コーン場に付随した微分方程式

待田　芳徳 (沼津高専)

1　はじめに

2 独立変数 1 未知関数の単独 2 階偏微分方程式 (PDE)

$$F(x,y,z,p,q,r,s,t)=0$$

と連立 2 階偏微分方程式系

$$G_1(x,y,z,p,q,r,s,t)=0,\ G_2(x,y,z,p,q,r,s,t)=0$$

を考える．ここで，x,y は $\mathbb{R}^2$ (あるいは，$\mathbb{C}^2$) での 2 独立変数, z は x,y の従属変数，$p=\frac{\partial z}{\partial x}, q=\frac{\partial z}{\partial y}, r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ である．

Goursat ([G]) は，次のいわゆる Goursat 方程式

$$\text{(i) } 9r^2+32s^3-36rst-12t^2(rt-s^2)=0$$

を考え，さらに，Cartan ([C]) は連立 PDE 系

$$\text{(ii) } r=\frac{1}{3}t^3,\ s=\frac{1}{2}t^2$$

も考えて，次を示した：

1. (i) 式は階数 1，即ち，放物型で，(ii) 式は包合系である．
2. (r,s,t) 空間において，曲面 (i) は，空間曲線 (ii) の接線曲面である．
3. (i) 式と (ii) 式の無限小接触変換群の対称性は，非コンパクト (スプリット) 型の例外群 G_2' の Lie 代数である．

そのとき，次の疑問が起こってくるだろう：(i) 式と (ii) 式はどうして出てきたのだろうか．対称性はどうしてわかるのだろうか．解をどうやって構成できるのだろうか．本質と普遍性は何だろうか．3 変数以上に拡張できるのだろうか．例外群 F_4 の対称性をもつ場合があるのだろうか．$\cdots\cdots$

これらの疑問に答えるのが，このノートの目的である．2 つのツイスター図式，および終結式・判別式を適用していく．[1]

[1]研究会では，以上のことはあまり言及せず，階数 2 の Lie 代数における幾何と微分方程式をプロトタイプとして述べた．

2　偏微分方程式とコーンとの関係

1 階と 2 階の場合の 1 未知関数単独の偏微分方程式を考える．方程式自身および解と，コーン (錐) との関係を確認しておこう．

- 1 階 PDE

$$F(x_i, z, p_i) = 0$$

を考える．ここで，x_i は $\mathbb{R}^n$ (あるいは，$\mathbb{C}^n$) での n 個の独立変数，z は x_i の従属変数，$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$.

$F = 0$ に対して，

$$\Sigma = F^{-1}(0) = \{F = 0\} \subset J^1 = J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

は 1-ジェット空間 J^1 の超曲面であり，射影 $\pi : \Sigma \longrightarrow J^0 = J^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ は全射であるとする．なお，1-ジェット空間 J^1 は，接触構造 $\omega = dz - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$ と接触分布 $D = \ker \omega$ をもつ．

各点 $m \in \Sigma \subset J^1$ に対して，一般に余次元 1 の超平面 $\Pi_m = T_m\Sigma \cap D_m \subset D_m$ をもち，$d\omega$-歪直交をとって，1 次元部分空間

$$E_m = \Pi_m^{\perp} \subset T_m\Sigma$$

が定義される．即ち，Σ 上に特性方向といわれる方向場 E が定義される．

$u \in J^0$ に対して，$(n-1)$ 次元部分多様体 $\Sigma_u = \pi^{-1}(u) \subset \Sigma$ は，$\Sigma_u \subset J^1_u \subset P(T^*_u J^0)$ だから，Σ_u での各方向場 E を射影 π することによって，$u \in J^0$ で一般に $n(= (n-1)+1)$ 次元コーン K_u が定義される：

$$K_u = \bigcup_{m \in \pi^{-1}(u)} \pi_* E_m.$$

従って，J^0 上で n 次元コーン場 K が定義される．特性方向場 $E \subset T\Sigma$ とコーン場 $K \subset TJ^0$ に対して，次をもつ：

$$\begin{array}{cc} J^1 \supset \Sigma & E_m \subset T_m\Sigma \\ \Big\downarrow \pi & \\ J^0 & K_u \subset T_u J^0. \end{array} \tag{1}$$

