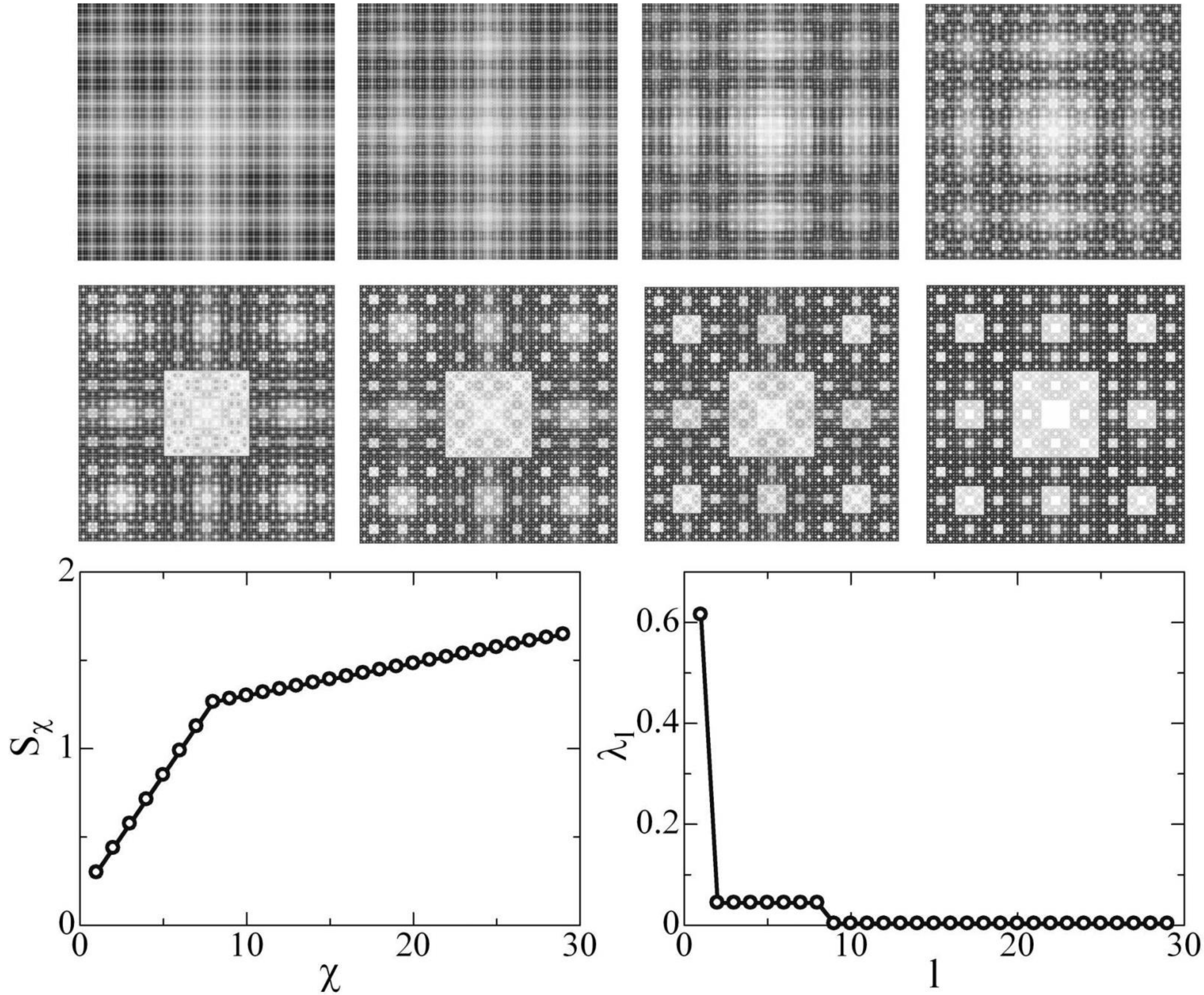
I. Peschel, J. Phys. A: Math. Gen. 36, L205 (2003)

Snapshot entropy as a function of layer number N (Numerical calculation)



C.H.Lee, Y.Yamada, K.Kumamoto, HM, JPSJ84, 013001 (2015)

Coarse-grained snapshot entropy



C.H.Lee, Y.Yamada, K.Kumamoto, HM, JPSJ84, 013001 (2015)

Finite-χ scaling

アムラさんからの指摘:
オーバーオールに見れば,
線形ではなくて対数的に見える.

