外在幾何，線形微分方程式系
におけるツイスター理論

待田　芳徳　（森本　徹，Boris Doubrov）

三位一体

対称性（群）

$\swarrow$ $\searrow$

図形（幾何） $\longleftrightarrow$ 式（方程式）

$$
\begin{tikzcd}
 & \underline{\text{Lie代数}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\underline{\text{内在幾何}} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \underline{\text{非線形微分方程式}}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \underline{\text{Lie代数表現}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\underline{\text{外在幾何}} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \underline{\text{線形微分方程式}}
\end{tikzcd}
$$

- $\varphi : M \longrightarrow N = L/L^0$ Kleinの立場

M が接触多様体のとき？

外在幾何におけるツイスター理論とは？

- $\varphi_1 : M_1 \longrightarrow L/L^0 \ \sim \ \varphi_2 : M_2 \longrightarrow L/L^0$

$\Longleftrightarrow$

$$
\begin{array}{ccc}
M_1 & \xrightarrow[\varphi_1]{\hspace{2cm}} & L/L^0 \\
{\scriptstyle \exists h:\text{diffeo}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exists \Lambda_a\,(a\in L)} \\
M_2 & \xrightarrow[\varphi_2]{\hspace{2cm}} & L/L^0
\end{array}
$$

局所同値問題？　　不変量？

外在幾何 $\longleftrightarrow$ 線形微分方程式 (従来のもの)

○ Grassmann 多様体 (射影空間) へのうめこみから，線形微分方程式へ

$\varphi : M^n \longrightarrow \mathrm{Gr}(m, V^*)$ given

$$
\begin{array}{ccc}
\cdot\ \varphi^* E & & E \supset E_W = W^*(\subset V) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
M & \longrightarrow & \mathrm{Gr}(m, V^*) \ni W(\subset V^*)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccl}
V & \longrightarrow & S = \iota(V) \subset \Gamma(\varphi^* E) \subset \Gamma(E) \\
\alpha & \longmapsto & \alpha(W) = \alpha|_W
\end{array}
$$

V を E, $\varphi^* E$ の section

- $\sigma \in \Gamma(E)$ から， $j_x^k(\sigma) \in J^k(E) \quad (x \in M)$
  $$j_x^k : S = \iota(V) \longrightarrow R_x^k \subset J^k(\varphi^* E)$$
  十分大きな k で単射

- $$\begin{array}{c} R = R^k = \bigcup_{x \in M} R_x^k \subset J^k(E) \\ \downarrow \\ M \end{array}$$
  有限型，積分可能な線形微分方程式

  解空間は $S \cong V$

○ 線形微分方程式から，Grassmann 多様体 (射影空間) へのうめこみへ

$$\begin{array}{l} R \subset J^k(E) \\ \quad\downarrow \\ \quad M \end{array}$$ given

s.t. $E \longrightarrow M$ rk$=m$, section は未知関数の空間

・ $S = Sol(R) \cong V$: R の解空間，有限次元 vector 空間

・ $S_x = Sol(R)_x = \{\sigma \in Sol(R) | \sigma(x) = 0\}$

$$0 \to Sol(R)_x \to Sol(R) \to E_x \to 0 \text{ (exact)}$$

$$m = \dim E_x = \mathrm{codim} Sol(R)_x \quad (x \in M)$$

・ $\varphi : M \longrightarrow \mathrm{Gr}(m, V^*)$ Grassmann 多様体へのうめこみ

$$x \mapsto E_x = (Sol(R)_x)^\perp$$

Examples

- Veronese うめこみ　　対称積

$U = \mathbb{R}^2$, $V = S^k U = \mathbb{R}^{k+1}$, $P(U) = P^1$, Gr$(1, V) = P^k$

$\varphi : M = P^1 \longrightarrow P^k \qquad (t) \mapsto [1, t, \cdots, t^k]$

$\updownarrow$

$y^{(k+1)}(t) = 0 \qquad y : \varphi^* E$ の section

- Segre うめこみ　　テンソル積

$U = \mathbb{R}^2$, $V = U \otimes U = \mathbb{R}^4$, $P(U) \times P(U) = P^1 \times P^1$, Gr$(1, V) = P^3$

$\varphi : M = P^1 \times P^1 \longrightarrow P^3 \qquad (t, s) \mapsto [1, t, s, ts]$