$T_m\Sigma \cap D_m$ での任意の (n 次元に一意に拡張されない) 特異 $(n-1)$ 次元積分要素は，特性方向 E_m を含む．古典解 $z = f(x_i)$ のグラフである解曲面 S は，コーン場 K に接していて，

$$T_u S \cap K_u = \pi_* E_m \ (1 \text{ 次元}) \quad (\exists m \in \pi^{-1}(u))$$

をもち，Legendre リフト $S' = j^1 f$ は，幾何的解と同様に特性方向場 E の積分曲線である特性曲線で葉層される．

例として，Hamilton-Jacobi の方程式と Hamilton の正準方程式系の関係をみればわかるであろう．

- 2 独立変数の 2 階 PDE

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

を考える．

$F = 0$ に対して，

$$\Sigma = F^{-1}(0) = \{F = 0\} \subset J^2 = J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

は 2-ジェット空間 J^2 の超曲面であり，射影 $\pi:\Sigma\longrightarrow J^1=J^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ は全射であるとする．なお，2-ジェット空間 J^2 は，2 次接触構造 $\omega_0=dz-pdx-qdy,\omega_1=dp-rdx-sdy,\omega_2=dq-sdx-tdy$ と 2 次接触分布 $D'=\{\omega_0=\omega_1=\omega_2=0\}$ をもち，1-ジェット空間 J^1 は，接触構造 $\omega=dz-pdx-qdy$, 接触分布 $D=\ker\omega$ をもつ．

各点 $m\in\Sigma\subset J^2$ に対して，特異 1 次元積分要素が 2 方向，1 方向，0 方向 (なし) に応じて，即ち，特性方向といわれる方向場が２つ E_1,E_2，１つ E，なしに応じて，方程式 $F=0$ は双曲型，放物型，楕円型という．楕円型のときは，複素化して考えることになる．また，3 変数以上では，特異積分要素全体は複雑になる．

放物型，双曲型のときは，それぞれ

$$K_u=\bigcup_{m\in\pi^{-1}(u)}\pi_*E_m,$$

$$K_{1u}=\bigcup_{m\in\pi^{-1}(u)}\pi_*E_{1m},\ K_{2u}=\bigcup_{m\in\pi^{-1}(u)}\pi_*E_{2m}$$

から，J^1 上で (2 次元)Lagrange コーン場 K, ２つの disjoint な 2 次元 non-Lagrange コーン場 K_1,K_2 が定義される．

$$\begin{array}{ccc} J^2\supset\Sigma & & E_m(\mathrm{or},\ \mathrm{E_{1m},E_{2m}})\subset \mathrm{T_m}\Sigma \\ \big\downarrow{\scriptstyle\pi} & & \\ J^1 & & K_u(\mathrm{or},\ \mathrm{K_1,K_2})\subset \mathrm{T_uJ^1}\end{array}\tag{2}$$

をもつ．

Monge-Ampère 方程式 $F=0$ のときは，J^1 上で退化したコーン場，即ち，平面場となり，放物型ならば (2 次元)Lagrange 平面場 K, 双曲型ならば２つの歪直交な 2 次元 non-Lagrange 平面場 K_1,K_2 が定義される．

放物型の方程式 $F=0$ において，古典解 $z=f(x,y)$ のグラフである解曲面 S の Legendre リフト $S'=j^1f\subset J^1$ は，コーン場 K に接していて，

$$T_uS'\cap K_u=\pi_*E_m\ (1\text{ 次元})\quad(\exists m\in\pi^{-1}(u))$$

をもち，2 次 Legendre リフト $S''=j^2f\subset\Sigma$ は，幾何的解と同様に特性方向場 E の積分曲線である特性曲線で葉層される．

