ツイスター理論

と

Bäcklund変換, 線形化

待田芳德

コンテンツ

1. 幾何-微分方程式対応
2. Bäcklund変換
3. ツイスター理論
4. ツイスター理論と線形化との関連
5. 低階数のLie代数から

◎ 幾何-微分方程式対応

○ 内在幾何 ⟷ 非線形微分方程式 ← Lie代数

外在化,線形化

外在幾何 ⟷ 線形微分方程式 ← Lie代数表現

○ 内在幾何

⇔ 分布,コーン場  cf. G構造の幾何(ex.テンソル場)

- コーン型, ジェット型 : $\mathfrak{g}(\mathfrak{m},\mathfrak{g}_0)$
  - コーン
    - ヌルコーン (2次)
    - Grassmannコーン
  - Lagrangeコーン (3次)
    - BD型
    - 例外型
- 分布型 : $\mathfrak{g}(\mathfrak{m})$
  - 1-jet束(Grass.束), 2-jet束(Lag.Grass.束)
  - 0-jet (proj.), 1-jet (proj.contact)

⇔ 分布の極大積分多様体,コーン場の包絡面

⇔ 非線形微分方程式

○ 外在幾何から，線形微分方程式へ

$\varphi : M \longrightarrow Gr(m, V^*)$ Kleinの立場 cf. DMM

$$\begin{array}{ccccc} \varphi^*E & & E & \supset & E_{W^*} = W (\subset V) \\ & & & & W^*\text{の fiber} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ M & \longrightarrow & Gr(m, V^*) & \ni & W^* (\subset V^*) \\ & & & & m\text{次元} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & S = \iota(V) \subset \Gamma(\varphi^*E) \subset \Gamma(E) \\ \Psi & & \Psi \\ \alpha & \longmapsto & \alpha(W^*) = \alpha|_{W^*} \end{array}$$

点W^*でのsectionの値

$\sigma \in \Gamma(E)$から，$j^k_x(\sigma) \in J^k(E)$ $(x \in M)$

$j^k_x : S = \iota(V) \longrightarrow R^k_x \subset J^k(\varphi^*E)$

十分大きなkで単射

$R = R^k = \bigcup_{x \in M} R^k_x \subset J^k(E)$ ベクトル束

$\downarrow$

M

有限型，積分可能な線形微分方程式

解空間は $S \cong V$

線形微分方程式から，外在幾何へ

$$R \subset J^k(E) \quad \text{ベクトル束}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ E \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

$rk = m$ 　section は未知関数の空間

$S = Sol(R) \cong V$ 　 R の解空間，有限次元ベクトル空間

$S_x = Sol(R)_x = \{\sigma \in Sol(R) \mid \sigma(x) = 0\}$

$0 \longrightarrow Sol(R)_x \longrightarrow Sol(R) \longrightarrow E_x \longrightarrow 0$ 　(exact)

$m = \dim E_x$
$= \operatorname{codim} Sol(R)_x$ 　 $(x \in M)$

$$\begin{array}{ccccc} \varphi : & M & \longrightarrow & Gr(m, V^*) \\ & \Psi & & \Psi \\ & x & \longmapsto & E_x = Sol(R)_x^{\perp} \end{array}$$

※ 微分積分の基本定理

◎ Bäcklund変換

1つのDEの1つの解から、他の(or同じ)DEの新しい解を作る変換

ex.1 Laplace方程式

線形 $u_{xx}+u_{yy}=0$ $\quad v_{xx}+v_{yy}=0$ 解は調和関数

自己B変換 $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ Cauchy-Riemann eq.

* $v=y$ は解 $\xrightarrow{\text{CR式}}$ $u=x+C$ $\quad f(z)=z$
* $v=xy$ は解 $\longrightarrow$ $u=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+C$ $\quad f(z)=\frac{1}{2}z^2$
* $u=\log\sqrt{x^2+y^2}$ は解 $\longrightarrow$ $v=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}+C$ $\quad f(z)=\log z$

ex.2 sine-Gordon方程式

cf. Klein-Gordon eq.

cf. $K=-1$ の擬球面の構成

非線形 $u_{xy}=\sin u$ $\quad v_{xy}=\sin v$

自己B変換 $\begin{cases} v_x-u_x=2\sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \\ v_y+u_y=-2\sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \end{cases}$

* $v=0$ は解 $\longrightarrow$ u: 1-ソリトン解

ex.3 Liouville 方程式

非線形　$u_{xy}=e^{u}$　　$v_{xy}=0$ wave eq. 線形

B変換　$\begin{cases} v_x-u_x=2e^{\frac{u+v}{2}} \\ v_y+u_y=-e^{\frac{u-v}{2}} \end{cases}$

・$v=0$は解 $\longrightarrow$ $u=-2\log\left(x+\frac{y}{2}\right)$

ex.4 KdV 方程式

非線形　$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0$　　$v_t-6v^2v_x+v_{xxx}=0$ 変形KdV eq.

B変換　$u=v_x+v^2$

Miura変換

$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}+2v\right)\left(v_t-6v^2v_x+v_{xxx}\right)=u_t-6uu_x+u_{xxx}\right)$

ex.1,2,3は Monge-Ampère方程式：$A(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)+Bu_{xx}+Cu_{xy}+Du_{yy}+E=0$

(A,B,C,D,Eは (x,y,u,u_x,u_y) のfct.)