$\updownarrow$

$$\begin{cases} u_{xx} = 0 \\ u_{yy} = 0 \end{cases} \qquad u : \varphi^* E \text{ の section}$$

- Plückerうめこみ　交代積

$$U=\mathbb{R}^4,\ V=\bigwedge^2 U=\mathbb{R}^6,\ \mathrm{Gr}(1,V)=P^5$$

$$\varphi : M=\mathrm{Gr}(2,U)\longrightarrow P^5$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & x & y\\ 0 & 1 & z & w\end{pmatrix}\mapsto$$

$$\left[\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & x\\ 0 & z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & y\\ 0 & w\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & x\\ 1 & z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & y\\ 1 & w\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x & y\\ z & w\end{vmatrix}\right]$$

$$=[1,z,w,-x,-y,xw-yz]$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{cases}u_{xx}=u_{yy}=u_{zz}=u_{ww}=0\\ u_{xy}=u_{xz}=u_{yw}=u_{zw}=0\\ u_{xw}-u_{yz}=0\end{cases}$$

⊙ 随伴うめこみ

$U = \mathbb{R}^3$, $V = sl(3) = \mathbb{R}^8$, $P(U) = P^2$, $\mathrm{Gr}(1, V) = P^7$

$\varphi : M^3 = P(T^* P^2) \longrightarrow P^7$

接触多様体 with bi-Lagrangian　　$SL(3)$ の随伴表現の最高ウエイト軌道

$\updownarrow$

$$\begin{cases} X^2 u = 0 \\ Y^2 u = 0 \end{cases}$$

$[X, Y] = Z, \quad X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} y \frac{\partial}{\partial z}, Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} x \frac{\partial}{\partial z}$

準備 1. 次数つき表現

(1) $(\mathfrak{g}, V)$: $\mathfrak{g}$ の V への次数つき表現

- $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$: 次数つきLie代数
  - i) $\dim \mathfrak{g}_- < \infty \quad (\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{p<0} \mathfrak{g}_p)$
  - ii) $[\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q] \subset \mathfrak{g}_{p+q}$
- $V = \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} V_q$: 次数つきベクトル空間
  - i) $\dim V_q < \infty$
  - ii) $\exists k_{-1}$(max) s.t. $V_q = 0 \ (q < k_{-1})$
- $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$: $\mathfrak{g}$ の V への表現
  - i) $\rho(\mathfrak{g}_p)V_q \subset V_{p+q}$
  - ii) $\exists k_0$(min) s.t. $\rho(\mathfrak{g}_-)v_j = 0 \Rightarrow$
    $v_j = 0 \ \ (k_0 < j) \quad (v_j \in V_j)$

$$\cdot\ \underset{\displaystyle G}{\overset{\displaystyle\updownarrow}{\mathfrak{g}}} = \underbrace{\mathfrak{g}_{-\mu} \oplus \cdots \oplus \underline{\underline{\mathfrak{g}_{-1}}}}_{\displaystyle \mathfrak{g}_-} \oplus \underbrace{\underline{\mathfrak{g}_0} \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_\mu}_{\displaystyle \mathfrak{g}^0 \leftrightarrow G^0}$$

$M = G/G^0$ 旗多様体 —独立変数

$\mathfrak{g}_{-1} \rightsquigarrow D \subset TM$ 　G-不変分布

$\mathfrak{g}_0 \rightsquigarrow G_0$ 　G_0 構造

$$\cdot\ V = \underline{V_{k_{-1}} \oplus \cdots \oplus V_{k_0}} \oplus \underline{V_{k_0+1} \oplus \cdots \oplus V_{k_1}}$$
$$\oplus\ \underline{V_{k_1+1} \oplus \cdots \oplus V_{k_2}}$$

解空間 ＝ 未知関数 ＋シンボル ＋ 延長

$$\cdot\ \mathfrak{g} \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \curvearrowright V \left[\begin{array}{c} 2 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

消滅　生成　　励起–微分　真空–未知関数

(2) 次数つきLie代数コホモロジー $H_r^p(\mathfrak{g}_-, V)$

- $\cdots \to \mathrm{Hom}(\bigwedge^{p-1} \mathfrak{g}_-, V)_r \to \mathrm{Hom}(\bigwedge^{p} \mathfrak{g}_-, V)_r \to \mathrm{Hom}(\bigwedge^{p+1} \mathfrak{g}_-, V)_r \to \cdots$

