コーン場に付随した微分方程式

待田芳徳

○動機

$$J^2(2,1)^8 : (x,y,z,\overset{z_x}{p},\overset{z_y}{q},\overset{z_{xx}}{r},\overset{z_{xy}}{s},\overset{z_{yy}}{t}) \qquad \begin{cases} \theta_0 = dz - p\,dx - q\,dy \\ \theta_1 = dp - r\,dx - s\,dy \\ \theta_2 = dq - s\,dx - t\,dy \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$J^1(2,1)^5 : (x,y,z,p,q) \qquad \theta_0 = dz - p\,dx - q\,dy$$

$$\downarrow$$

$$J^0(2,1)^3 : (x,y,z)$$

① Goursat eq. $F(r,s,t) = 16s^3 + 3r^2s^2 - 18rst - 3r^3t - 9t^2 = 0$

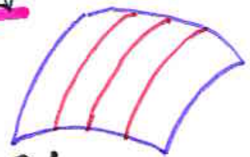
② Cartan eq. $\begin{cases} F_1(r,s,t) = s + \frac{1}{4}r^2 = 0 \\ F_2(r,s,t) = t - \frac{1}{12}r^3 = 0 \end{cases}$

$\left(J^2(2,1)^8 \supset \Sigma^7 = \{F=0\} \supset R^6 = \{F_1 = F_2 = 0\} \right.$

(i) ①は階数1 (i.e. $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial s} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix} = 1$), Monge系可積分；②は包合系 (⇒Cartan-Kähler)

(ii) (r,s,t)空間で、曲面①は曲線②の接線曲面

(iii) ①,②の解曲面は、特性曲線でfoliate



(iv) ①,②の無限小接触変換群の対称性は、例外群G_2の$\mathfrak{g}_2$

(cf. 1階PDE　H-J eq.
連立ODE　Hamilton eq.

なぜ成り立つのか
しくみは？本質は？

○立場

• 微分方程式

- ・数値解析
- ・関数解析
- ・大域解析
- ◎古典解析 → 求積法, 厳密解など
- ◎幾何解析 ─ 青本理論
- ◎代数解析 ─ 佐藤理論

• 求積法

PDE　　cf. ODE, ガロア

↓

ODEへの帰着

↓

特性曲線　　cf. 有限型, フロベニウス

↓

Monge特性系　　cf. Cauchy特性系

↓

Mongeコーン　　↓ 簡約空間

○ 2-ジェット空間

$$J^2(2,1):(x,y,z,p,q,r,s,t) \quad \begin{cases} \theta_0 = dz - p\,dx - q\,dy \\ \theta_1 = dp - r\,dx - s\,dy \\ \theta_2 = dq - s\,dx - t\,dy \end{cases} \quad \left(\begin{aligned} I &:= \langle \theta_0, \theta_1, \theta_2 \rangle_{alg} \\ \mathcal{I} &:= \langle \theta_0, \theta_1, \theta_2 \rangle_{diff} \end{aligned} \right.$$

$$\downarrow$$

$$J^1(2,1):(x,y,z,p,q) \qquad \theta_0 = dz - p\,dx - q\,dy$$

$$\downarrow$$

$$J^0(2,1):(x,y,z)$$

$$E^2 = I^\perp = \{X \in TJ^2 \mid \theta_0(X) = \theta_1(X) = \theta_2(X) = 0\}$$

$$= \left\langle \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$$

$$\left(\begin{aligned} \frac{d}{dx} &:= \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + r\frac{\partial}{\partial p} + s\frac{\partial}{\partial q} \\ \frac{d}{dy} &:= \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + s\frac{\partial}{\partial p} + t\frac{\partial}{\partial q} \end{aligned} \right.$$

$$E^1 = \partial E^2 = E^2 + [E^2, E^2] = \{X \in TJ^2 \mid \theta_0(X) = 0\}$$

$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}, \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$$

$$\left(d\theta_0 \equiv 0 \pmod{I} \right.$$

$$Char(E^2) = 0, \quad Char(E^1) = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$$