↓

M-A系：$J^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$上2-form

Bäcklund変換!　$Z^6\subset J^1\times J^{1\prime}$

$$\begin{tikzcd} & Z^6 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ J^1:(x,y,u,u_x,u_y)^5 & & J^{1\prime}:(x',y',v,v_{x'},v_{y'})^5 \end{tikzcd}$$

4つの関係式

ex.1なら $\begin{cases} x=x' \\ y=y' \\ u_x=v_{y'} \\ u_y=-v_{x'} \end{cases}$

◎ ツイスター理論

違う幾何構造の双対性を，ダブル・ファイブレーションを通してみるもの

一般に次元が違う

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

○

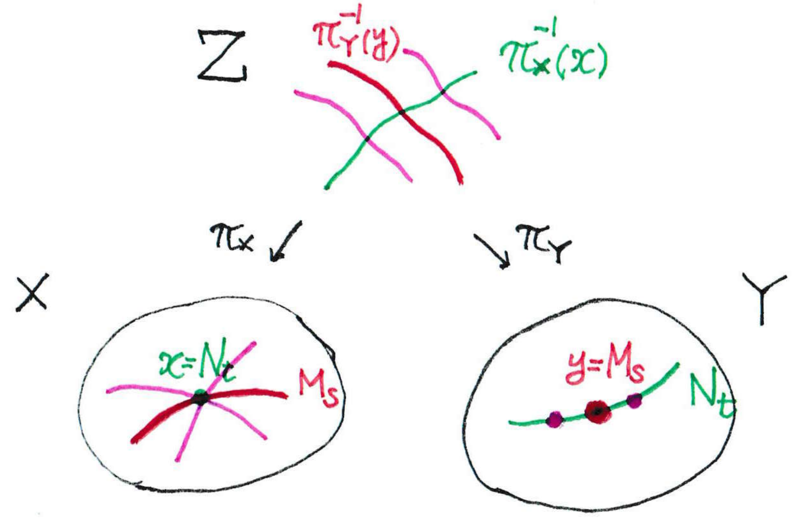
$$X \times Y \supset Z = \{(x, M_s) \mid x \in M_s\} = \{(N_t, y) \mid y \in N_t\}$$

$$N \cong N_t \quad \swarrow \pi_X \qquad \pi_Y \searrow \quad M = M_s$$

$$\{N_t\} = X \overset{\circledast}{\longleftrightarrow} Y = \{M_s\}$$

$$X \supset M_s = \pi_X \circ \pi_Y^{-1}(y) \ (y \in Y)$$

$$Y \supset N_t = \pi_Y \circ \pi_X^{-1}(x) \ (x \in X)$$



Z：XとYの結合空間 (incidence space / correspondence)

$\circledast$：ツイスター変換，ツイスター関係式

持ち上げて (pull back; lift)，ねじって，下へ落とす (push down; projection)

空間の点は豊かな構造 ― 何らかの意味のモジュライ空間

○ $X^n: (x_1,\cdots,x_n)$

$Y^m: (y_1,\cdots,y_m)$

$X\times Y \supset Z^{n+m-l} = \{F_i(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0,\ i=1,\cdots,l\}$

ツイスター関係式

ex. 連立多項式系

$Q_t \cong Q^{m-l} \to Z \subset X\times Y \leftarrow P_s \cong P^{n-l}$

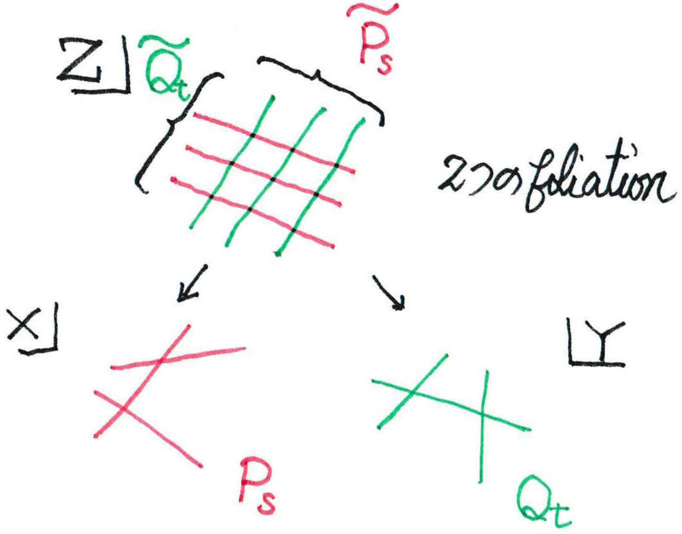
$Z \to X,\quad Z \to Y$

$X \supset P_s = \{F_i(x_1,\cdots,x_n)=0\} \qquad Y \supset Q_t = \{F_i(y_1,\cdots,y_m)=0\}$

$P_s \overset{\pi}{\leftarrow} Y:(y_1,\cdots,y_m) \qquad Q_t \overset{\pi}{\leftarrow} X:(x_1,\cdots,x_n)$