$\alpha(\mathfrak{g}_{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{g}_{a_p}) = V_{a_1+\cdots a_p+\underline{r}} \quad (a_1, \cdots, a_p < 0)$

$\partial\alpha(X_1, \cdots, X_{p+1}) =$

$\sum(-1)^{i-1}\rho(X_i)\alpha(X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, X_{p+1}) +$

$\sum(-1)^{i+j}\alpha([X_i, X_j], X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, \check{X}_j, \cdots, X_{p+1})$

· $H_r^p(\mathfrak{g}_-, V)$, $H^p(\mathfrak{g}_-, V) = \bigoplus_r H_r^p(\mathfrak{g}_-, V)$

- $0 \to V_r \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_-, V)_r \to \mathrm{Hom}(\bigwedge^2 \mathfrak{g}_-, V)_r \to \cdots$

$$\partial\alpha(X) = \rho(X)\alpha \quad (\alpha \in V_r)$$
$$\begin{aligned}\partial\alpha(X_1, X_2) &= \rho(X_1)\alpha(X_2) - \rho(X_2)\alpha(X_1)\\ &\quad -\alpha([X_1, X_2]) \quad (\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_-, V)_r)\end{aligned}$$

· $H_r^0(\mathfrak{g}_-, V) = 0 \quad r > k_0$

· $H_r^1(\mathfrak{g}_-, V) = 0 \quad r > k_1$

$H^1(\mathfrak{g}_-, V) = \bigoplus_r H^1_r(\mathfrak{g}_-, V)$

微分方程式系のシンボルの定義方程式を与える！

(3) Kostantの定理

$$H^i(\mathfrak{g}_-, V(\lambda)) =$$
$$\bigoplus_{w \in W^0, l(w)=i} V^{\mathfrak{g}_0}(w(\lambda - \rho) + \rho)$$

$V(\lambda)$：最低ウエイトλの$\mathfrak{g}$の既約表現

$W^0 = \{w \in W \mid w(\Delta_-) \cap \Delta_+ \subset \Delta(\mathfrak{g}_-)\}$

$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$

$V^{\mathfrak{g}_0}(w(\lambda - \rho) + \rho)$：最低ウエイト$w(\lambda - \rho) + \rho$の既約 $\mathfrak{g}_0$-module

ex. $H^1(\mathfrak{g}_-, \hat{\mathfrak{g}}^\perp)$, $H^2(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$

準備 2. フィルターつき多様体

1) $(M, \mathfrak{f})$: (接) フィルターつき多様体　(分布列)

$\Longleftrightarrow$ i) $\mathfrak{f} = \{\mathfrak{f}^p\}_{p \in \mathbb{Z}_{\leq 0}}, \quad \mathfrak{f}^p \subset TM$

ii) $TM = \mathfrak{f}^{-\mu} \supset \cdots \supset \mathfrak{f}^p \supset \mathfrak{f}^{p+1} \supset \cdots$
$\supset \mathfrak{f}^{-1} \supset \mathfrak{f}^0 = 0$

iii) $[\underline{\mathfrak{f}}^p, \underline{\mathfrak{f}}^q] \subset \underline{\mathfrak{f}}^{p+q}$

2) $\mathrm{gr}\mathfrak{f}_x := \bigoplus_{p<0} \mathrm{gr}_p \mathfrak{f}_x, \quad \mathrm{gr}_p \mathfrak{f}_x := \mathfrak{f}_x^p / \mathfrak{f}_x^{p+1}$

$x \in M$ でのシンボル代数

$[\mathrm{gr}_p \mathfrak{f}_x, \mathrm{gr}_q \mathfrak{f}_x] \subset \mathrm{gr}_{p+q} \mathfrak{f}_x$

べき零次数つき Lie 代数

3) · (自明)　$TM = \mathfrak{f}^{-1} \supset \mathfrak{f}^0 = 0$ 可換Lie代数

· (接触構造)　$TM = \mathfrak{f}^{-2} \supset \mathfrak{f}^{-1} \supset \mathfrak{f}^0 = 0$ Heisenberg Lie代数

準備 3. 旗多様体

1) V : ベクトル空間

$\phi = \{\phi\}_{q\in\mathbb{Z}}$: V の filtration

V の subsp. の descending: $V \supset \cdots \supset \phi^q \supset \phi^{q+1} \supset \cdots$