(<u>Cauchy 特性系</u>

$$Char(D) := \{X \in D \mid X \lrcorner\, d\omega \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ D^\perp),\ \omega \in D^\perp\}$$

$$= \{X \in D \mid L_X(D) \subset D\}$$

完全積分可能

$$TJ^2_8 \supset E^1_7 \supset E^2_5 \supset Char(E^1)_3$$

$\mathbb{R}$	V^*	V	S^2V^*
$\frac{\partial}{\partial z}$	$\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}$	$\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}$	$\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
θ_0	θ_1, θ_2	dx, dy	dr, ds, dt

$$\underbrace{\underbrace{\theta_0 \quad \theta_1, \theta_2}_{J^1} \quad dx, dy \quad dr, ds, dt}_{J^2}$$

• 単独2階PDE

• $F(x,y,z,p,q,r,s,t)=0$

$J^2(2,1) \underset{\text{codim}1}{\supset} \Sigma^7 = \{(x,y,z,p,q,r,s,t) \mid F=0\}$

$\downarrow$ (· r, s, t で regular · submersion)

$J^1(2,1)$

(解の存在と一意定理
解析的カテゴリー
包合系 ⇒ Cartan-Kähler)

$z=z(x,y)$ が $F=0$ の解（古典解）

Σ^7 での I.D の（2次元）積分多様体 S s.t. $dx\wedge dy \neq 0$
$TS \subset E^2_5$　　独立条件

$$\begin{array}{ccccccc} TJ^2_8 & \supset & E^1_7 & \supset & E^2_5 & \supset & Char(E^1)_3 \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ T\Sigma_7 & \underbrace{\supset}_{1} & D^1_6 & \underbrace{\supset}_{2} & D^2_4 & \supset & Char(D^1)_2 \\ & & \| & & \| & & \\ & & T\Sigma\cap E^1 & & T\Sigma\cap E^2 & & \\ & & \| & & & & \\ & & \partial D^2 & & & & \\ \theta_0 & & \theta_1,\theta_2 & & dx,dy & & \end{array}$$

local に $\Sigma / Char(D^1) = J^1(2,1)$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \supset & S \\ \downarrow & & \rotatebox{90}{$\simeq$} \\ J^1 & \supset & \{(x,y,z(x,y),z_x,z_y)\} \\ \downarrow & & \rotatebox{90}{$\simeq$} \\ J^0 & \supset & \{(x,y,z(x,y))\} \text{ グラフ} \end{array}$$

• $x=(x,y,z,p,q,r,s,t)\in\Sigma$
$\xi=\xi_1 dx+\xi_2 dy \in T^*_xV \subset T^*_x\Sigma$ が

$$F_r\xi_1^2+F_s\xi_1\xi_2+F_t\xi_2^2=0 \quad \text{特性方程式}$$

みたすとき、$\langle\xi\rangle$ $(\xi\neq 0)$ を 特性方向　　解の拡張が一意でない。

判別式 $\Delta=\frac{1}{4}F_s^2-F_rF_t=-\begin{vmatrix} F_r & \frac{1}{2}F_s \\ \frac{1}{2}F_s & F_t \end{vmatrix}$ $\begin{cases} <0 \Leftrightarrow 0\text{コ} \Leftrightarrow \text{楕円型} \\ =0 \Leftrightarrow 1\text{コ} \Leftrightarrow \text{放物型} \\ >0 \Leftrightarrow 2\text{コ} \Leftrightarrow \text{双曲型} \end{cases}$

ex.
$r+t=0$ (Laplace eq.)
$r=0$ (heat eq.)
$s=0 \sim r-t=0$ (wave eq.)

• 連立2階PDE

• $\begin{cases} F_1(x,y,z,p,q,r,s,t)=0 \\ F_2(x,y,z,p,q,r,s,t)=0 \end{cases}$

$J^2(2,1) \underset{\text{codim}2}{\supset} R^6 = \{(x,y,z,p,q,r,s,t) \mid F_1=F_2=0\}$ （両立性条件

$\downarrow$ （submersion

$J^1(2,1)$

$$\begin{cases} TJ^2_8 \supset E^1_7 \supset E^2_5 \supset \mathrm{Char}(E^1)_3 \\ \cup \quad\quad \cup \quad\quad \cup \quad\quad \cup \\ TR_6 \supset \underset{TR\cap E^1}{\underset{\shortparallel}{D^1_5}} \supset \partial D^2_\alpha \supset \underset{TR\cap E^2}{\underset{\shortparallel}{D^2_3}} \supset \mathrm{Char}(D^1)_1 \supset \mathrm{Char}(D^1)\cap \mathrm{Char}(D^2)=\{0\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathrm{Char}(D^2)_\beta \end{cases}$$

