微分方程式, 幾何構造, そして ツイスター理論

待田芳徳

○三位一体

ツイスター理論

cf. Lie群

Galois, Lie; Klein

微分方程式

- ODE, PDE
- 線形, 非線形

幾何構造

G構造

- テンソル

  ex. 計量構造 $SO(n)$, 複素構造 $GL(n,\mathbb{C})$

- 分布

  ex. 接触分布, cf. 完全積分可能分布

○ ツイスター理論とは何か

違う幾何構造の双対性 — 一般に次元が違う

cf. ベクトル空間の双対性
ミラー対称性

- global twistor — single fibration
- ⊙ local twistor — double fibration

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d] \\ X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Y & & X \end{tikzcd}$$

ex. 複素構造 ↓ 共形構造　AHS理論

ex. Klein, Penrose

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ P^3_{\mathbb{C}} & & M^4 \end{tikzcd}$$

複素3次元ツイスター空間　4次元時空
複素構造　共形構造

$$X \times Y \supset Z = \{(x, M_s) \mid x \in M_s\} = \{(N_t, y) \mid y \in N_t\}$$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "M"', "\pi_Y"] \arrow[dr, "\pi_X"', "N"] & \\ \{M_s\} = Y \arrow[rr, leftrightarrow, squiggly, "⊛"'] & & X = \{N_t\} \end{tikzcd}$$

$$Y \supset N_t = \pi_Y \circ \pi_X^{-1}(x) \quad (x \in X)$$

$$X \supset M_s = \pi_X \circ \pi_Y^{-1}(y) \quad (y \in Y)$$

Z : XとYの結合空間 (incidence space)

⊛ : ツイスター変換, ツイスター関係式
持ち上げて，ねじって，下へ落とす
(pull back ; lift)　(push down ; projection)

空間の点は豊かな構造 — 何らかの意味のモジュライ空間

○ ツイスター理論の土台

• フィルターつき多様体 — 非ホロノーム幾何

curved version

$TM = D^{-k} \supset \cdots \supset D^{-1} = D \supset D^{0} = 0$　部分束の列（フィルター）

$[D^{p}, D^{q}] \subset D^{p+q}$　完全非ホロノーム分布

re. (M, D)　$D^{-p-1} = D^{-p} + [\underset{D^{-1}}{D}, D^{-p}]$

$x \in M$

$\mathfrak{m}_p(x) := D^{p}_x / D^{p+1}_x$　次数つきLie代数

$\mathfrak{m}(x) := \bigoplus_{p<0} \mathfrak{m}_p(x) \cong T_x M$　シンボル代数

ex.

- $TM = D^{-1} \underset{\mathfrak{m}_{-1}}{\supset} D^{0} = 0$　可換(Abel)　Grassmann構造など
- $TM = D^{-2} \underset{\substack{\mathfrak{m}_{-2} \\ 1\text{次元}}}{\supset} D^{-1} \underset{\substack{\mathfrak{m}_{-1} \\ \text{偶数次元}}}{\supset} D^{0} = 0$　非可換(nilpotent)　接触構造

• 旗多様体 — 巾零(or放物)幾何

flat model

- 第k種次数つきLie代数　$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$
  $[\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q] \subset \mathfrak{g}_{p+q}$
  ex. 第2種, $\dim \mathfrak{g}_{-2} = 1$ は接触型
- 第k種旗多様体
  $\left.\begin{array}{l} \mathfrak{g} \longleftrightarrow G \\ \mathfrak{g}' = \bigoplus_{p \geq 0} \mathfrak{g}_p \longleftrightarrow G' \end{array}\right) M = G/G'$
  ex. 第1種, Hermite対称空間
- 巾零幾何, 放物幾何
  $\mathfrak{m} = \bigoplus_{p<0} \mathfrak{g}_p$　$\mathfrak{g}' = \bigoplus_{p \geq 0} \mathfrak{g}_p$
  $\mathfrak{g}_{-1} \subset \mathfrak{m} = T_o M$
  $\mathfrak{g}_{-1} \longrightarrow D \subset TM$　G不変分布
  $\mathfrak{g}_0 \longleftrightarrow G_0$ 構造
  re. 正規Cartan接続（田中理論）

○ ツイスター理論と幾何構造

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\pi_Y"'] \arrow[dr, "\pi_X"] & \\ Y & & X \end{tikzcd}$$

例1) パス幾何

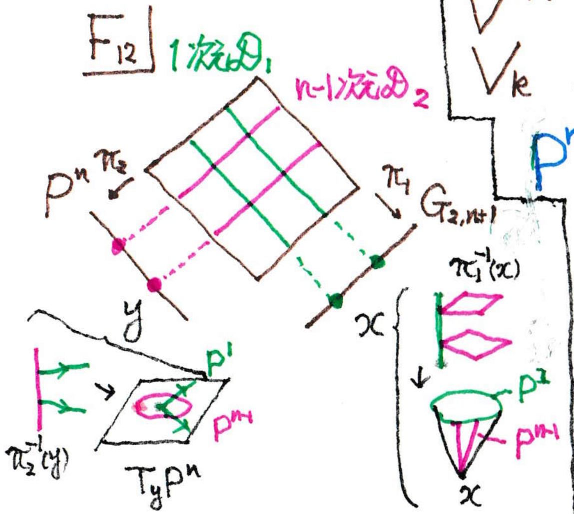
M上の<u>パス幾何(構造)</u>とは、
M上の次のような曲線(パスという)の集合P:
$\forall m\in M$, $\forall \ell \in P(T_mM)$に対して、接するPのパスがただ1本