$\mathrm{Flag}(V) = \{\phi = \{\phi^q\}\}$

$\mathrm{Flag}(V, \phi) = \{\varphi | \varphi \sim \phi\} = \mathrm{GL}(V)/\phi^0\mathrm{GL}(V)$

$\exists a \in \mathrm{GL}(V)$ s.t. $\varphi = a\phi$ $\quad$ ϕ の $\mathrm{GL}(V)$-orbit

2) $\phi^p\mathrm{GL}(V)$ $(p \geq 0)$ p だけシフト

$$\mathrm{GL}(V) \supset \phi^0\mathrm{GL}(V) \supset \phi^1\mathrm{GL}(V) \supset \cdots$$

$$\phi^p\mathfrak{gl}(V) := \{A \in \mathfrak{gl}(V) | A\phi^q \subset \phi^{q+p}\ (\forall q)\}$$

$$[\phi^p\mathfrak{gl}(V), \phi^q\mathfrak{gl}(V)] \subset \phi^{p+q}\mathfrak{gl}(V)$$

$L \subset \mathrm{GL}(V)$, L として例えば, $\mathrm{GL}(V)$, $\mathrm{SL}(V)$, $\mathrm{O}(V, \kappa)$ をとる

$$\mathfrak{l} \subset \mathfrak{gl}(V),\quad \mathfrak{l}^p := \mathfrak{l} \cap \phi^p\mathfrak{gl}(V)$$

3) $\varphi = \varphi(x) = \{\varphi^q(x)\}$ $\quad M \times V \supset \{\varphi^q(x)\} \mapsto x \in M$

◎ 外在幾何，線形微分方程式のカテゴリー

○ <u>Def.1.1</u> L/L^0 外在幾何のカテゴリー
<u>Def.1.2</u> type $(\mathfrak{g}_-, V; L)$ をもつ

○ <u>Def.2.1</u> L/L^0 線形微分方程式のカテゴリー
<u>Def.2.2</u> type $(\mathfrak{g}_-, V; L)$ をもつ

○ <u>Def.3</u> Cartan bundle (P, ω) with
type $(\mathfrak{g}_-, V; L)$

⊙ <u>Thm</u> 3つのカテゴリーの同型性
<u>Thms</u> 不変量, rigidity

○ Def.1.1　L/L^0 外在幾何のカテゴリー

・object: $\varphi : (M, \mathfrak{f}) \longrightarrow L/L^0 \subset \mathsf{Flag}(V, \phi)$

osculating　$\underline{\mathfrak{f}}^p \underline{\varphi}^q \subset \underline{\varphi}^{p+q}$　$(\forall p, q)$

・isomorphism:

$$\begin{tikzcd}
(M, \mathfrak{f}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "h:\text{diffeo}"'] & L/L^0 \subset \mathsf{Flag}(V, \phi) \arrow[d, "\Lambda_a\,(a\in L)"] \\
(M', \mathfrak{f}') \arrow[r, "\varphi'"'] & L/L^0 \subset \mathsf{Flag}(V, \phi)
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{gr}\mathfrak{f}_x \times \mathrm{gr}_q\varphi_x \longrightarrow \mathrm{gr}_{p+q}\varphi_x \quad \mathrm{gr}\varphi_x = \varphi_x^q/\varphi_x^{q+1}$$

$x \in M$ での φ のシンボルという

Def.1.2

L/L^0 外在幾何 $\varphi : (M, \mathfrak{f}) \longrightarrow L/L^0 \subset \mathrm{Flag}(V, \phi)$ が type $(\mathfrak{g}_-, V; L)$ である

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_- \times V & \longrightarrow & V \\ \beta\times\alpha\Big\downarrow & & \Big\downarrow\alpha \\ \mathrm{gr}\mathfrak{f}_x \times \mathrm{gr}\varphi_x & \longrightarrow & \mathrm{gr}\varphi_x \end{array}$$

$\beta : \mathfrak{g}_- \to \mathrm{gr}\mathfrak{f}_x, \quad \varphi_x = a\phi, \alpha = \mathrm{gr}a : \mathrm{gr}V = V \to \mathrm{gr}\varphi_x$

すべての $x \in M$ で成り立つとき，定シンボル $(\mathfrak{g}_-, V; L)$ をもつという

○ Def.2.1 L/L^0 線形微分方程式のカテゴリー

· object: $((M,\mathfrak{f}), R=\{R^q\}, \nabla)$

$R=\{R^q\}$: L^0-filtered vector bdle over $(M,\mathfrak{f})$

∇ : flat L-connection on R

$\nabla_{\underline{\mathfrak{f}^p}}\underline{R^q} \subset \underline{R}^{p+q}$ $(\forall p,q)$