• $\mathrm{Char}(D^1)_1 = \langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \cap TR$

R上の各点で，$\mathrm{Char}(D^1)$は$\underset{\text{2次対称積}}{S^2V^*}$の1次元部分空間を定める．

1) $\langle \pm x^2 \rangle$ $\begin{bmatrix} \bullet & \\ & \end{bmatrix}$ 包合的 ex. $\begin{cases} s=0 \\ t=0 \end{cases}$

2) $\langle xy \rangle \sim \langle x^2-y^2 \rangle$ $\begin{bmatrix} & \bullet \\ \bullet & \end{bmatrix}$ 有限型 $\begin{cases} r=0 \\ t=0 \end{cases}$

3) $\langle x^2+y^2 \rangle$ $\begin{bmatrix} \times & \\ & \times \end{bmatrix}$ 有限型 $\begin{cases} r-t=0 \\ s=0 \end{cases}$

○ 1-ジェット空間

$$J^1(n,1)^{2n+1} : (x_i, z, p_i) \qquad \theta = dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i \qquad \left(\begin{array}{l} I := \langle \theta \rangle_{alg} \\ \mathcal{I} := \langle \theta \rangle_{diff} \end{array} \right.$$

$$\downarrow \pi$$

$$J^0(n,1)^{n+1} : (x_i, z)$$

$$TJ^1_{2n+1} \supset \underset{I^\perp = \{\theta = 0\}}{C_{2n}} \supset Char(C)_n$$

$\mathbb{R}$	V	V^*
$\frac{\partial}{\partial z}$	$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial z}$	$\frac{\partial}{\partial p_i}$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
θ	dx_i	dp_i

$E := W^\perp$ $\qquad$ W

$$\underbrace{\underbrace{\mathbb{R} \oplus V}_{J^0} \oplus V^*}_{J^1}$$

$$\left(\begin{array}{ll} E \oplus W \,(\subset D \subset T\Sigma) : & x = (x_i, z, p_i) \text{ での Monge系} \\ \bigcup_{x \in \pi^{-1}(x_0)} \pi_{*x}(E \oplus W) : & x_0 = (x_i, z) \text{ での Mongeコーン} \\ \quad = \pi_{*x}(E) & \end{array} \right.$$

● (単独) 1階 PDE

$$F(x_i, z, p_i) = 0$$

$$J^1(n,1) \underset{codim\,1}{\supset} \Sigma^{2n} = \{(x_i, z, p_i) \mid F = 0\}$$

$$\downarrow \text{(submersion} \quad J^0(n,1)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} TJ^1_{2n+1} & \underset{1}{\supset} & C_{2n} & \underset{n}{\supset} & Char(C)_n \\ \cup & & \cup & & \cup \\ T\Sigma_{2n} & \underset{1}{\supset} & D_{2n-1} & \underset{n}{\supset} & Char(D)_{n-1} = W \end{array} \right.$$

◎

$$\left\{ \begin{array}{c} J^1(n,1) \\ \cup \\ \underline{E} \to \Sigma^{2n} \leftarrow \underline{W} \\ \swarrow \qquad \searrow \\ N^{2n-1} \qquad J^0(n,1)^{n+1} \end{array} \right.$$

N^{2n-1}: 特性曲線の空間 接触構造

$J^0(n,1)^{n+1}$: Mongeコーン場

ex $n=2$ $F(x,y,z,p,q)=0$

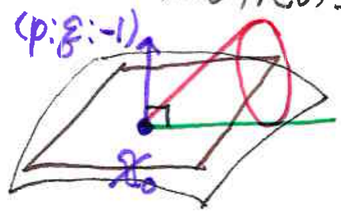
$\mathfrak{X}_0=(x_0,y_0,z_0)\in J^0(2,1)$: fix

$z=z(x,y)$ が $F=0$ の解で, $z_0=z(x_0,y_0)$ とする.

$z=z(x,y)$ のグラフの $\mathfrak{X}_0$ での接平面の方向比(法線)は $p_0:q_0:-1$ ($F(x_0,y_0,z_0,p_0,q_0)=0$

$\mathfrak{X}_0$ で p を動かすと q が決まる. ($F=0$ から ($F_q\neq 0$ として) $q=G(x,y,z,p)$)

接平面が動いて, $\mathfrak{X}_0$ 中心のコーンを包絡する. Monge コーンである.