↓↑ 完全解 ↓↑ 完全解

$\mathcal{F}_X$: 微分方程式系 $\overset{☆}{\longleftrightarrow}$ $\mathcal{F}_Y$: 微分方程式系 Bäcklund変換



ex. $F(x,y;t,s,u) = -y+\frac{t}{2}x^2+sx+u=0$

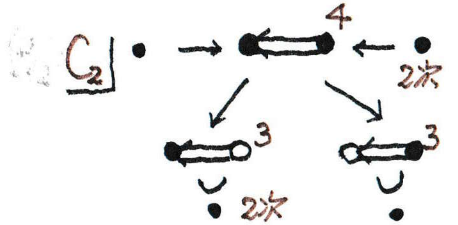
$X:(x,y)$

$Y:(t,s,u)$

(i) $y=\frac{t}{2}x^2+sx+u \quad (x;y)$

(ii) $u=-\frac{x^2}{2}t-xs+y \quad (t,s;u)$

$Z^4 \subset X\times Y$, $Z \to X:(x,y)$, $Z \to Y:(t,s,u)$



(i)から: $y'=tx+s$

$y''=t$

$y'''=0$

(ii)から: $u_t=-\frac{x^2}{2}$

$u_s=-x$

$u_t+\frac{1}{2}u_s^2=0$

Hamilton-Jacobi eq.

判別式: $D=s^2-2tu$ 2次形式→(2,1)型計量

$\begin{cases} t=t \\ s=-xt+y \\ u=\frac{1}{2}x^2t-xy+y \end{cases} \quad \begin{matrix} dt=dt \\ ds=-x\,dt \\ du=\frac{1}{2}x^2dt \end{matrix}$

$\frac{1}{2}ds^2=du\,dt$

ヌル直線

(ii)は ヌル平面

○ 2つのEDS $(X, \mathcal{I}_X)$ と $(Y, \mathcal{I}_Y)$ の間の Bäcklund変換 とは,
EDS $(Z, \mathcal{I}_Z; \pi_X, \pi_Y)$ であって,

- $\pi_X : Z \longrightarrow X$, $\pi_Y : Z \longrightarrow Y$: double fibration
- $\mathcal{I}_Z = \{J_X, \pi_X^* \mathcal{I}_X\} = \{J_Y, \pi_Y^* \mathcal{I}_Y\}$: integrable extension

$$
\begin{tikzcd}
 & (Z, \mathcal{I}_Z) \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
(X, \mathcal{I}_X) & & (Y, \mathcal{I}_Y)
\end{tikzcd}
$$

- $(M, \mathcal{I})$ が 外微分式系(EDS) であるとは,
  - M : smooth manifold
  - $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$: 微分イデアル (代数イデアルであって, 外微分で closed)

cf. 代数方程式 ↔ 多項式環のイデアル
　微分方程式 ↔ 微分形式の微分イデアル

cf. • 積分多様体
　• 同型

- EDS $(N, \mathcal{J})$ が EDS $(M, \mathcal{I})$ の (rank k) integrable extension であるとは,
  $\exists \pi : N \longrightarrow M$: submersion s.t.
  $\mathcal{J} = \{J, \pi^* \mathcal{I}\}$, $J \subset \Gamma(T^*N)$, $J = \langle \theta_1, \cdots, \theta_k \rangle$
  1-form, πのfiber　　$k = \mathrm{rk}\, J =$ fiberの次元

- $(X, \mathcal{I}_X)$ と $(Y, \mathcal{I}_Y)$ が同型のとき,
  $(Z, \mathcal{I}_Z; \pi_X, \pi_Y)$ は自己Bäcklund変換

◎ ツイスター理論と線形化との関連

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ {}^{\pi_X}\swarrow & & \searrow^{\pi_Y} \\ X & & Y \\ D_X & & D_Y \end{array}$$

$E\subset TZ,\ E=\underbrace{\mathrm{Ker}\,\pi_{X*}}_{E_Y}\oplus\underbrace{\mathrm{Ker}\,\pi_{Y*}}_{E_X}$

- X (or Y) から出発

↳ (ある)延長で, $\begin{array}{c} Z \\ \pi_X \downarrow \\ X \end{array}$ $E=\mathrm{Ker}\,\pi_{X*}\oplus\boxed{?}$

ファイバー方向 c.i.　　水平方向をどう決めるか

- 特性方向
  コーン場なら,母線方向
- パス幾何で指定,部分接続

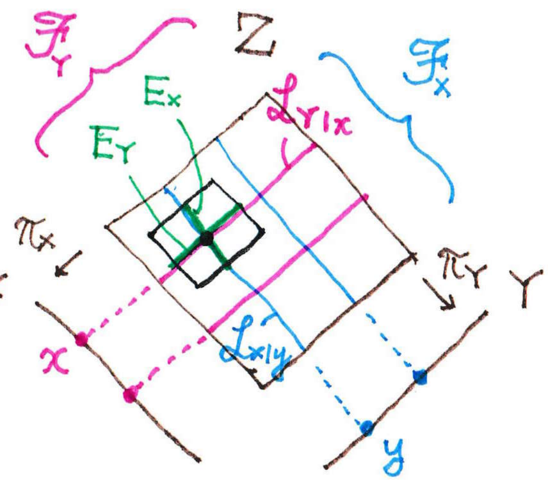
- Z から出発

↳ 擬積構造 pseudo-product　$E=E_X\oplus E_Y\subset TZ$

E_X: c.i.　E_Y: c.i.