双曲型の方程式 $F=0$ において，S' は２つのコーン場 K_1,K_2 に横断的に交わり，

$$T_uS'\cap K_{iu}=\pi_*E_{im}\ (1\text{ 次元})\quad(\exists m\in\pi^{-1}(u),\ i=1,2)$$

をもち，S'' は特性方向場 E_1,E_2 の積分曲線である２つの特性曲線で葉層される．

3　Lagrange コーン場に付随した 2 階 PDE

3 変数以上の 2 階 PDE で，特性方向場をもつ特別なクラスを，intrinsic, coordinate-free に定式化することを目標とする．[T] での議論の本質，普遍性を探ってきた一つの結論である．途中の

経過報告は [M1],[M2] で述べられている．1-ジェット空間を一般化した $(2n+1)$ 次元接触多様体上で考えて，n 次元コーン場を設定する．

- シンボル代数

2-ジェット空間 $J^2 = J^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : (x_i, z, p_i, p_{ij})$ は，2 次接触構造 $\omega_0 = dz - \sum_{i=1}^n p_i dx_i, \omega_i = dp_i - \sum_{j=1}^n p_{ij} dx_j (i = 1, \cdots, n)$ をもつ．$J^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ のシンボル代数は,

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}_{-3} \oplus \mathfrak{c}_{-2} \oplus \mathfrak{c}_{-1} = \mathbb{R} \oplus V^* \oplus (V \oplus S^2(V^*)) = \langle \frac{\partial}{\partial z} \rangle \oplus \langle \frac{\partial}{\partial p_i} \rangle \oplus (\langle \frac{d}{dx_i} \rangle \oplus \langle \frac{\partial}{\partial p_{ij}} \rangle),$$

である，ここで，$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^n p_{ij} \frac{\partial}{\partial p_j}$. 双対基底は,

$$\omega_o \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z},\ \omega_i \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial p_i},\ dx_i \leftrightarrow \frac{d}{dx_i},\ dp_{ij} \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial p_{ij}}$$

からなる．分布 $\mathfrak{c}_{-1}$ は，ω_0, ω_i の零化である：$\mathfrak{c}_{-1} = \{\omega_0 = \omega_i = 0\}$.

2 階偏微分方程式

$$F(x_i, z, p_i, p_{ij}) = 0$$

に対して,

$$\Sigma = F^{-1}(0) = \{F = 0\} \subset J^2$$

は 2-ジェット空間 J^2 の超曲面であり，射影 $\pi : \Sigma \longrightarrow J^1$ は全射であるとする．単独方程式のため，$\Sigma \subset J^2$ の各点の接空間で，余次元 1 の部分空間 $\mathfrak{f} \subset S^2(V^*)$ が定義される．双対をとって，1 次元部分空間 $\mathfrak{f}^\perp \subset S^2(V)$ をもつ．ここで，$\mathfrak{f}^\perp = \langle e^2 \rangle$ となるベクトル $e \in V$ が存在すると仮定する．このとき，$F = 0$ は階数 1 をもつ 2 階 PDE という．

そのとき，Σ 上に特性系と呼ばれる分布

$$D = E \oplus S^2(E^\perp),\ D' = S^2(E^\perp)\ (\subset \mathfrak{c}_{-1})$$

を定義する．ここで，$E = \langle e \rangle$, そして $\dim S^2(E^\perp) = \frac{n(n-1)}{2}$ である．完全積分可能であると仮定する．局所的に，葉層空間 $Z^{3n} = \{F = 0\}/\mathcal{D}'$, $N^{3n-1} = \{F = 0\}/\mathcal{D}$ をもち，射影 $\Sigma = \{F = 0\} \longrightarrow Z,\ Z \longrightarrow N,\ Z \longrightarrow J^1$ をもつことから，階数 1 をもつ 2 階 PDE に対するツイスター図式をもつ：

$$\begin{array}{ccc} & Z^{3n} & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ (J^1)^{2n+1} & & N^{3n-1}. \end{array}$$