- × 同値関係で、不変量や分類
- × どんな条件で、パスが測地線となる射影構造が入るか
- × Pにどんな幾何構造

$$\begin{tikzcd} & M\times P \\ & P(TM)=\{(m,\ell)\mid m\in\ell\} \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ M & & P \end{tikzcd}$$

A_n型, $G=SL(n+1)$

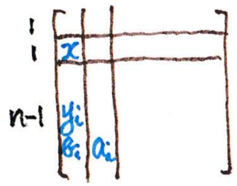
V^{n+1} : $n+1$次元ベクトル空間
V_k : k次元部分空間 $\subset V$



$$P^{n-1} \longrightarrow F_{12}=\{V_1\subset V_2\} \longleftarrow P^1 \qquad \dim 2n-1$$

$$\begin{tikzcd} & F_{12} \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ P^n=\{V_1\} & & G_{2,n+1}=\{V_2\} \end{tikzcd}$$

$P^n=\{V_1\} \supset P^1$, $\dim n$
$G_{2,n+1}=\{V_2\} \supset P^{n-1}$, $\dim 2(n-1)$



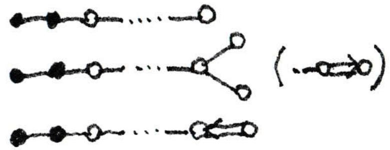
P^1 : $y_i = a_i x + b_i$ $(a_i, b_i : \text{const.})$ $1\le i\le n-1$
$x \longmapsto (y_i)$

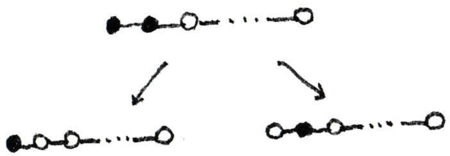
P^{n-1} : $b_i = -x a_i + y_i$ $(x, y_i : \text{const})$ $1\le i \le n-1$
$(a_i) \longmapsto (b_i)$

F_{12} : $\theta_i := dy_i - a_i dx_i$ として、 $\underset{\mathrm{rk}\,n}{D}=\{\theta_i=0\} = \underset{1}{\mathrm{Ker}\,\pi_{1*}} \oplus \underset{n-1}{\mathrm{Ker}\,\pi_{2*}}$

ツイスター関係式 $\{F_i = -y_i + a_i x + b_i = 0 \ (i=1,\cdots,n-1)\}$

re
- × パス (A型)
- × ヌルパス (BD型)
- × Legendreパス (C型)

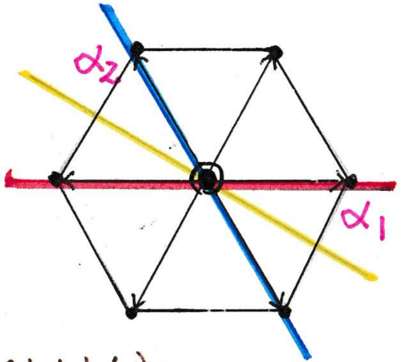




例2) 階数2のLie代数

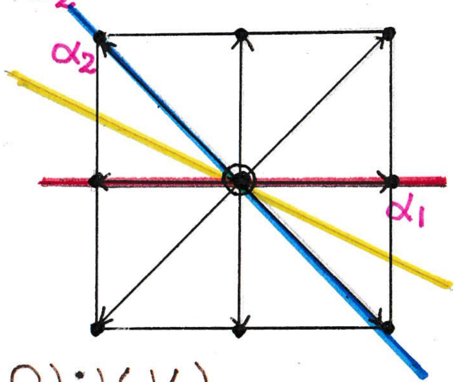
		real, split
$D_2 = A_1 \times A_1$	$SO(4,\mathbb{C}) \sim SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$	$SO(2,2) \sim SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$
A_2	$SL(3,\mathbb{C})$	$SL(3,\mathbb{R})$
$B_2 = C_2$	$SO(5,\mathbb{C}) \sim Sp(2,\mathbb{C})$	$SO(3,2) \sim Sp(2,\mathbb{R})$
G_2	$G_2^{\mathbb{C}}$	G_2'

● A_2



$(V^3; V_1, V_2)$

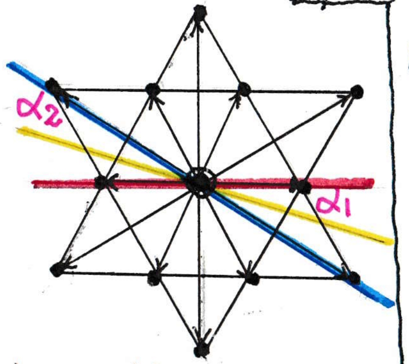
● $B_2 = C_2$



$((V^4, \Omega); V_1, V_2)$

or $((V^5, g); V_1, V_2)$

● G_2



$((V^7, g); V_1, V_2)$

$V^7 = \mathrm{Im}\,\mathbb{O}$

※ $SL(2) \subset \mathbb{R}[x,y]$

$\mathbb{R}^2 : ax+by$

$\mathbb{R}^3 : ax^2+bxy+cy^2$

$\cup$

$(\alpha x+\beta y)^2$

2次コーン

$\mathbb{R}^4 : ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$

$\cup$

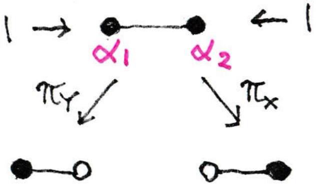
$(\alpha x+\beta y)^3$

3次コーン

◎ Z^3 : split Lag. contact str.

(2,3)型分布

第2種



$Y = P^2$: proj. str.

第1種

$\cup$

直線

↷ 曲線

$X = (P^2)^*$: dual proj. str.