$[\mathcal{E}_X,\mathcal{E}_Y]$: bracket generating

- ダブル・ファイブレーションができる



$$\mathcal{L}_Y \cong \mathcal{L}_{Y|x} \longrightarrow Z \longleftarrow \mathcal{L}_X \cong \mathcal{L}_{X|y}$$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\ X = Z/\mathcal{F}_Y & & Y = Z/\mathcal{F}_X \end{tikzcd}$$

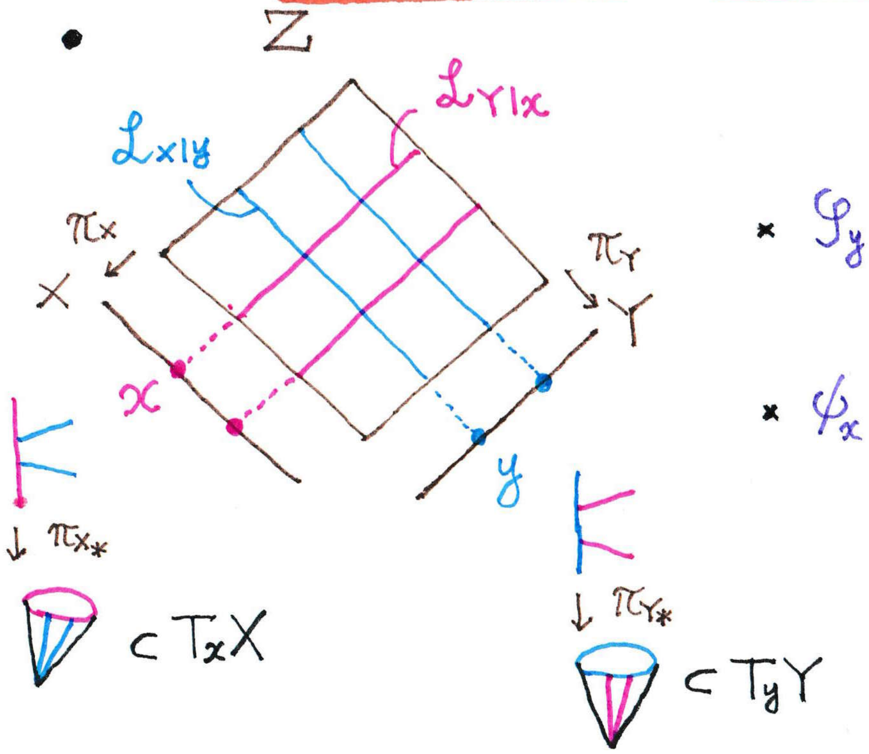
$$\cup \qquad\qquad \cup$$

$L_X = \pi_X(\mathcal{L}_X)$ $\qquad$ $L_Y = \pi_Y(\mathcal{L}_Y)$

$D_X \equiv E \pmod{E_Y}$ の filtration $\qquad$ $D_Y \equiv E \pmod{E_X}$ の filtration

Xの内在幾何 $\qquad$ Yの内在幾何

•



× $\varphi_y : \mathcal{L}_{X|y} \longrightarrow Gr(\dim \mathcal{L}_X, \underset{\hat{T}_yY}{D_{Y|y}})$ $\quad$ $\mathcal{L}_{X|y}, L_X$の外在幾何

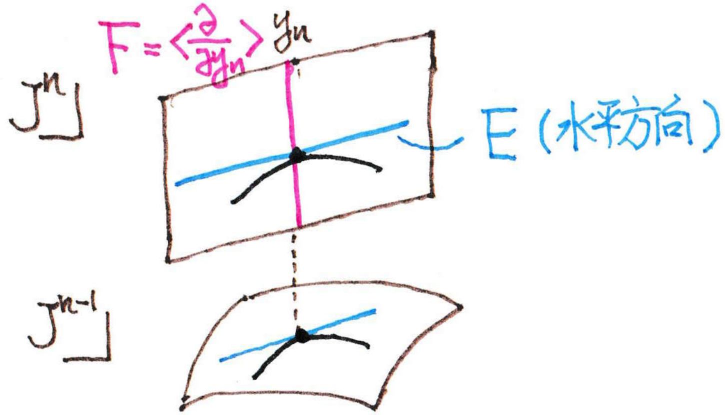
($y\in Y$を動かして, Yの幾何構造
$\{L_X\}$のモジュライ

× $\psi_x : \mathcal{L}_{Y|x} \longrightarrow Gr(\dim \mathcal{L}_Y, \underset{\hat{T}_xX}{D_{X|x}})$ $\quad$ $\mathcal{L}_{Y|x}, L_Y$の外在幾何

($x\in X$を動かして, Xの幾何構造
$\{L_Y\}$のモジュライ

例) ○ (正規形)非線形 ODE

$$y^{(n+1)} = f(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$$



$$\begin{array}{ll}
(J^{n+1}) & \\
\downarrow & \\
J^n & (\underset{}{x},y,\underset{y_1}{y'},\cdots,\underset{y_{n-1}}{y^{(n-1)}},\underset{y_n}{y^{(n)}}) \\
{\scriptstyle y_n}\downarrow & \\
J^{n-1} & (x,y,\underset{y_1}{y'},\cdots,\underset{y_{n-1}}{y^{(n-1)}}) \\
\downarrow & \\
\vdots & \\
\downarrow & \\
J^1 & (x,y,\underset{y_1}{y'}) \\
{\scriptstyle y_1}\downarrow & \\
J^0 & (x,y) \\
{\scriptstyle y=y_0}\downarrow & \\
M & (x)
\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} dy_{n-1}-y_n dx \\ dy_{n-2}-y_{n-1}dx \\ \vdots \\ dy_1 - y_2 dx \\ dy - y_1 dx \end{array}\right. \xrightarrow{\text{Ann.}} D=\left\langle \frac{\partial}{\partial x}+y_1\frac{\partial}{\partial y}+y_2\frac{\partial}{\partial y_1}+\cdots+y_n\frac{\partial}{\partial y_{n-1}},\ \frac{\partial}{\partial y_n}\right\rangle \subset TJ^n$$

rk2

- $E=\langle X_f\rangle$ $\quad \mathcal{E}$

  $X_f=\frac{\partial}{\partial x}+y_1\frac{\partial}{\partial y}+\cdots+y_n\frac{\partial}{\partial y_{n-1}}+f\frac{\partial}{\partial y_n}$
- $F=\langle \frac{\partial}{\partial y_n}\rangle$ $\quad \mathcal{F}$