$\llcorner J^0(2,1)$

$\mathfrak{X}_0\in J^0(n,1)$: fix

$T_{\mathfrak{X}_0}J^0=:V^{n+1}$

$\cup$

MC

n 次元

$((n-1)+1)$

◎

$I^{2n-1}=\{(V_1,V_n)\mid V_1\subset V_n\subset V\}$ (V_1: 1次元, V_n: n次元)

$P(V)=\{V_1\}$ ← I^{2n-1} → $P(V^*)=\{V_n\}$

$P(V)\supset P(MC)$ ($n-1$ 次元) $\longleftrightarrow$ $F(x_{i_0},z_0,p_i)=0$ なる超曲面 ($n-1$ 次元)

射影双対

$\left(\sum a_i dx_i+bz \longmapsto F\left(x_{i_0},z_0,-\frac{a_i}{b}\right)\right)$

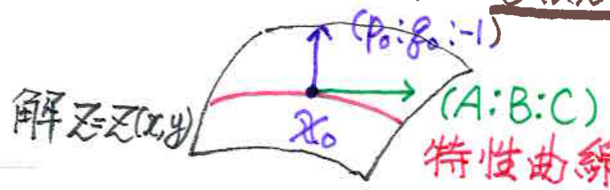
• 準線形1階PDE

$Ap+Bq=C$ （A,B,Cはx,y,zの関数） （$F=Ap+Bq-C=0$

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B}=\frac{dz}{C}$$ 特性方程式 on J^0

積分を $u(x,y,z)=C_1,\ v(x,y,z)=C_2$ （C_1,C_2は任意定数）

そのとき，任意関数φに対して $\varphi(u,v)=0$は $F=0$の一般解



Mongeコーンは
Monge直線

ex. $xp+yq=z$ （$F=xp+yq-z=0$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$ $y=C_1x,\ z=C_2x$

任意関数φに対して一般解は $\varphi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$

• 一般1階PDE

Lagrange-Charpit

$F(x,y,z,p,q)=0$

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=\frac{dz}{pF_p+qF_q}=\frac{dp}{-(F_x+pF_z)}=\frac{dq}{-(F_y+qF_z)}$$ 特性方程式 on J^1

（準線形のとき，$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B}=\frac{dz}{C}\left(=\frac{dp}{\square}=\frac{dq}{\square}\right)$

1つの積分を $G(x,y,z,p,q)=a$ (任意定数) とする.

$J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)}\neq 0$ ならば, $F=0,\ G=a$ を p,q について解ける: $p=P(x,y,z,a),\ q=Q(x,y,z,a)$

そのとき, 全微分方程式 $dz=P(x,y,z,a)dx+Q(x,y,z,a)dy$ は完全積分可能である.

それを積分して, 解 $f(x,y,z,a)$ が得られる. (全微分方程式を解いて,もう1つ任意定数

よって, 2個の任意定数をもち完全解となる.

ex. $F=p+q-pq=0$ ($F(p,q)=0$ のタイプ

$$\frac{dx}{1-q}=\frac{dy}{1-p}=\frac{dz}{p+q-2pq}=\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}$$

$dp=0$ から, $p=a$ (定数). $G(x,y,z,p,q)=p$ とすると, $J=-F_q\neq 0$.

$p=a$ を代入すると, $F(a,q)=0$, よって $q=Q(a)$ (一定)

全微分方程式 $dz=a\,dx+Q(a)\,dy$ の解は, $z=ax+Q(a)y+b$ (a,b は任意定数)

よって $F=0$ の完全解は, $z=ax+by+c$ ($F(a,b)=0$

一般解は, b を a の任意の関数, c に $g(a)$ を代入して,

$z=ax+by+g(a)$, $0=x+\dfrac{\partial b}{\partial a}+\dfrac{dg}{da}$ から a を消去して得られる.

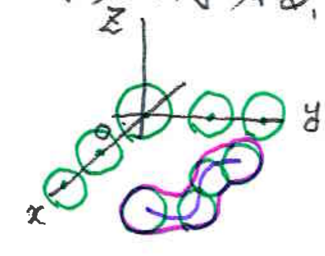
a で偏微分

ex. $z(p^2+q^2+1)=1$

・完全解 $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=1$

・一般解 $b=\varphi(a)$ 包絡面

・特異解 $z=\pm 1$



(例えば, $b=2a+1$
$(2x-y+1)^2+z^2=1$

※ 完全解 — $n=2$, $F(x,y,z,p,q)=0$ 任意定数2個

一般解 — 完全解の1-パラメータの包絡面

特異解 — 2-パラメータの完全解それ自身の包絡面

◎ Goursat eq. と Cartan eq.