$\Sigma = \{F = 0\}$ 上の $E = \langle e \rangle$ によって誘導される特性方向場が Z 上に定義される．その流れによる軌道空間が N に他ならない．また，射影 π_1 によって，J^1 上に Lagrange コーン場が定義される．Z の接空間のシンボル代数は

$$\mathfrak{m} = W \oplus U \oplus W \otimes U^* \cong J^1(n-1, 2),$$

ここで，$\dim W = 2, \dim U = n-1, \dim W \otimes U^* = 2(n-1)$ である．分布 $U \oplus W \otimes U^*$ は，ある 2 つの 1-形式 (ω_0 から誘導される)ϖ_0 と ϖ_1 の零化である．

簡単な例として，$F = p_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = 0$ がある．一般解は，$z = f(x_2, \cdots, x_n)x_1 + g(x_2, \cdots, x_n)$ である．特性系は，$D = \langle \frac{d}{dx_1}, \ \frac{\partial}{\partial p_{ij}} \ (2 \le i, j \le n)\rangle$ である．

• Lagrange コーン場に付随した 2 階 PDE

(M, D, K) が，Lagrange コーン場に付随した 2 階 PDE [2]であるとは，

(i) M は，接触分布 D をもつ $(2n+1)$ 次元接触多様体である．

(ii) K は，Lagrange コーン場，即ち，$K_m \subset D_m \ (m \in M)$ は $\mathbb{R}^*$(あるいは，$\mathbb{C}^*$) 不変 (n 次元)Lagrangian であり，そして各 K_m は微分同相である．

そのとき，それぞれファイバー $P^{2n}, P^{2n-1}, L^{n-1} = L_m = P(K_m)$ をもつファイバー束

$$
\begin{array}{c}
P(TM) \supset P(D) \supset Z = P(K) \\
\big\downarrow \\
M^{2n+1}.
\end{array}
$$

から，(M, D, K) に付随したファイバー束をもつ：

$$
\begin{array}{ccc}
L^{n-1} & \longrightarrow & Z^{3n} \\
 & & \big\downarrow \pi \\
 & & M^{2n+1}.
\end{array}
$$

Lagrange コーン場に付随した 2 階 PDE(M, D, K) から，Lagrange-Grassmann 射影双対を通して，階数 1 をもつ 2 階 PDE を構成する．$D_m(m \in M)$ はシンプレクティック形式 $\Omega = d\theta \ (D = \ker\theta)$ をもつシンプレクティックベクトル空間であるので，一般のシンプレクティックベクトル空間 (V^{2n}, Ω) を考える．V_1 を 1 次元 (等方的) 部分空間，V_n を (n 次元)Lagrange 部分空間とする．次の Lagrange-Grassmann 射影双対であるツイスター図式をもつ：

$$
\begin{array}{ccc}
 & I = \{V_1 \subset V_n\} & \\
\swarrow & & \searrow \\
P^{2n-1} = \{V_1\} & & LG_n^{\frac{n(n+1)}{2}} = \{V_n\} \\
(x_i, p_i) & \rightsquigarrow & (a_{ij}) \\
\cup & & \cup \\
L & & R(L) \supset \tilde{L}
\end{array}
$$

$L = L_m = P(K_m)$ は，接触射影空間 P^{2n-1} の Legendre 部分多様体である．L と (横断的とは限らない) 交わる Legendre 平面 P^{n-1} 全体の集合 $R(L)$ は，次元勘定：$\frac{n(n-1)}{2} + (n-1) = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ から，LG_n の超曲面である．$R(L)$ の定義方程式 $f(a_{ij}) = 0$ は，L と P^{n-1} の間の終結式[3]である．点