第1種

$\cup$

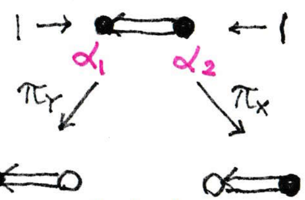
直線

↷ 曲線

◎ Z^4 : split Engel str.

(2,3,4)型分布

第3種



$Y = P^3$: proj. contact str.

第2種

$\cup$

Lag.直線

↷ 〃 曲線

$X = LG^3 = Q^3$: conf. str.

第1種

$\cup$

ヌル直線

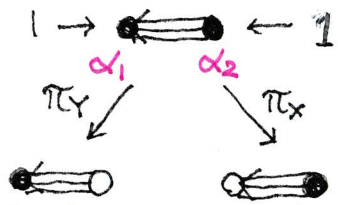
↷ 〃 曲線

2次 cone str.

◎ Z^6 : split Monge str.

(2,3,4,5,6)型分布

第5種



Y^5 : G_2型Goursat str.

(2,3,5)型分布

第3種

$\cup$

Goursat直線

↷ 〃 曲線

X^5 : G_2型contact str.

第2種

$\cup$

Monge直線

↷ 〃 曲線

3次 Lag. cone str.

○ ツイスター理論と微分方程式

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \pi_Y \swarrow & & \searrow \pi_X \\ Y & & X \end{array}$$

● 関数, section からの微分方程式 ― 線形

{ Laplace 方程式
超幾何 〃
⋮

○ Radon変換, Penrose変換

pull back ($f \in \mathcal{F}(Y)$　　$f = f(x_i, y_j)$ 係数 変数

$\pi_Y^* f \in \mathcal{F}(Z)$

push down ($\phi_f := \pi_{X*}\pi_Y^* f \in \mathcal{F}(X)$　　$\phi_f(x_i) = \int_\sigma f(x_i, y_j)\,dy$

ある微分方程式の解？

* 単射, 全射？
* 反転公式？

○ Gauss-Manin 接続, $\int$超幾何積分

$\mathbb{C}^n : x = (x_1, \cdots, x_n)$

$f_1, \cdots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$, $f_j(x) = \sum a^j_{\nu_1 \cdots \nu_n} x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}$

$X = \mathbb{C}^n - D$, $D = \bigcup_{j=1}^m D_j$, $D_j : f_j = 0$　$\deg \ell_j$

$D_j : f_j = 0$
$D_i : f_i = 0$

$\Phi := f_1^{\lambda_1} \cdots f_m^{\lambda_m}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$

$\langle \varphi \rangle = \mathcal{J}(\varphi)(a) = \int_\sigma \Phi \varphi\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$

◎ {

$\mathbb{C}^n \times A \supset \{(x,a) \mid f_j(a,x) = 0, j = 1, \cdots, m\}$

$\swarrow$　　$\searrow$

$\mathbb{C}^n : (x)$　　$A : (a)$

$\cup$ 変数の空間　　$\cup$ 係数の空間（多項式の空間）

$D = \{P_1 \cdots P_m = 0\}$　　Disc=0, Res=0

$X_a = \mathbb{C}^n - D_a$　　$M = A - \{Disc = 0\} \cup \{Res = 0\}$

$H^n(\Omega^\cdot(X, \log D), \nabla)$

($\nabla\varphi = d\varphi + \omega \wedge \varphi$,　$\omega = d\log\Phi = \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$
$\nabla \cdot \nabla = 0$

M上の（ツイスト）コホモロジー束

$H^n = \bigcup_a H^n_a$　　H^n の basis $\{e_1, \cdots, e_p\}$

$\downarrow$　　$\langle e_i \rangle = \int_\sigma \Phi e_i$

M　　$\mathbb{U} = (\langle e_1 \rangle, \cdots, \langle e_p \rangle)$

$d\mathbb{U} = \mathbb{U}\omega$ なる Gauss-Manin 接続 ω の構成！

ベクトル束上の平坦接続

◎ (複素構造 ―― 原始形式
シンプレクティック構造 ― ラグランジアン, 消滅サイクル

$\longleftrightarrow$ ◎ (平坦構造　cf. Frobenius-Saito 構造
re. n=1

● 部分多様体, divisor からの微分方程式 — 非線形

- パス方程式
- Clairaut 〃
- Monge-Ampère 〃
- Hamilton-Jacobi 〃
- Goursat-Cartan 〃
- ⋮

○ 微分方程式のツイスター対応

$X^n : (x_1, \cdots, x_n)$

$Y^m : (y_1, \cdots, y_m)$

ツイスター関係式

$X \times Y \supset Z^{n+m-l} = \{ F_i(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = 0,\ i = 1, \cdots, l \}$

◎
$$\begin{cases} P_t \cong P^{n-l} \longrightarrow Z \subset X \times Y \longleftarrow Q_s \cong Q^{m-l} \\ \qquad\qquad \swarrow \qquad\qquad \searrow \\ \qquad\quad Y \qquad\qquad\qquad X \\ \qquad\quad \cup \qquad\qquad\qquad \cup \\ Q_s = \{ F_i(y_1, \cdots, y_m) = 0 \} \quad P_t = \{ F_i(x_1, \cdots, x_n) = 0 \} \end{cases}$$