  $\frac{\partial}{\partial y_n} =: Y_n$
- $D=E\oplus F$ $\quad \mathcal{D}=\mathcal{D}^0$ $\quad$ rk2

$$\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\frac{dx}{dx}}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{dy}{dx}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{dy_1}{dx}\frac{\partial}{\partial y_1}+\cdots+\frac{dy_{n-1}}{dx}\frac{\partial}{\partial y_{n-1}}+\frac{dy_n}{dx}\frac{\partial}{\partial y_n}=X_f \text{ より,}$$

$$x'=1,\ y'=y_1,\ y_1'=y_2,\cdots,\ y_{n-1}'=y_n,\ y_n'=f \to y^{(n+1)}=f$$

$$[X_f,Y_n]=[X_f,\frac{\partial}{\partial y_n}]=-\frac{\partial}{\partial y_{n-1}}-f_{y_n}\frac{\partial}{\partial y_n}=:Y_{n-1} \to \mathcal{D}^1:=[\mathcal{D},\mathcal{D}]=[X_f,\mathcal{D}]=\langle X_f,Y_n,Y_{n-1}\rangle$$

$$[X_f,Y_{n-1}]=\frac{\partial}{\partial y_{n-2}}+\cdots=:Y_{n-2} \longrightarrow \mathcal{D}^2:=[\mathcal{D},\mathcal{D}^1]=[X_f,\mathcal{D}^1]=\langle X_f,Y_n,Y_{n-1},Y_{n-2}\rangle$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{D}^{i+1}:=[\mathcal{D},\mathcal{D}^i]=[X_f,\mathcal{D}^i] \qquad \mathrm{rk}\,\mathcal{D}^i=i+2 \quad (i=0,1,\cdots,n)$$

$$TJ^n=D^n\underbrace{\supset}_{1}D^{n-1}\underbrace{\supset}_{1}\cdots\underbrace{\supset}_{1}D^2\underbrace{\supset}_{1}D^1\underbrace{\supset}_{1}D^0=D\underbrace{\supset}_{2}\{0\}$$

○ 線形化ー線形ODE

$$h^{(n+1)} = f_y \cdot h + f_{y_1} \cdot h' + \cdots + f_{y_{n-1}} \cdot h^{(n-1)} + f_{y_n} \cdot h^{(n)}$$

$y^{(n+1)} = f$ の解を $y_0(x)$

$y_\varepsilon(x) := y_0(x) + \varepsilon h(x)$ が解, mod $o(\varepsilon)$

$y_\varepsilon^{(n+1)} = y_0^{(n+1)} + \varepsilon h^{(n+1)} = f(x, y_\varepsilon, y_\varepsilon', \cdots, y_\varepsilon^{(n)})$

$$\mathcal{D}^i = \langle X_f, \underset{F}{Y_n}, \underset{\substack{\| \\ Y_{n-1} \\ ad_{X_f}F}}{[X_f, Y_n]}, \underset{\substack{\| \\ Y_{n-2} \\ ad^2_{X_f}F}}{[X_f,[X_f, Y_n]]}, \cdots, \underset{\substack{\| \\ Y_{n-i} \\ ad^i_{X_f}F}}{[X_f,[X_f,[\cdots,[X_f, Y_n]]\cdots]]} \rangle$$

$\mathcal{D}^0 = \mathcal{D} = \langle X_f, F \rangle$, $\mathcal{D}^n = TJ^n = \langle X_f, F, ad_{X_f}F, ad^2_{X_f}F, \cdots, ad^n_{X_f}F \rangle$

mod X_f

$$ad^{n+1}_{X_f} F = \sum_{i=0}^{n} p_i \, ad^i_{X_f} F \mod X_f$$

線形ODE

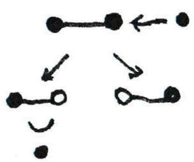
$$\begin{cases} \begin{array}{ccc} & \underset{n+2}{J^n} & \\ \swarrow & & \searrow^{P^1, X_f} \\ \underset{n+1}{J^{n-1}} & & S^{n+1} = J^n / X_f \\ \cup & & \text{解空間} \\ P^1 = y_0(x) & & \end{array} \end{cases}$$

$\dot{\varphi} : P^1 \longrightarrow P^n = P(T_{y_0} S)$

外在幾何

・ $n=1$)

$$\begin{array}{ccc} & \underset{3}{J^1} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \underset{2}{J_0} & & S^2 \end{array}$$



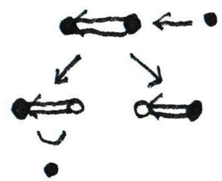
A_2

$y'' = f(x, y, y')$

$y'' = p_1 y' + p_0 y$ $\quad \varphi : P^1 \to P^1$

・ $n=2$)

$$\begin{array}{ccc} & \underset{4}{J^2} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \underset{3}{J^1} & & S^3 \end{array}$$