Fractal → degenerate eigenvalues

We focus on the first (N+1)-th eigenvalues

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_{N+1}$$

$$S_\chi = -\lambda_1 \log \lambda_1 - (\chi - 1)\lambda_2 \log \lambda_2$$

$$\lim_{\chi \to 0} S_\chi = 0 \Rightarrow -\lambda_1 \log \lambda_1 = -\lambda_2 \log \lambda_2 \Rightarrow S_\chi = S_1 \chi$$

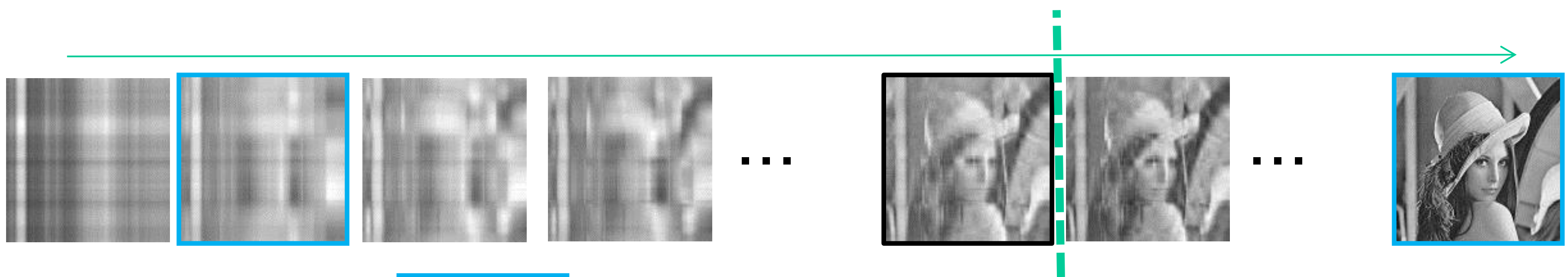
cf. finite-entanglement scaling near 1D quantum criticality

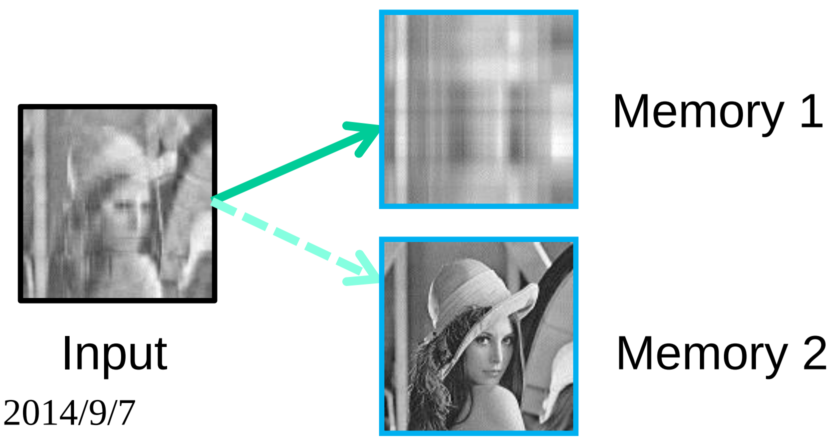
$$S_\chi = \frac{c\kappa}{6} \log \chi = \frac{1}{\sqrt{12/c} + 1} \log \chi$$

Their difference may come from violation on full conformal symmetry on the fractal image that has just scale invariance.