①,②について,(i)~(iv)をみてみる.

$$F(r,s,t)=16s^3+3r^2s^2-18rst-3r^3t-9t^2=0$$

- $F_r=3(2rs^2-6st-3r^2t)$
  $F_s=6(8s^2+r^2s-3rt)$
  $F_t=-3(6rs+r^3+6t)$

$$\begin{vmatrix} F_r & \frac{1}{2}F_s \\ \frac{1}{2}F_s & F_t \end{vmatrix} = F_rF_t-\frac{1}{4}F_s^2 \equiv 0 \pmod F$$ (放物型,階数1

$F_r=\frac{1}{2}uF_s,\ \frac{1}{2}F_s=uF_t$ なる ${}^{\exists}u$ $\left(u=\frac{F_s}{2F_t}\ (F_t\neq 0)\right)$

$2rs^2-6st-3r^2t=u(8s^2+r^2s-3rt)$
$8s^2+r^2s-3rt=-u(6rs+r^3+6t)$

$dp=rdx+sdy \to rdx=dp-sdy$
$dq=sdx+tdy \to tdy=dq-sdx$
1式に dx^2dy, 2式に dx^3dy をかけて, r,t を消去

$$\left\{\begin{aligned} (dy&=1\cdot dy) \\ dx&=u\,dy \\ dp&=u^2dy \\ dq&=-\tfrac{1}{3}u^3dy \\ dz&=pdx+qdy=(pu+q)dy \end{aligned}\right.$$

$(x,y,z,p,q)\in J^1(2,1)$: fix, 接空間で
u fix で, 直線
u パラメータで,(3次 Lagrange)コーン

$dp=rdx+sdy$
$dq=sdx+tdy$ に代入

$$\left\{\begin{aligned} u^2&=ru+s \\ -\tfrac{1}{3}u^3&=su+t \end{aligned}\right.$$

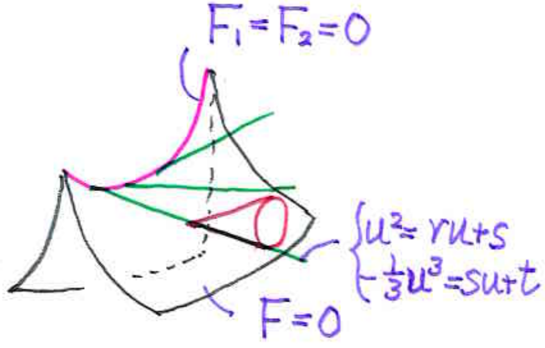
(r,s,t) 空間で
パラメータ u の直線群

uを消去する.

$f = u^2 - ru - s = 0 \to f_u = 2u - r = 0$

$g = \frac{1}{3}u^3 + su + t = 0 \to g_u = u^2 + s = 0$

$$\begin{cases} s = -\frac{1}{4}r^2 \\ t = \frac{1}{12}r^3 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} r = 2u \\ s = -u^2 \\ t = \frac{2}{3}u^3 \end{cases}$$



Goursat eq. $\updownarrow$ Cartan eq. $\overset{\longrightarrow}{\underset{?}{\longleftarrow}}$ 3次Mongeコーン $\downarrow$ Lagrange

● u:定数

$(x, y, z, p, q) \in J^2(u, 1)$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{pu+q} = \frac{dp}{u^2} = \frac{dq}{-\frac{u^3}{3}}$$

積分$V = V(x, y, z, p, q)$は, 次の1階PDEの解:

$$uV_x + V_y + (pu+q)V_z + u^2 V_p - \frac{u^3}{3}V_q = 0$$

曲線上で, $V(x, y, z, p, q) = C$ (定数)

独立な積分として,

$$\begin{cases} x - uy = C_1 \\ p - u^2 y = C_2 \\ q + \frac{u^3}{3}y = C_3 \\ z - uyp - yq + \frac{u^3}{3}y^2 = C_4 \end{cases}$$

Gを任意関数として,

$V = G(C_1, C_2, C_3, C_4) = G\left(x-uy,\ p-u^2y,\ q+\frac{u^3}{3}y,\ z-upy-qy+\frac{u^3}{3}y^2\right)$　一般解