C_2

$y''' = f(x, y, y', y'')$

$y''' = p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y$ $\quad \varphi : P^1 \to P^2$

○ 不変量について

1) • $\underbrace{h^{(n+1)} + \underbrace{p_n(x)}_{0にできる} h^{(n)}}_{} + p_{n-1}(x) h^{(n)} + \cdots + p_1(x) h' + p_0(x) h = 0$ $\quad ((x, y) \longmapsto (\lambda(x), \mu(x) y))$

3階以上 0にできる

$\Theta_3, \cdots, \Theta_{n+1}$: Wilcyznski 不変量

× $\Theta_3 = \cdots = \Theta_{n+1} = 0 \Longleftrightarrow h^{(n+1)} = 0 \Leftrightarrow P^1 \to P^n$ は rational normal curve

• $y^{(n+1)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n)})$ 3階以上, 接触変換 (cf. 2階, 点変換) Doubrov

線形化

generalized Wilcyznski 不変量 $W_3, \cdots, W_{n+1}$

× $W_3 = \cdots = W_{n+1} = 0 \Rightarrow \mathcal{S}$ 上に $GL(2)$-構造

× $W_3 = \cdots = W_{n+1} = 0 + \boxed{} \Leftrightarrow y^{(n+1)} = 0$

$$\begin{tikzcd} & J^n \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ J^{n-1} & & \mathcal{S}^{n+1} \end{tikzcd}$$

2) • $y''' = f(x, y, y', y'')$

2つの不変量 I_1, I_2 をもつ, I_1 を Wünschmann 不変量

× $I_1 = 0 \Leftrightarrow$ 解空間は, 3次元共形(2,1)型計量をもつ $\Leftarrow$ は Fritelli-Kozameh-Newman

× $I_1 = I_2 = 0 \Leftrightarrow y''' = 0$

$$\begin{tikzcd} & J^2(1,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ J^1(1,1) & & \mathcal{S}^3 \end{tikzcd}$$

• $\begin{cases} u_{xx} = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}) \\ u_{yy} = g(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}) \end{cases}$

2つの不変量 I_1, I_2 をもつ. I_1 を Wünschmann 不変量

× $I_1 = 0 \Leftrightarrow$ 解空間は, 4次元共形(2,2)型計量をもつ

× $I_1 = I_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_{xx} = 0 \\ u_{yy} = 0 \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} & J^2(2,1)^8 \arrow[d, phantom, "\cup"] & \\ & Z^6 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ J^1(2,1)^5 & & \mathcal{S}^4 \end{tikzcd}$$

◎ 低階数のLie代数から

$rk = 1, 2, 3$

● 線形DE

(i) $sl(2) \curvearrowright U^2$

- $\overset{\bullet}{1}$ $V = S^1U = U$ (2次元) $\varphi : P^1 = P(U) \longrightarrow P^1 = P(V)$ $y'' = 0$ $(1, x)$
- $\overset{\bullet}{2}$ $V = S^2U$ (3次元) $\varphi : P^1 = P(U) \longrightarrow P^2 = P(V)$ $y''' = 0$ $(1, x, x^2)$
- $\overset{\bullet}{3}$ $V = S^3U$ (4次元) $\varphi : P^1 = P(U) \longrightarrow P^3 = P(V)$ $y^{(4)} = 0$ $(1, x, x^2, x^3)$

(ii)

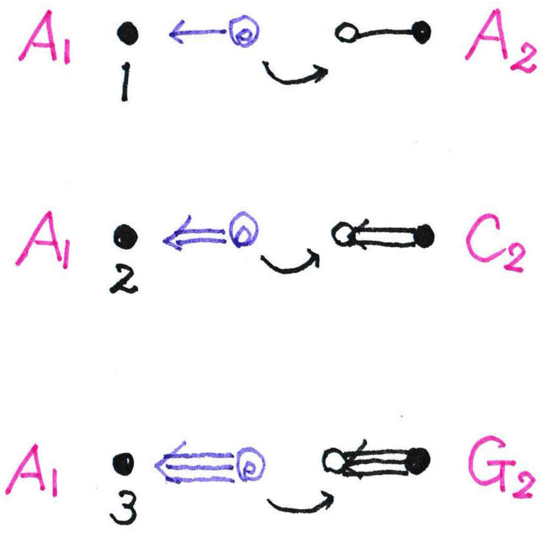
- $\underset{1}{\bullet} \times \underset{1}{\bullet}$ $o(2,2) \curvearrowright V = U^4 = \mathbb{R}^4$; $o(2,2) = sl(2) \oplus sl(2) \curvearrowright V = U^2 \otimes U^2 = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ (2次)テンソル積
  $\varphi : Q^2 = P^1 \times P^1 \longrightarrow P^3 = P(V)$ Segreうめこみ
  $\begin{cases} u_{xx} = 0 \\ u_{yy} = 0 \end{cases}$ $(1, x, y, xy)$