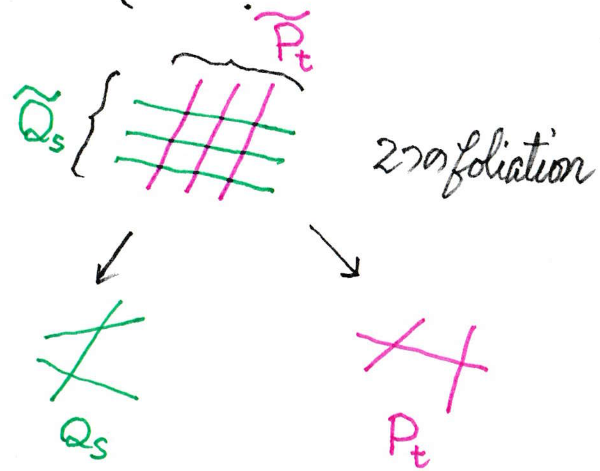
$\overline{\pitchfork}$ $\qquad$ $\overline{\pitchfork}$

$X : (x_1, \cdots, x_n)$ $\qquad$ $Y : (y_1, \cdots, y_m)$

$\downarrow\uparrow$ 完全解 $\qquad$ $\downarrow\uparrow$ 完全解

$\mathcal{F}_Y$: 微分方程式系 $\longleftrightarrow$ $\mathcal{F}_X$: 微分方程式系

一般化された Bäcklund 変換



ex. $(a, c) \longleftrightarrow (t, x, z)$

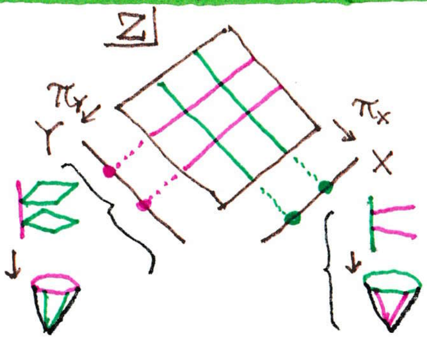
$F(a, c; t, x, z) = -c + \frac{t}{2}a^2 + xa + z = 0$

$$\begin{cases} c = \frac{t}{2}a^2 + xa + z \\ z = -\frac{a^2}{2}t - ax + c \end{cases}$$

$c''' = \frac{d^3 c}{da^3} = 0 \longleftrightarrow \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0$

○ コーン構造, パス構造から幾何構造

(コーン, パス → コンパス
パス, コーン → パソコン



・Z から出発

・X (or Y) 上

2つのfoliation : $\mathcal{D}_X : \{\pi_X^{-1}(x)\}_{x \in X}$, $\mathcal{D}_Y : \{\pi_Y^{-1}(y)\}_{y \in Y}$

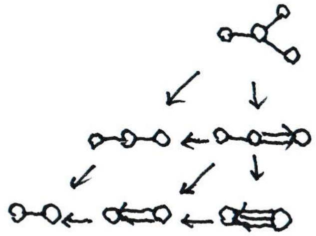
擬積構造 : $D = D_X \oplus D_Y = \mathrm{Ker}\,\pi_{X*} \oplus \mathrm{Ker}\,\pi_{Y*} \subset TZ$

- コーンを不変にする幾何
- (一般化された) パス方程式
- コーンに接する完全解, 一般解 ; パスを特性曲線

今やっていること

- D$_4$ヒエラルキーの数学, 物理

$$\begin{tikzcd} & & D_4 \arrow[dl] \arrow[d] \\ & A_3=D_3 \arrow[dl] \arrow[d] & B_3 \arrow[l] \arrow[dl] \arrow[d] \\ A_2 & B_2=C_2 \arrow[l] & G_2 \arrow[l] \end{tikzcd}$$



cf. $\begin{cases} D_2 = A_1 \times A_1 \\ C_3 \end{cases}$

- 図形の配置
  - ⊗ 点
  - × 直線, 平面, 超平面
  - ⊗ 円, 球面, 超球面

- 外在幾何におけるツイスター理論

  線形PDEのBäcklund変換

- ◉ コーン場に付随するPDE
  - × コーン場に付随する1階PDE
  - × Lagrangeコーン場に付随する2階PDE

○ 微分方程式とジェット空間の幾何

● 1階PDEと1-ジェット空間の部分多様体の幾何

$J^1(n,1)^{2n+1} : (x_i, z, p_i)$ $\quad \theta = dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$

$\downarrow \pi$

$J^0(n,1)^{n+1} : (x_i, z)$

- $TJ^1_{2n+1} \supset C_{2n} \supset Char(C)_n$

$C = \{\theta = 0\}$

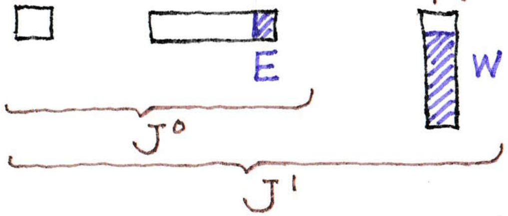
$Char(C) = \{X \in C \mid X \lrcorner d\theta \equiv 0 \pmod{\theta}\} = \{X \in C \mid L_X(C) \subset C\}$

$R \oplus V \oplus V^*$

$\frac{\partial}{\partial z} \quad \frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial z} \quad \frac{\partial}{\partial p}$

$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$

$\theta \quad dx_i \quad dp_i$



- **(単独)1階PDE** $\leftrightarrow$ 1-ジェット空間の幾何学

$F(x_i, z, p_i) = 0$

$J^1(n,1) \underset{\text{codim } 1}{\supset} \Sigma^{2n} = \{(x_i, z, p_i) \mid F = 0\}$

$\downarrow$ submersion

$J^0(n,1)$

$$
\begin{array}{ccccc}
TJ^1_{2n+1} & \underset{1}{\supset} & C_{2n} & \underset{n}{\supset} & Char(C)_n \\
\cup & & \cup & & \cup \\
T\Sigma_{2n} & \underset{1}{\supset} & D_{2n-1} & \underset{n}{\supset} & Char(D)_{n-1} = W
\end{array}
$$