$\exists P$

$$\begin{array}{c} P \\ \downarrow L^0 \\ M \end{array}$$

L^0-principal bdle s.t. $\underline{R^q = P\times_{L^0} V^q}$

$\underline{\hat{P} = P\times_{L^0} L}$ $\rightsquigarrow$ $\exists\omega$: $\hat{P}$ の flat connection s.t. ∇ は ω から induce される

$(R=P\times_{L^0} V = \hat{P}\times_{L^o} V)$

- isomorphism:

$$
\begin{array}{ccc}
\hat{P} & \xrightarrow{\hat{F}} & \hat{P}' \\
\downarrow \cup & & \downarrow \cup \\
P & \xrightarrow{F} & P' \\
\downarrow & & \downarrow \\
(M, \mathfrak{f}) & \xrightarrow[f]{} & (M', \mathfrak{f}')
\end{array}
$$

$\hat{F}_* H = H'$ ωによる水平空間

involutive system i.e. compatibility and regularity conditionがいえる

Def.2.2

L/L^0 線形微分方程式 $((M,\mathfrak{f}),R=\{R^q\},\nabla)$ が
type $(\mathfrak{g}_-,V;L)$ である

$$\Longleftrightarrow \begin{tikzcd} \mathfrak{g}_- \times V \arrow[r] \arrow[d, "\beta\times \mathrm{gr}z"'] & V \arrow[d, "\mathrm{gr}z"] \\ \mathrm{gr}\mathfrak{f}_x \times \mathrm{gr}R_x \arrow[r] & \mathrm{gr}R_x \end{tikzcd}$$

$z\in P$ に対して，$z:(V,\phi)\to(R,\{R^q\})$，$\mathrm{gr}z:V\to\mathrm{gr}R$
すべての $x\in M$ で成り立つとき，定シンボル $(\mathfrak{g}_-,V;L)$ をもつという

○ Def.3

Cartan bundle (P, ω) が type $(\mathfrak{g}_-, V; L)$ である

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} P \\ \Big\downarrow \hat{G}^0 \\ (M, \mathfrak{f}) \end{array} \quad \omega : T.P \longrightarrow \mathfrak{l} \quad \mathfrak{l}\text{-値 1-form}$$

- $R_a^* \omega = \mathrm{Ad}(a^{-1})\omega \quad (a \in \hat{G}^0)$
- $\omega(\tilde{A}) = A \quad (A \in \hat{\mathfrak{g}}^0)$
- $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$

- $\omega = \omega_I + \omega_{II}$ とすると， $(\mathfrak{g}$-不変分解: $\mathfrak{l} = \hat{\mathfrak{g}} \oplus \hat{\mathfrak{g}}^{\perp})$

  $\omega_I = \mathrm{Proj}_{\hat{\mathfrak{g}}}\,\omega, \quad \omega_{II} = \mathrm{Proj}_{\hat{\mathfrak{g}}^{\perp}}\,\omega$

$\omega_I : T_z P \longrightarrow \hat{\mathfrak{g}}\ (\forall z \in P)$ P上のCartan接続

- $\omega_{II} = \chi\omega_I$ とおくと， $\left(\chi = \dfrac{\omega_{II}}{\omega_I} \quad \text{cf. } K = \dfrac{\det_{II}}{\det_I}\right)$

$\chi : P \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_-, \hat{\mathfrak{g}}^{\perp})$ P上のstructure function

$$\begin{cases} \partial^*\chi = 0 \\ \partial\chi_k = \Psi_k(\chi_l(l < k)\text{とその微分}) \end{cases} \qquad \Big(\chi = \sum_{k \geq 1} \chi_k\Big)$$

特に， $\Psi_1 = 0$, よって $H^1_1 = 0$

$(P, \omega) \sim (P', \omega') \Longleftrightarrow \exists F : P \longrightarrow P'$ バンドル同型 s.t. $F^*\omega' = \omega$

Remark:

$\mathfrak{g} = \oplus_p \mathfrak{g}_p \subset \mathfrak{l} = \oplus_p \mathfrak{l}_p \subset \mathfrak{gl}(V) = \oplus_p \mathfrak{gl}_p(V)$