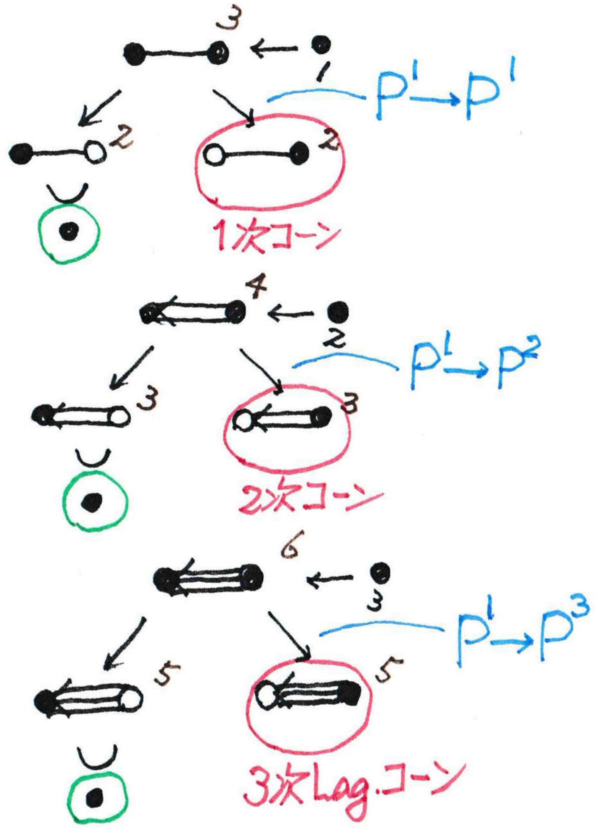
- $\underset{2}{\bullet}$—$\underset{0}{\circ}$ $sl(3) \curvearrowright V = S^2U^3 = \mathbb{R}^6$ (2次)対称積
  $\varphi : P^2 = P(U) \longrightarrow P^5 = P(V)$ Veroneseうめこみ
  $\begin{cases} u_{xxx} = 0 \\ u_{xxy} = 0 \\ u_{xyy} = 0 \\ u_{yyy} = 0 \end{cases}$ $(1, x, y, x^2, xy, y^2)$

- $\underset{0}{\circ} \Leftarrow \underset{1}{\bullet}$ $sp(4) \curvearrowright \Lambda^2 U^4 = \underset{5}{V} \oplus \underset{1}{\langle \Omega \rangle}$ (2次)交代積
  $\varphi : LG(4) = S^2 \times S^1 \longrightarrow P^4 = P(V)$ sub-Plückerうめこみ
  $\begin{cases} u_{yy} = u_{yz} = u_{zz} = u_{zz} = 0 \\ u_{xx} + 2u_{yz} = 0 \end{cases}$
  $(1, x, y, z, x^2 - yz)$

• 非線形DEへ

(i)





$y'' = f(x, y, y')$

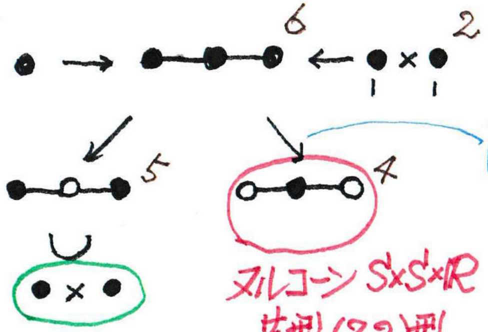
$y''' = f(x, y, y', y'')$

$$\begin{cases} v' = (y'')^2 \\ y^{(4)} = f(x, y, y', y'', y''') \end{cases}$$

(ii)

$A_1 \times A_1 = D_2$

$A_3 = D_3$



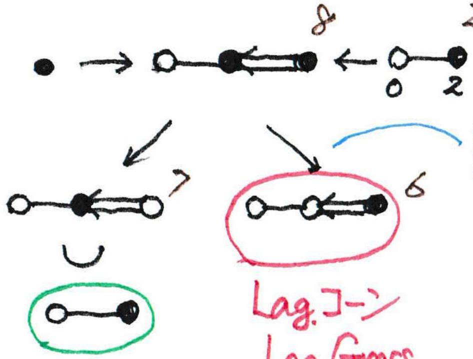
ヌルコーン $S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}$
尖型(2,2)型

$P^1 \times P^1 \to P^3$

$$\begin{cases} u_{xx} = f(x,y,u,u_x,u_y,\underline{u_{xy}}) \\ u_{yy} = g(x,y,u,u_x,u_y,\underline{u_{xy}}) \end{cases}$$

A_2

C_3

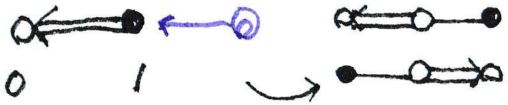


Lag.コーン
Lag.Grass

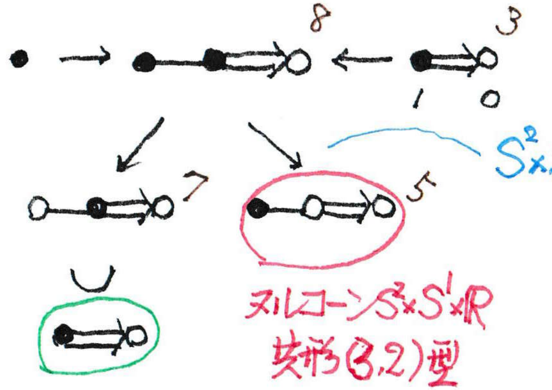
$P^2 \to P^5$

$$\begin{cases} u_{xxx} = f_1(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}) \\ u_{xxy} = f_2(\quad 〃 \quad) \\ u_{xyy} = f_3(\quad 〃 \quad) \\ u_{yyy} = f_4(\quad 〃 \quad) \end{cases}$$