$x = (x_i, z, p_i) \in \Sigma$, $x_0 = (x_i, z) \in J^0$

$W_x := (\underbrace{T_x\Sigma \cap C_x}_{D:\ 2n-1\text{次元とする}}) \cap \underbrace{Char(C_x)}_{V^*}$

$E_x := \{X \in D_x \mid d\theta(X, Y) = 0,\ Y \in D_x\}$

$E = \langle X_F \rangle$ 接触Hamilton v.f. $\to$ 特性曲線

$E \oplus W (\subset D \subset T\Sigma)$: Monge系 (at $x \in \Sigma$)

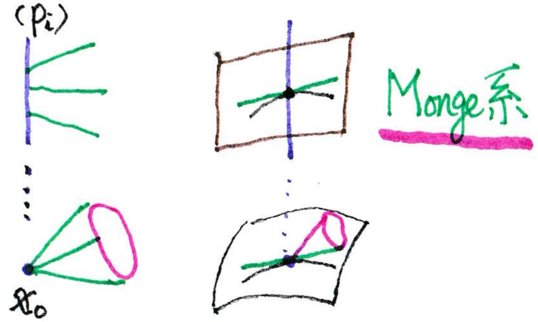
$\bigcup_{x \in \pi^{-1}(x_0)} \pi_{*x}(E \oplus W)$: Monge コーン (at $x_0 \in J^0$)

$\pi_{*x}(E \oplus W) = \pi_{*x}(E)$　いろいろな次元

$J^1 \supset \Sigma$

$\downarrow$

J^0



Monge コーン

- ◎
$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] & \Sigma^{2n} \arrow[dl] \arrow[dr] & W \arrow[l] \\
N^{2n-1} & & J^0(n,1)^{n+1}
\end{tikzcd}$$
$J^1 \supset$

特性曲線の空間 接触構造　　Mongeコーン場

↕

⦿ コーン場に付随する1階PDE

X : $n+1$次元多様体

C : n次元コーン場

$(n-1)+1$　cf.低次元

$Z \doteqdot P(C)$: 射影コーン束

◎
$$\begin{tikzcd}
P(TX) \arrow[d, phantom, "\cup"] & & \\
Z = P(C)^{2n} \arrow[rr, "⊛"'] \arrow[d] \arrow[dr] & & P(T^*X) \arrow[dl] \\
Y^{2n-1} & X^{n+1} &
\end{tikzcd}$$

cf　$J^1(n,1)$から$P(T^*N)$　　$P(T^*N)$上に, D

$P(T^*N) \ni \Pi$　　$\left(D_\Pi := \pi_*^{-1}\Pi \right.$

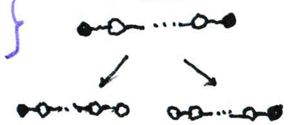
$\downarrow \pi$　　corank 1

N^{n+1}　$T_n N \supset \Pi^n$

⊛ $x \in X$, $T_xX = V^{n+1} \supset C_x$

◎
$$\begin{tikzcd}
 & I = \{(V_1, V_n) \mid V_1 < V_n < V\} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
P(V) = \{V_1\} & & P(V^*) = \{V_n\} \\
P(C) \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[rr, leftrightarrow, squiggly] & & F=0\text{なる超曲面} \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90]
\end{tikzcd}$$

A型



$n-1$次元　射影双対　判別式　$n-1$次元

Hamilton-Jacobi方程式

Hamilton-Jacobi系

$$\begin{cases} P^1 \longrightarrow Z^{2n+2} \longleftarrow Q^n \\ \quad \swarrow_{\pi_Y} \qquad \searrow_{\pi_X} \\ Y^{2n+1} \qquad\qquad X^{n+2} \end{cases}$$

X^{n+2}

$C \subset TX$

$Z = PC(X),\ \pi_X : Z \to X$

$P(TX) \supset Z \longrightarrow P(T^*X)$

$(x, l_x) \qquad (x, \Pi_x)$

$\hat{\pi}_x$

$$\begin{cases} (Z, E = E_1 \oplus E_2, E^2) \\ \quad \swarrow_{\pi_Y} \qquad \searrow_{\pi_X} \\ (Y, D) \qquad (X, C) \\ \cup \qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\cup}\, \pi_{X*}E_2 \\ \cup\, \pi_{Y*}E_1 \end{cases}$$

- $\underset{\text{rk } n+1}{E} \subset TZ$. $z = (x, l) \in PC(X)$ として, $E_z = \pi_{X*}^{-1}(l)$
- $\underset{\text{rk } n}{E_1} \subset TZ$. $E_1 := \mathrm{Ker}\,\pi_{X*}$ c.i. $E_1 \subset E$
- $\underset{\text{cork } 1}{E^2} \subset TZ$. $l \subset \Pi_l \subset T_xX$ として, $E^2_z = \pi_{X*}^{-1}(\Pi_l)$

H-J系の解 ⇔ Xでのヌル超曲面 $n+1$次元
⇔ Zでの極大E^2-積分多様体 $n+1$次元
⇔ Yでの Leg. 多様体 n次元

⊙ $\underset{n+1}{E} = \underset{n}{E_1} \oplus \underset{1}{E_2} \subset TZ$ なる E_2を与える.