あるいは, gを任意関数として,

$V = z-upy-qy+\frac{u^3}{3}y^2-g\left(x-uy,\ p-u^2y,\ q+\frac{u^3}{3}y\right)$　一般解

zに関する1階PDE

$z = upy+qy-\frac{u^3}{3}y^2+g\left(x-uy,\ p-u^2y,\ q+\frac{u^3}{3}y\right)$　中間積分

の解 $z=z(x,y)$は$\underline{F=0\text{の解}}$

任意の1変数関数$\underline{\varphi(x), \psi(x)}$に対して,

$z = z(x,y) = \varphi(x-uy)+\psi(x-uy)y+\frac{u^3}{3}y^2$

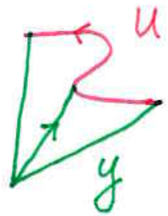
は, 次の1階PDEの解である:

$z = upy+qy-\frac{u^3}{3}y^2+\varphi(x-uy)$

(Cauchy問題
$z(x,0)=\varphi(x),\ z_y(x,0)=-u\varphi'(x)+\psi(x)$の解

$$Z^6$$

● $y \longrightarrow (C_1, C_2, C_3, C_4, u, y) \leftrightsquigarrow (x, y, z, p, q, u) \longleftarrow u$



$$\begin{cases} u \\ C_1 = -yu + x \\ C_2 = -yu^2 + p \\ C_3 = \frac{y}{3}u^3 + q \\ C_4 = \frac{y^2}{3}u^3 - pyu - qy + z \end{cases}$$

N^5: u-line

$$\begin{cases} y \\ x = uy + C_1 \\ p = u^2 y + C_2 \\ q = -\frac{u^3}{3}y + C_3 \\ z = \frac{u^3}{3}y^2 + C_2 uy + C_3 y + C_4 \end{cases}$$

$J^1(2,1)$: y-line

(x, y, z, p, q, u)
$= (x(u,y), y, z(u,y), p(u,y), q(u,y), u)$
$= (uy + C_1, y, \frac{u^3}{3}y^2 + C_2 uy + C_3 y + C_4, u^2 y + C_2, -\frac{u^3}{3}y + C_3)$

$F=0$の完全解 (C_1, C_2, C_3, C_4 定数)

Z^6上で、
$$\begin{cases} \alpha_1 = dx - u\,dy = 0 \\ \alpha_2 = dp - u^2 dy = 0 \\ \alpha_3 = dq + \frac{u^3}{3}dy = 0 \\ \alpha_4 = dz - (\frac{2}{3}u^3 + C_2 u + C_3)dy = 0 \end{cases} \longleftrightarrow$$

e_1 $U := \frac{\partial}{\partial u}$

e_2 $Y := \frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial x} + u^2\frac{\partial}{\partial p} - \frac{u^3}{3}\frac{\partial}{\partial q} + (\frac{2}{3}u^3 y + C_2 u + C_3)\frac{\partial}{\partial z}$

e_3 $X := [U, Y] = \frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial p} - u^2\frac{\partial}{\partial q} + (2u^2 y + C_2)\frac{\partial}{\partial z}$

e_4 $P := [U, X] = 2\frac{\partial}{\partial p} - 2u\frac{\partial}{\partial q} + 4uy\frac{\partial}{\partial z}$

e_5 $Q := [U, P] = -2\frac{\partial}{\partial q} + 4y\frac{\partial}{\partial z}$

e_6 $Z := [X, P] = -2\frac{\partial}{\partial z}$

$[Y, Q] = 6\frac{\partial}{\partial z}$

※ G_2のLie代数$\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_2$ 14次元

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-5} + \mathfrak{g}_{-4} + \mathfrak{g}_{-3} + \mathfrak{g}_{-2} + \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 + \cdots + \mathfrak{g}_5$ (第5種)

$e_6 \quad e_5 \quad e_4 \quad e_3 \quad e_1 e_2$

$[e_1, e_2] = e_3$ $\qquad [e_2, e_5] = e_6$
$[e_1, e_3] = e_4$ $\qquad [e_3, e_4] = e_6$
$[e_1, e_4] = e_5$