$B_2 = C_2$



B_3



ヌルコーン $S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$
尖形(3,2)型

$S^2 \times S^1 \to P^4$

$$\begin{cases} u_{yy} = f_1(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z,\underline{u_{yz}}) \\ u_{yx} = f_2(\quad 〃 \quad) \\ u_{zx} = f_3(\quad 〃 \quad) \\ u_{zz} = f_4(\quad 〃 \quad) \\ u_{xx} = f_5(\quad 〃 \quad) \end{cases}$$

Bäcklund 変換

cf. 線形DEのBäcklund変換

cf. 線形DE ⟷ {関数}

非線形DE ⟷ {部分多様体}

(i)

• $y''=0$

$y=ax+b \rightarrow b=-xa+y$

$b'=-x$

$b''=0$

Sol $\left(\begin{array}{l} (a;b) \\ J^0_{II}(1,1) \end{array} \right.$

$J^2(1,1) \downarrow J^1_I(1,1) = J^1_{II}(1,1)^3$

$J^1_I(1,1) \to J^0_I(1,1)^2$ $(x;y)$

$J^1_{II}(1,1) \to J^0_{II}(1,1)^2$ $(a;b)$

• $y'''=0$

$y=ax^2+bx+c \rightarrow c=-x^2a-xb+y$

$c_a=-x^2$

$c_b=-x$

$c_a+(c_b)^2=0$

Sol $\left(\begin{array}{l} (a;b;c) \\ J^0_{II}(2,1) \end{array} \right.$

$J^3_I(1,1) \downarrow J^2_I(1,1)^4 = Z^4 \subset J^1_{II}(2,1)^5$

$J^2_I(1,1) \to J^1_I(1,1)^3 \to J^0_I(1,1)^2$ $(x;y)$

$Z^4 \to J^0_{II}(2,1)^3$ $(a,b;c)$

• $\begin{cases} v=(y'')^2 \\ y^{(4)}=0 \end{cases}$

$y=ax^3+bx^2+c$

$v=4(3a^2x^3+3abx^2+b^2x+h)$

$\rightarrow h=\frac{1}{4}(-3x^3a^2-3x^2ab-xb^2)$

$h_{aa}=-6x^3$

$h_{ab}=-3x^2$

$h_{bb}=-2x$

$\begin{cases} h_{aa}=-\frac{3}{4}(h_{bb})^2 \\ h_{ab}=-\frac{1}{8}(h_{bb})^2 \end{cases}$

Sol $\left(\begin{array}{l} (a,b,c,e;h) \\ J^1_{II}(2,1) \end{array} \right.$

$J^2_I(1,2)^7 \supset Z^6 = Z'^6 \subset J^2_{II}(2,1)^8$

$Z^6 \to J^1_I(1,2)^5$ (2,3,5)分布 $\left(\begin{array}{l} \omega_1=dy-y'dx \\ \omega_2=dv-v'dx \end{array} \right.$

$J^1_I(1,2) \to J^0_I(1,2)^3$ $(x;y,v)$

$Z'^6 \to J^1_{II}(2,1)^5$ $(a,b,c,e;h)$

$(\mathrm{ii})''$

- $\begin{cases} u_{xx}=0 \\ u_{yy}=0 \end{cases}$ $\quad u=axy+bx+cy+h \quad$ $\mathrm{Sol}\begin{pmatrix}(a,b,c;h)\\ J_{\mathrm{II}}^{0}(3,1)\end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \quad h=-xya-xb-yc+u$$

$$h_a=-xy$$
$$h_b=-x$$
$$h_c=-y$$
$$h_a+h_b\cdot h_c=0$$

$$\begin{tikzcd}
J_{\mathrm{I}}^{2}(2,1)^{8} & & J_{\mathrm{II}}^{1}(3,1)^{7} \\
& Z^{6}=Z'^{6} \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
J_{\mathrm{I}}^{1}(2,1)^{5} \arrow[d] & & J_{\mathrm{II}}^{0}(3,1)^{4} \\
J_{\mathrm{I}}^{0}(2,1)^{3} & & (a,b,c;h) \\
(x,y;u) & &
\end{tikzcd}$$

- $\begin{cases} u_{xxx}=0 \\ u_{xxy}=0 \\ u_{xyy}=0 \\ u_{yyy}=0 \end{cases}$ $\quad u=ax^2+bxy+cy^2+ex+fy+h \quad$ $\mathrm{Sol}\begin{pmatrix}(a,b,c,e,f;h)\\ J_{\mathrm{II}}^{0}(5,1)\end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \quad h=-x^2a-xyb-y^2c-xe-yf+u$$

$$h_a=-x^2$$
$$h_b=-xy$$
$$h_c=-y^2$$
$$h_e=-x$$
$$h_f=-y$$

$$\begin{cases} h_a+(h_e)^2=0 \\ h_b+h_e\cdot h_f=0 \\ h_c+(h_f)^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
J_{\mathrm{I}}^{3}(2,1) \arrow[d] & & J_{\mathrm{II}}^{1}(5,1)^{11} \\
J_{\mathrm{I}}^{2}(2,1)^{8}=Z^{8} \arrow[urr, hook] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
J_{\mathrm{I}}^{1}(2,1)^{5} \arrow[d] & & J_{\mathrm{II}}^{0}(5,1)^{6} \\
J_{\mathrm{I}}^{0}(2,1)^{3} & & (a,b,c,e,f;h) \\
(x,y;u) & &
\end{tikzcd}$$