[2] これは脱原発ならぬ脱方程式である．思い出すのは，線形微分方程式を D 加群ととらえる見方である．

[3] 終結式とは，連立代数方程式が共通解をもつかどうかを判定する式である．n 変数 n 個 (resp.$n+1$ 個) の同次 (resp. 非同次) 多項式で調べる．すべて 1 次式のときは，終結式は行列式に他ならない．

$m \in M$ から全体の M へ広げることによって，2 階 PDE$f(p_{ij})=0$ ができるが，$\mathrm{rank}(\frac{\partial f}{\partial p_{ij}})=1$ をもつことより，階数 1 をもつ 2 階 PDE が得られる．階数 1 をもつ 2 階 PDE を，intrinsic, coordinate-free に定式化したものが Lagrange コーン場に付随した 2 階 PDE であるといえる．[4]

L と接する Legendre 平面 P^{n-1} 全体の集合 $\tilde{L}$ は，一般に $n-1$ 次元である L の双対空間である．点 $m \in M$ から全体の M へ広げることによって，包合系である連立 2 階 PDE 系が得られる．

コーンの各母線をパスの方向としてとらえて，リフトすることによって，パスの幾何が考えられる．1 階偏微分方程式と連立常微分方程式系の対応は，コーン構造とパス構造の関係をもつが，このクラスの 2 階偏微分方程式に対しても，コーン構造とパス構造の関係をもつことになる．

簡単な例として，Lagrange コーン K として Lagrange 平面 $\{p_i=0\}$，即ち，Legendre 平面 $L=P(K)=P^{n-1}$ をとることによって，退化した Monge-Ampère 方程式 $\det(p_{ij})$ =Hess$(z)=0$ がある．L の双対空間 $\tilde{L}$ は，LG_n で 1 点である．

- 解の構成

n 次元多様体 W から Z へのはめ込み $\iota : W \longrightarrow Z$ が，(M,D,K) の幾何的解であるとは，

1. $\pi_1 \circ \iota(W)$ は，M での (特異点を許す)Legendre 多様体である，

2. $\pi_1 \circ \iota(W)$ は K に接していて，$\pi_{1*}\iota_* T_x W \cap K_{\iota(x)} = \langle v \rangle$ 　(v はコーンの母線方向，$x \in W$).

M での $\pi_1 \circ \iota(W)$ も解という．幾何的解は，コーンの母線方向の Legendre リフトの流れによって葉層される．

次のツイスター図式を通して，(幾何的) 解を構成する：

$$\begin{array}{ccccc} L^{n-1} & \longrightarrow & Z^{3n} & \longleftarrow & P^1 \\ & \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 & \\ M^{2n+1} & & & & N^{3n-1} \\ \cup & & & & \cup \\ \tilde{S}^n & & & & S^{n-1} \end{array}$$

N は，特性方向の流れの軌道空間である．N が $(2(n-1),3(n-1),3n-1)$ 型の分布 D をもつと仮定する．そのとき，N での任意の $(n-1)$ 次元 D-部分多様体 S をとり，逆写像 π_2^{-1} によって Z での (n 次元) 幾何的解 S' を得て，射影 π_1 によって M での (n 次元) 解 $\tilde{S}$ を得る．

- 例と一般化

第 2 種旗多様体である接触多様体において，不変 3 次 Lagrange コーン場から Lagrange コーン場に付随した 2 階 PDE と解が構成される．A 型, BD 型, 例外型があり，C 型はない．くわしくは後述の手書きを見よ．

2 変数の場合，次のようである：
$A_3=D_3$ 型：$(rt-s^2-r-t+1)\cdot(rt-s^2+r+t+1)=0$,
G_2 型：$9r^2+32s^3-36rst-12t^2(rt-s^2)=0$.