Hamilton-Jacobi系 (X, C, h) (cf. フルH-J系)

p.p. connection

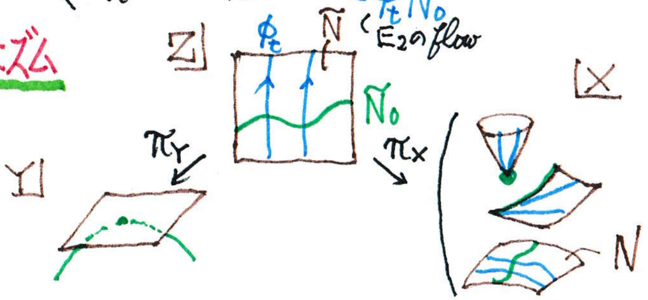
($E \subset E^2 = \partial E \subset TZ = \partial^2 E$

解の初期値問題

初期空間から解へ

$$\begin{array}{ccccccc} Z & & Y & & Z & & X \\ \underset{n}{\tilde{N}_0} & \rightsquigarrow & \underset{n}{\pi_Y \tilde{N}_0} & \rightsquigarrow & \underset{n+1}{\tilde{N}} = \pi_Y^{-1}\pi_Y \tilde{N}_0 & \rightsquigarrow & \underset{n+1}{N} = \pi_X \tilde{N} \\ & & & & = \phi_t \tilde{N}_0 & & \end{array}$$

GERメカニズム

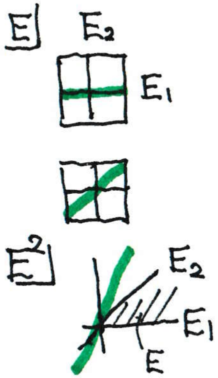


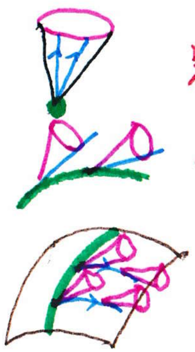
(1) 特異初期値

$E \supset E_1$-integral

$E \supset E_1$-slant

(2) 正則初期値





完全解 …… 中心場

一般解 …… 接線場

一般解 …… 法線場

● 2階PDEと2-ジェット空間の部分多様体の幾何

$$
\begin{array}{l}
J^2(n,1) : (x_i, z, p_i, p_{ij}) \\
\quad \downarrow \pi \\
J^1(n,1) : (x_i, z, p_i) \\
\quad \downarrow \\
J^0(n,1) : (x_i, z)
\end{array}
\qquad
\begin{cases}
\theta_0 = dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i \\
\theta_i = dp_i - \sum_{j=1}^{n} p_{ij} dx_j
\end{cases}
\qquad
\theta = dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i
$$

- $TJ^2 \supset C^2 \supset C^1 \supset \mathrm{Char}(C^2)$

  $C^2 = \{\theta_0 = 0\} = \partial C^1 = C^1 + [C^1, C^1]$, $\quad C^1 = \{\theta_0 = \theta_i = 0\}$, $\quad$ cf $\mathrm{Char}(C^1) = 0$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{R} & \oplus & V^* & \oplus & V & \oplus & S^2(V^*) \\
\frac{\partial}{\partial z} & & \frac{\partial}{\partial p_i} & & \frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\frac{\partial}{\partial p_j} & & \frac{\partial}{\partial p_{ij}} \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\theta_0 & & \theta_i & & dx_i & & dp_{ij}
\end{array}
$$

$\underbrace{V \oplus S^2(V^*)}_{\{\theta_0 = \theta_i = 0\}}$

$\underbrace{V^* \oplus V \oplus S^2(V^*)}_{\{\theta_0 = 0\}}$

$\underbrace{\mathbb{R} \oplus V^* \oplus V}_{J^1}$

$\underbrace{\mathbb{R} \oplus V^* \oplus V \oplus S^2(V^*)}_{J^2}$

- **(単独)2階PDE** $\longleftrightarrow$ 2-ジェット空間の幾何学

$$
\begin{array}{l}
F(x_i, z, p_i, p_{ij}) = 0 \\
\updownarrow \\
J^2(n,1) \underset{\mathrm{codim}\,1}{\supset} \Sigma = \{(x_i, z, p_i, p_{ij}) \mid F = 0\} \\
\qquad\qquad\qquad \downarrow \ \textit{submersion} \\
\qquad\qquad\quad J^1(n,1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
TJ^2 & \underbrace{\supset}_{1} & C^2 & \underbrace{\supset}_{n} & C^1 & \underbrace{\supset}_{n} & \mathrm{Char}(C^2) \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
T\Sigma & \underbrace{\supset}_{1} & D^2 & \underbrace{\supset}_{n} & D^1 & \underbrace{\supset}_{n} & \mathrm{Char}(D^2)
\end{array}
$$

• 階数1のPDE

$J^2(n,1) \underset{\text{codim}1}{\supset} \Sigma = \{F=0\}$

$\pi \downarrow$ submersion

$J^1(n,1)$

$S^2(V^*) \underset{\text{codim}1}{\supset} f = \mathrm{Char}(D^2)$

$\updownarrow$ dual

$S^2(V) \underset{\dim 1}{\supset} f^\perp = \langle e^2 \rangle$ $\quad {}^\exists e \in V$ …… rank 1 (仮定)

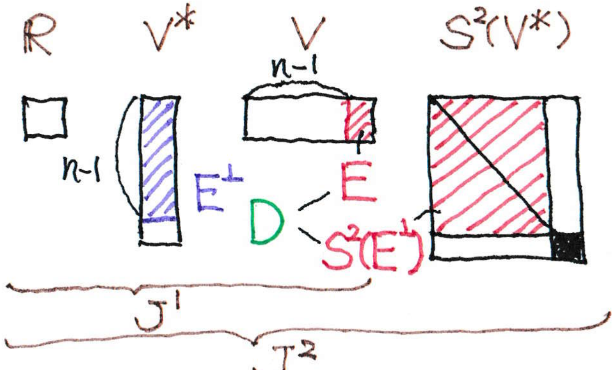
$(e^\perp < V^*)$

$D = E \oplus S^2(E^\perp)$ …… 完全積分可能(仮定)