● ①′ $F = rt - s^2 = 0$

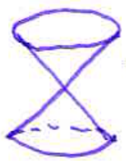
$F_r = t,\ F_s = -2s,\ F_t = r$

$\begin{vmatrix} F_r & \frac{1}{2}F_s \\ \frac{1}{2}F_s & F_t \end{vmatrix} = tr - s^2 = 0$ 階数1

$\begin{cases} t = -us \\ -s = ur \end{cases}$ なる $^\exists u$（定数）

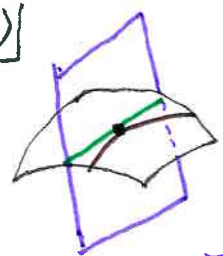
$\begin{cases} dy = 1\cdot dy \\ dx = u\,dy \\ dp = 0 \\ dq = 0 \\ dz = p\,dx + q\,dy \end{cases}$

(r,s,t)



$rt - s^2 = 0$

$J^1(2,1)$



コーンでなく，平面

$\begin{cases} x - uy = C_1 \\ p = C_2 \\ q = C_3 \\ z - uyp - yq = C_4,\ z = C_2uy + C_3y + C_4 \end{cases}$

$z = \varphi(x-uy) + \phi(x-uy)y$ は

$z = upy + qy + \varphi(x-uy)$ の一般解　$F=0$ の一般解

$z(x,0) = \varphi(x),\ z_y(x,0) = -u\varphi'(x) + \phi(x)$

①′ $F = t = 0$

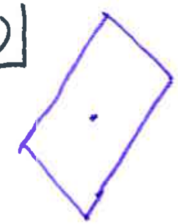
$F_r = 0,\ F_s = 0,\ F_t = 1$

$\begin{vmatrix} F_r & \frac{1}{2}F_s \\ \frac{1}{2}F_s & F_t \end{vmatrix} = 0$ 階数1

$u = 0$

$\begin{cases} dy = 1\cdot dy \\ dx = 0 \\ dp = 0 \\ dq = 0 \\ dz = p\,dx + q\,dy \end{cases}$

(r,s,t)



$t = 0$

$J^1(2,1)$

コーン，平面でなく，直線

$\begin{cases} x = C_1 \\ p = C_2 \\ q = C_3 \\ z - yq = C_4,\ z = C_3y + C_4 \end{cases}$

$z = \varphi(x) + \phi(x)y$ は

$z = qy + \varphi(x)$ の一般解　$F=0$ の一般解

$z(x,0) = \varphi(x),\ z_y(x,0) = \phi(x)$

※ Monge系, Mongeコーン

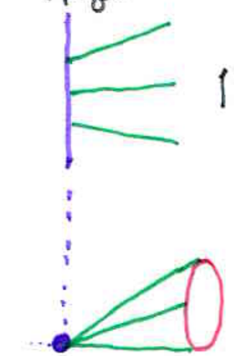
1階

$J^1 \supset \Sigma$

$\downarrow$

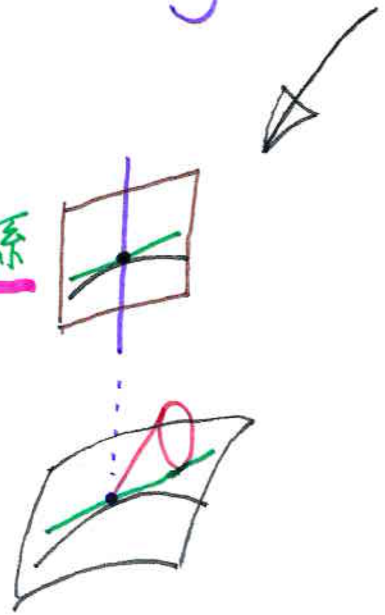
J^0

1階微分
(p, q)



1パラメータ

(x, y, z) Mongeコーン



Monge系

準線形のとき

(x, y, z)

コーンでなく、直線

2階

$J^2 \supset \Sigma$

$\downarrow$

J^1

$\downarrow$

J^0

2階微分
(r, s, t)

2パラメータ
↓
1パラメータ

(x, y, z, p, q)

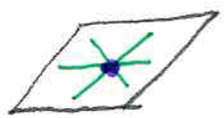
Legendreで
Lagrangeコーンになる

・2変数 { 放物 1つ / 双曲 2つ
・n変数 階数1

Monge-Ampèreのとき

$F = Ar + 2Bs + Ct + D + E(rt - s^2) = 0$

・$E \neq 0$



コーンでなく、平面

・$E = 0$. 準線形

コーン平面でなく、直線