[4]退化しているところに，面白いこと，新しいことが見出される．「退化」の改新である．

G_2 型をみてみよう．G_2 型第 2 種旗多様体である 5 次元接触多様体 M^5 において，各点 $m \in M$ での接空間 T_mM の接触分布 D_m は 2 変数 3 次同次多項式の空間 $S^3(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}^4$ とみなせて，$SL(2,\mathbb{C})(\subset Sp(2,\mathbb{C}))$ が作用する．3 次 Lagrange コーンは完全立方式である．接触形式 $\omega = dw + udv - vdu$ に関するねじれ 3 次曲線である Legendre 曲線

$$P^1 \supset \mathbb{C} \longrightarrow L \subset P^3, \quad u \longmapsto (u, v = -\frac{1}{2}u^2, w = \frac{1}{6}u^3)$$

に対して，L の双対曲線 $\tilde{L}$ は，

$$a = -u,\ b = \frac{1}{2}u^2,\ c = -\frac{1}{3}u^3$$

である．L の $R(L)$ の終結式 $R_L = 0$ は，２つの方程式

$$f_1 = -\frac{1}{2}u^2 - au - b = 0, \qquad f_2 = \frac{1}{6}u^3 - bu - c = 0$$

の共通解もつ条件式で，Sylvester 行列式

$$\begin{aligned} R_L = R(f_1, f_2) &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -a & -b & & \\ & -\frac{1}{2} & -a & -b & \\ & & -\frac{1}{2} & -a & -b \\ \frac{1}{6} & 0 & -b & -c & \\ & \frac{1}{6} & 0 & -b & -c \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{8}c^2 - \frac{4}{9}b^3 + \frac{1}{2}abc + \frac{1}{6}a^2(b^2 - ac) = 0. \end{aligned}$$

で表わされる．-72 をかけることによって，$R(L)$ の定義方程式は，

$$9c^2 + 32b^3 - 36abc - 12a^2(b^2 - ac) = 0$$

である．$a \to t, b \to s, c \to r$ とすることによって，不変 3 次 Lagrange コーン場に付随した 2 階 PDE

$$9r^2 + 32s^3 - 36rst - 12t^2(rt - s^2) = 0$$

が得られる．包合系である連立 2 階 PDE 系は，

$$r = \frac{1}{3}t^3, \quad s = \frac{1}{2}t^2$$

となる．これらは，冒頭の微分方程式 (i),(ii) に他ならない．

4　コーン場に付随した1階PDE

1階PDEを拡張して，0-ジェット空間を一般化した$(n+1)$次元多様体上で考えて，$(k+1)$次元部分コーン場を設定する．n次元コーンの部分コーンへのreductionである．いろいろな次元のコーンがありうるため，Lagrangeコーン場に付随した2階PDEの設定よりは複雑になる．

- シンボル代数

1-ジェット空間 $J^1 = J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : (x_i, z, p_i)$ は，接触構造 $\omega = dz - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$ をもつ．$J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ のシンボル代数は，

$$\mathfrak{c}^1 = \mathfrak{c}_{-2} \oplus \mathfrak{c}_{-1} = \mathbb{R} \oplus (V \oplus V^*) = \langle \frac{\partial}{\partial z} \rangle \oplus (\langle \frac{d}{dx_i} \rangle \oplus \langle \frac{\partial}{\partial p_i} \rangle)$$

である，ここで，$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial z}$. 双対基底は，

$$\omega \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z},\ dx_i \leftrightarrow \frac{d}{dx_i},\ dp_i \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial p_i}$$

からなる．分布 $\mathfrak{c}_{-1}$ は，ω の零化である：$\mathfrak{c}_{-1} = \{\omega = 0\}$.

1階偏微分方程式

$$F(x_i, z, p_i) = 0$$

に対して，

$$\Sigma = F^{-1}(0) = \{F = 0\} \subset J^1$$

は1-ジェット空間 J^1 の超曲面であり，射影 $\pi : \Sigma \longrightarrow J^0$ は全射であるとする．単独方程式のため，$\Sigma \subset J^1$ の各点の接空間で，余次元1の部分空間 $\mathfrak{f} \subset V^*$ が定義される．双対をとって，特性方向である1次元部分空間 $\mathfrak{f}^\perp = \langle E \rangle \subset V$ をもつ．V の E を含む $k+1$ 次元部分空間 W が与えられると仮定する：$V \supset W \supset E$. このとき，$F = 0$ は<u>階数 $k+1$ をもつ1階PDE</u>という．