$(D' = S^2(E^\perp))$

Monge系 $\overset{\shortparallel}{\langle e \rangle}$ 特性方向

$\underset{x \in \pi^{-1}(x_0)}{\bigcup} \pi_{*x}(D) \overset{\shortparallel}{=} \pi_{*x}(E)$ Mongeコーン $\xrightarrow[\text{(仮定)}]{}$ (n次元) Lagrange



◎ $J^2 \supset \Sigma = \{F=0\}$

$$\begin{array}{ccccc} & & \Sigma & & \\ & & \downarrow & & \\ & & Z^{3n} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ N^{3n-1} & & & & J^1(n,1)^{2n+1} \end{array}$$

特性曲線の空間 　 Mongeコーン場

ex. 独立2変数のPDE 放物型(双曲型)

$Z = \Sigma/\mathcal{D}'$

$N = \Sigma/\mathcal{D}$

⊙ Lagrangeコーン場に付随する2階PDE

(X,D) : $2n+1$次元接触多様体

LC : (n次元) Lagrangeコーン場

$Z = P(LC)$: 射影Lag.コーン束

◎ $P(TX) \supset P(D) \supset Z = P(LC)^{3n} \xrightarrow{\circledast} LG(X)$

$Z \to Y^{3n-1}$, $Z \to X^{2n+1}$, $LG(X) \to X^{2n+1}$

cf. $J^2(n,1)$から$LG(M)$

$LG(M) \ni L$

$\downarrow \pi$

M^{2n+1} 　 $T_m M \supset D_m \supset L$

$LG(M)$上に, D_1, D_2

$D_1|_L := \pi_*^{-1} L$ (corank $n+1$)

$D_2|_L := \pi_*^{-1} D_m$ (corank 1)

⊛ $x \in X$, $D_m = (V^{2n}, \Omega) \supset LC_x$

◎ $LG_{n-1} \to I = \{(V_1, V_n) \mid V_1 < V_n < V\} \leftarrow P^{n-1}$ (Lag)

$P^{2n-1} = \{V_1\}$ 　 $LG_n = \{V_n\}$

$(n-1)$次元 Legendre $\subset P(LC)$ $\xleftrightarrow{\text{LGCP双対}}$ $F=0$なる超曲面 終結式 (G-C方程式, G-C系)

C_n型

$$
\text{◎}\left\{
\begin{array}{ccccc}
P^1 & \longrightarrow & Z^{3n} & \longleftarrow & Q^{n-1} \\
 & \swarrow^{\pi_Y} & & \searrow^{\pi_X} & \\
Y^{3n-1} & & & & X^{2n+1}
\end{array}
\right.
$$

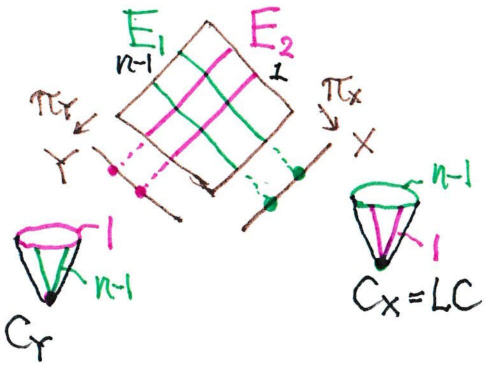
X^{2n+1}

$LC \subset \overset{\Omega}{D} \subset TX$

$Z = P\,LC(X) \subset P(D) \subset P(TX)$, $\pi_X : Z \to X$

$P(TX) \supset Z \longrightarrow LG(X)$

$\underset{\hat{L}_x}{(x, l_x)} \mapsto (x, L_x)$, $L^{\perp}$



* $(X, \underset{2n}{D})$ に対し、$C_x \subset D \subset TX$
* (Y, D_1, D_2) に対し、$C_Y \subset D_1 \subset D_2 \subset TY$

D_1: $2n-2 = 2(n-1)$, D_2: $3n-3 = 3(n-1)$, $\underbrace{\quad}_{n-1}$

n次元コーン ($n-1$次元の1次元family) Π

re. $\Pi \subset D_1 \subset D_2 \subset \bar{\Pi} = [\Pi, [\Pi, \Pi]] \subset T_yY$ より.

$$\underset{n-1}{\Pi} \underbrace{\subset}_{n-1} \underset{2n-2}{D_1} \underbrace{\subset}_{n-1} \underset{3n-3}{D_2} \underbrace{\subset}_{1} \underset{3n-2}{\bar{\Pi}} \underbrace{\subset}_{1} T_yY$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
E_2 & \subset & E & \subset & E^2 & \subset & E^3 & \subset & E^4 & \subset & TZ \\
= \mathrm{Ker}\,\pi_{Y*} & & = \pi_{Y*}^{-1}(\Pi) & & = \pi_{Y*}^{-1}(D_1) & & = \pi_{Y*}^{-1}(D_2) & & = \pi_{Y*}^{-1}(\bar{\Pi}) & & \\
1 & & n & & 2n-1 & & 3n-2 & & 3n-1 & & \\
 & \underbrace{}_{n-1} & & \underbrace{}_{n-1} & & \underbrace{}_{n-1} & & \underbrace{}_{1} & & \underbrace{}_{1} &
\end{array}
$$