$\hat{\mathfrak{g}} :=$ Prol$(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{l}) =$ Prol$(\mathfrak{g}_-) \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{z}_0$ ($\mathfrak{l}$のcenter)

$\hat{\mathfrak{g}}^0 = \oplus_{p \geq 0} \hat{\mathfrak{g}}_p \leftrightarrow \hat{G}^0$

★ Structure Equation

$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0 \qquad (\omega = \omega_I + \omega_{II})$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathfrak{g}} : d\omega_I + \dfrac{1}{2}[\omega_I, \omega_I] + \dfrac{1}{2}[\omega_{II}, \omega_{II}]_I = 0 \\ \hat{\mathfrak{g}}^{\perp} : d\omega_{II} + [\omega_I, \omega_{II}] + \dfrac{1}{2}[\omega_{II}, \omega_{II}]_{II} = 0 \end{cases}$$

$(\omega_{II} = \chi\omega_I,\ \omega_= (\omega_I)_-, (\omega_{II})_- = 0)$

$\Rightarrow \cdot\ K(\omega_-, \omega_-) = -[\chi\omega_-, \chi\omega_-]_I$ cf. Gaussの驚異定理

$$\cdot \begin{cases} \partial\chi = \Psi \\ \partial\chi_l = \Psi_l(\chi_i(i < l), D_j\chi_k(k < l)) \quad (\partial^*\chi_l = 0) \end{cases}$$

⊙ Thm

３つのカテゴリーの同型性

次は関手的に 1 対 1 である:

(i) Cartan bundle (P, ω) over $(M, \mathfrak{f})$ of type $(\mathfrak{g}_{-}, V; L)$

$\Longleftrightarrow$ (ii) type $(\mathfrak{g}_{-}, V; L)$ をもつ L/L^0 外在幾何

$\varphi : (M, \mathfrak{f}) \longrightarrow L/L^0 \subset \mathrm{Flag}(V, \phi)$

$\Longleftrightarrow$ (iii) type $(\mathfrak{g}_{-}, V; L)$ をもつ L/L^0 線形微分方程式

$((M, \mathfrak{f}), R = \{R^q\}, \nabla)$

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): moving frame, reduction

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): $d\eta + \omega\eta = 0$ on 表現束 $P \times_{\hat{G}_0} V$, η は P 上の V-値 ft.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): 微分積分の基本定理 ($\longrightarrow$ 微分, $\longleftarrow$ 積分)　　(cf. 双対性)

Thm

構造関数 $\chi = \sum_{k \geq 1} \chi_k : P \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_-, \hat{\mathfrak{g}}^\perp)_k$ は，
(P, ω) の完全不変量である
調和部分 $H\chi$ は，基本不変量である

Thm

$\chi \equiv 0 \Rightarrow$ rigid i.e. $\varphi : (M, \mathfrak{f}) \longrightarrow L/L^0 \subset \mathrm{Flag}(V, \phi)$
$\sim \varphi_G : G/G^0 \longrightarrow L/L^0 \subset \mathrm{Flag}(V, \phi)$
特に，$H^1_+(\mathfrak{g}_-, \hat{\mathfrak{g}}^\perp) = 0 \Rightarrow \chi = 0$, rigid　　H^1_+ は基本不変量

いつ $H^1_+ = 0$ となるだろうか

Thm

$H^1_+(\mathfrak{g}_-, V) = 0$　　ただし，以下の旗多様体は除く

- (A_l, Σ),　$\Sigma = \{\alpha_1\}, \{\alpha_l\}, \{\alpha_1, \alpha_l\}$　$(l \geq 1)$
- (B_2, Σ),　$\Sigma = \{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}$

$$(B_l, \Sigma), \quad \Sigma = \{\alpha_1\} \qquad (l \geq 3)$$
$$\cdot\ (C_l, \Sigma), \quad \Sigma = \{\alpha_1\} \qquad (l \geq 3)$$
$$\cdot\ (D_4, \Sigma), \quad \Sigma = \{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}, \{\alpha_4\}$$
$$(D_l, \Sigma), \quad \Sigma = \{\alpha_1\} \qquad (l \geq 5)$$

★ flexibleでありうる構造：

第１種—射影構造，共形構造

第２種—非基本ウエイト型接触構造

A型(Lagrange)接触構造，C型(射影)接触構造