そのとき，Σ 上に特性系と呼ばれる分布

$$D = E \oplus W' (:= (V^*/W^\perp)^\perp) \subset V,\ D' = W^\perp \subset V^*$$

を定義する．ここで，$\dim D' = \dim W^\perp = n - k - 1$, そして $\dim D = \dim E \oplus W' = 1 + (n - k - 1) = n - k$ である．完全積分可能であると仮定する．局所的に，葉層空間 $Z^{n+k+1} = \{F = 0\}/\mathcal{D}'$, $N^{2k+1} = \{F = 0\}/\mathcal{D}$ をもち，射影 $\Sigma = \{F = 0\} \longrightarrow Z,\ Z \longrightarrow N,\ Z \longrightarrow J^0$ をもつことから，階数 $k+1$ をもつ1階PDEに対するツイスター図式をもつ：

$$\begin{array}{ccc} & Z^{n+k+1} & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ (J^0)^{n+1} & & N^{2k+1}. \end{array}$$

$\Sigma = \{F = 0\}$ 上の E によって誘導される特性方向場が Z 上に定義される．射影 π_1 によって，J^0 上にコーン場が定義される．

- コーン場に付随した 1 階 PDE

(M, K) が，<u>コーン場に付随した 1 階 PDE</u> であるとは，

(i) M は，$(n+1)$ 次元多様体である．

(ii) K は，$(k+1)$ 次元コーン場，即ち，$K_m \subset T_m M$ $(m \in M)$ は $\mathbb{R}^*$(あるいは，$\mathbb{C}^*$) 不変 ($(k+1)$ 次元) 部分集合であり，そして各 K_m は微分同相である．

そのとき，それぞれファイバー $P^n, L^k = L_m = P(K_m)$ をもつファイバー束

$$\begin{array}{c} P(TM) \supset Z = P(K) \\ \big\downarrow \\ M^{n+1}. \end{array}$$

から，(M, K) に付随したファイバー束をもつ：

$$\begin{array}{ccc} L^k & \longrightarrow & Z^{n+k+1} \\ & & \big\downarrow \pi \\ & & M^{n+1}. \end{array}$$

コーン場に付随した 1 階 PDE(M, K) から，射影双対を通して，階数 $k+1$ をもつ 1 階 PDE を構成する．接空間 $T_m M (m \in M)$ を一般のベクトル空間 V^{n+1} と考えて，V_1 を 1 次元部分空間，V_n を n 次元部分空間とする．次の射影双対であるツイスター図式をもつ：

$$\begin{array}{ccccc} & & I_L = \{V_1 \subset V_n\} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ P^n = \{V_1\} & & & & (P^n)^* = \{V_n\} \\ (x_i) & & \rightsquigarrow & & (y_i) \\ \cup & & & & \cup \\ L & & & & D(L) \end{array}$$

$L = L_m = P(K_m)$ は，射影空間 P^n の k 次元部分多様体である．L を含む超平面 P^{n-1} 全体の集合 $D(L)$ は，次元勘定：$(n-k-1)+k = n-1$ から，一般に $(P^n)^*$ の超曲面である．$D(L)$ の定義方程式 $f(y_i) = 0$ は，L と P^{n-1} の間の判別式[5]である．点 $m \in M$ から全体の M へ広げることによって，1 階 PDE$f(p_i) = 0$ ができるが，$\mathrm{rank}(\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}) = k+1$ をもつことより，階数 $k+1$ をもつ 1 階 PDE が得られる．階数 $k+11$ をもつ 1 階 PDE を，intrinsic, coordinate-free に定式化したものがコーン場に付随した 1 階 PDE であるといえる．

簡単な例として，(退化した) アイコナール方程式 $p_1^2 + \cdots + p_{k+1}^2 - 1 = 0$ $(0 \leq k \leq n-1)$ がある．