* $Z \ni (x, \underset{\hat{L}}{l})$ に対して、$l \subset \overset{L^{\perp}}{L} \subset l^{\perp} \subset D_x \subset T_xX$ より.

$$\underset{1}{l} \underbrace{\subset}_{n-1} \underset{n}{L} \underbrace{\subset}_{n-1} \underset{2n-1}{l^{\perp}} \underbrace{\subset}_{1} \underset{2n}{D_x} \underbrace{\subset}_{1} \underset{2n+1}{T_xX}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
E_1 & \subset & E & \subset & E^2 & \subset & E^3 & \subset & E^4 & \subset & TZ \\
= \mathrm{Ker}\,\pi_{X*} & & = \pi_{X*}^{-1}(l) & & = \pi_{X*}^{-1}(L) & & = \pi_{X*}^{-1}(l^{\perp}) & & = \pi_{X*}^{-1}(D) & & \\
n-1 & & n & & 2n-1 & & 3n-2 & & 3n-1 & & \\
 & \underbrace{}_{1} & & \underbrace{}_{n-1} & & \underbrace{}_{n-1} & & \underbrace{}_{1} & & \underbrace{}_{1} &
\end{array}
$$

* $\underset{n}{E} = \underset{n-1}{E_1} \oplus \underset{1}{E_2} \subset TZ$ なる E_2 を与える.

Goursat-Cartan系 $(X, D, LC, \overset{\text{p.p. connection}}{h})$ (cf. プレG-C系)

$(E \subset E^2 = \partial E \subset E^3 = \partial^2 E \subset E^4 = \partial^3 E \subset TZ = \partial^4 E$

1階と2階の比較

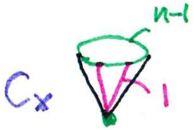
◎
$$\begin{tikzcd} P^1 \arrow[r] & Z^{2n} \arrow[dl] \arrow[dr] & Q^{n-1} \arrow[l] \\ Y^{2n-1} & & X^{n+1} \end{tikzcd}$$

- (X, C, h)に対して、
$\underset{n}{E} = \underset{n-1}{E_1} \oplus \underset{1}{E_2} \subset \underset{2n-1}{E^2} \subset \underset{2n}{TZ}$ 　（差：$n-1$, 1）

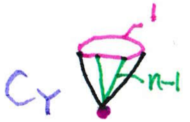
- $\underset{2n}{\mathfrak{m}} = \underset{1}{\mathfrak{g}_{-3}} \oplus \underset{n-1}{\mathfrak{g}_{-2}} \oplus \underset{n = (n-1)+1}{\mathfrak{g}_{-1}}$, $[\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q] \subset \mathfrak{g}_{p+q}$
h 　 x 　 e f
$[e, f] = x$
$[x, e] = h$

<u>2次形式</u>：$\varphi : \underset{n-1}{e} \times e \to \mathbb{R}$ 　 $\varphi(u, v) = [u, [v, f]]h$
obstruction $= 0$ で、X上へ

- X上で、$C_x \subset TX$
<u>2次コーン</u>
$Z \ni (x, \ell)$, $\underset{1}{\ell} \subset \underset{n}{\Pi} \to \ell \subset \Pi \subset T_x X$



- Y上で、$C_Y \subset D_Y = D \subset TY$
$W \otimes U$
$Z \ni (y, \Pi) \to \Pi \subset D_y \subset T_y Y$



re. 金沢研究会2へ

◎
$$\begin{tikzcd} P^1 \arrow[r] & Z^{3n} \arrow[dl] \arrow[dr] & Q^{n-1} \arrow[l] \\ Y^{3n-1} & & X^{2n+1} \end{tikzcd}$$
(with D)

- (X, D, LC, h)に対して、
$\underset{n}{E} = \underset{n-1}{E_1} \oplus \underset{1}{E_2} \subset \underset{2n-1}{E^2} \subset \underset{3n-2}{E^3} \subset \underset{3n-1}{E^4} \subset \underset{3n}{TZ}$ 　（差：$n-1$, $n-1$, 1, 1）

- $\underset{3n}{\mathfrak{m}} = \underset{1}{\mathfrak{g}_{-5}} \oplus \underset{1}{\mathfrak{g}_{-4}} \oplus \underset{n-1}{\mathfrak{g}_{-3}} \oplus \underset{n-1}{\mathfrak{g}_{-2}} \oplus \underset{n = (n-1)+1}{\mathfrak{g}_{-1}}$, $[\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q] \subset \mathfrak{g}_{p+q}$
k 　 h 　 x 　 y 　 e f

$[e, f] = y$
$[y, e] = x$
$[x, e] = h$
$[h, f] = k$
$[x, y] = k$

Xでは
$[h, f] = k$
$[x, y] = k$
Yでは
$[y, e] = x$
$[x, e] = h$
$[x, y] = k$

<u>3次形式</u>：$\varphi : \underset{n-1}{e} \times e \times e \to \mathbb{R}$ 　 $\varphi(u, v, w) = [u, [v, [w, f]]]h$
obstruction $= 0$ で、X上へ

- X上で、$C_x \subset D_x = D \subset TX$
<u>3次コーン</u>
$Z \ni (x, \ell)$, $\underset{1}{\ell} \subset \underset{\substack{\text{Lag.} \\ n}}{L} \to \ell \subset L \subset \ell^{\perp} \subset D_x \subset T_x X$

- Y上で、$C_Y \subset \underset{2n-2}{D_1} \subset \underset{3n-3}{D_2} \subset TY$
$W \otimes U$
$Z \ni (y, \Pi) \to \Pi \subset D_1 \subset D_2 \subset \tilde{\Pi} \subset T_y Y$

re. 金沢研究会1へ