ニューラルネットワークの連想記憶機能とスケーリング

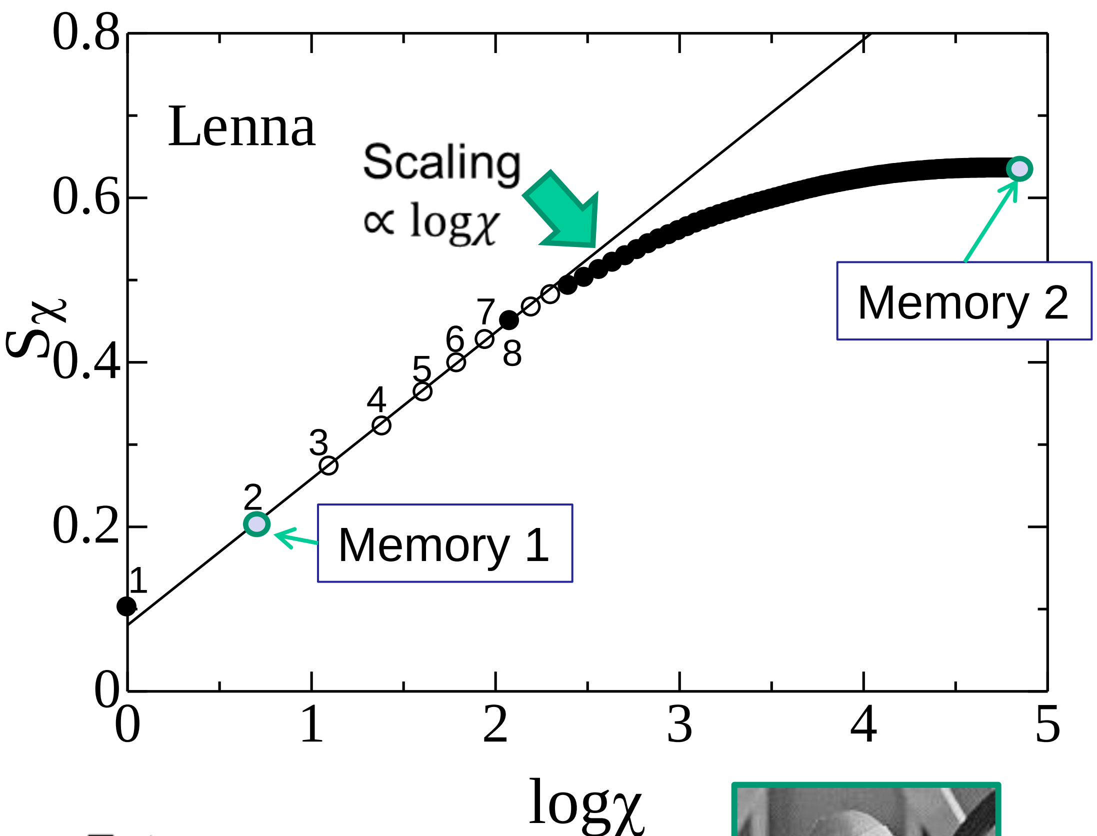
- Learning two images which are the original image and the depleted one.
- Input image is the intermediate one.
- Those are generated by SVD.

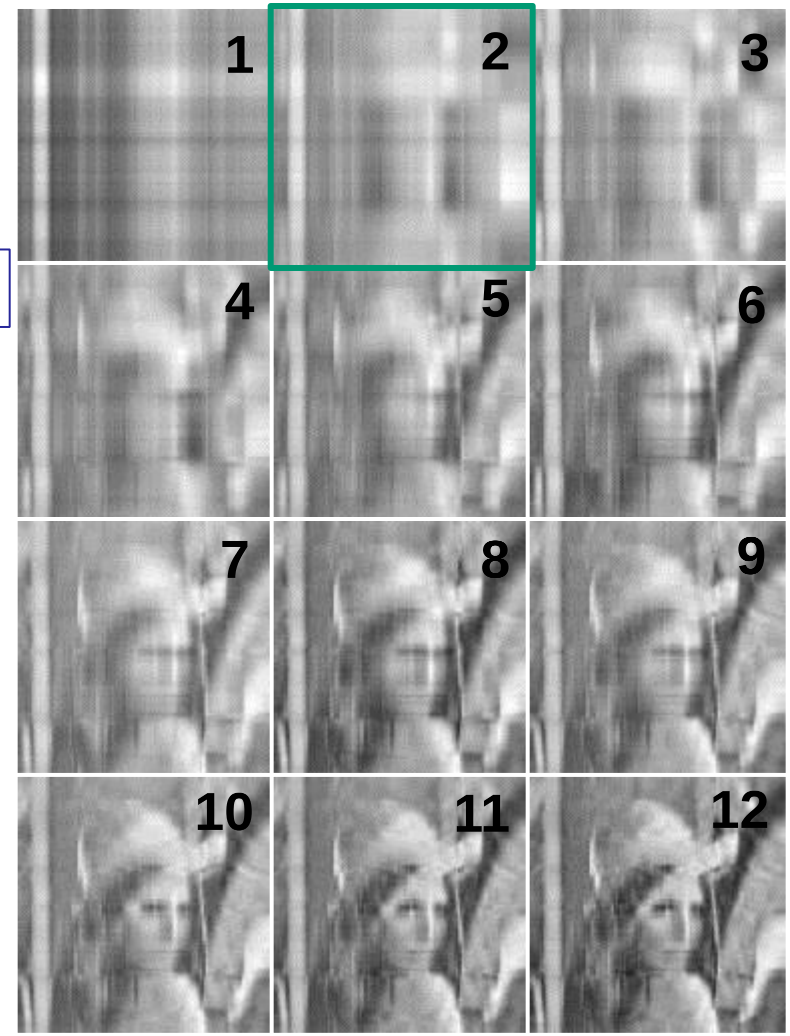




The purpose is to examine the relationship <u>between the entropy scaling and the ability of network</u>.

Method(SVD)





Entropy S_χ

$$S_\chi = -\sum_{l=1}^{\chi} \lambda_l \ln(\lambda_l)$$

2014/9/7

T.Kumamoto, M. Suzuki, and HM, JPSJ 86, 024005 (2017)