- 解の構成

[5]判別式とは，単独代数方程式が重複解をもつかどうかを判定する式である．n 変数 1 個の同次 (resp. 非同次) 多項式の n 個 (resp. 元の式と n 個) の偏微分=0 の終結式である．2 次式のときは，行列式である．

n 次元多様体 W から Z へのはめ込み $\iota : W \longrightarrow Z$ が，(M, K) の幾何的解であるとは，

1. $\pi_1 \circ \iota(W)$ は，M での (特異点を許す) 多様体である，
2. $\pi_1 \circ \iota(W)$ は K に接していて，$\dim(\pi_{1*}\iota_* T_x W \cap K_{\iota(x)}) = 1 \quad (x \in W)$.

M での $\pi_1 \circ \iota(W)$ も解という．幾何的解は，$\mathcal{D}$ の積分多様体 R^{n-k} によって葉層される．

次のツイスター図式を通して，コーンに付随した 1 階 PDE の (幾何的) 解を構成する：

$$
\begin{array}{ccccc}
L^k & \longrightarrow & Z^{n+k+1} & \longleftarrow & R^{n-k} \\
 & \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 & \\
M^{n+1} & & & & N^{2k+1} \\
\cup & & & & \cup \\
\tilde{S}^n & & & & S^k
\end{array}
$$

N は，$\mathcal{D}$ の積分多様体 R^{n-k} の軌道空間である．N が $(2k+1)$ 次元接触構造をもつと仮定する．そのとき，N での任意の (k 次元)Legendre 部分多様体 S をとることによって，逆写像 π_2^{-1} によって Z での (n 次元) 幾何的解 S' を得て，射影 π_1 によって M での (n 次元) 解 $\tilde{S}$ を得る．

- 例と一般化

第 1 種旗多様体である Hermite 対称空間において，不変コーン構造から構成される．くわしくは後述の手書きをみよ：

$$
\begin{aligned}
A_{2n-1} &: (M = G_{n,2n}, L = P^{n-1} \times P^{n-1}), \quad D(L) : \det(q_{ij})_{1 \le i,j \le n} = 0,\ ((p_k) = (q_{ij})) \\
C_n &: (M = LG(2n), L = P^{n-1}), \quad D(L) : \det(q_{ij})_{1 \le i,j \le n} = 0,\ (q_{ij} = q_{ji}) \\
D_n &: (M = NG(2n), L = G_{2,n}), \quad D(L) : \mathrm{pf}(q_{ij})_{1 \le i,j \le n} = 0,\ (q_{ij} = -q_{ji}) \\
D_{2k+2} &: (M = Q^n, L = Q^{n-2})\ (n = 2k), \quad D(L) : \text{quadratic form } (\deg = 2) \\
E_7 &: (M = E_7/E_6 \times U(1), L = E_6/SO(10) \times U(1)), \quad D(L) : \text{Freudenthal det } (\deg = 3).
\end{aligned}
$$

$B_2 = C_2$ 型をみてみよう．$B_2 = C_2$ 型第 1 種旗多様体である 3 次元 Lagrange-Grassmann 多様体 M^3 において，各点 $m \in M$ での接空間 $T_m M$ は 2 変数 2 次同次多項式の空間 $S^2(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}^3$ とみなせて，$SL(2, \mathbb{C}) (\subset GL(3, \mathbb{C}))$ が作用する．2 次コーンは完全平方式である．M での局所座標系 $\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}$ において，コーン K は，$4ac - b^2 = 0$ で表わされる．射影双対 $D(L) = L^\vee = P(K^\vee)$ は，双対射影空間 $(P^2)^* : [p_1, p_2, p_3]$ において，$p_1 p_3 - p_2^2 = 0$ で表わされる．$p_1 = \frac{\partial \phi}{\partial c}, p_2 = \frac{\partial \phi}{\partial b}, p_3 = 1$ とおくことによって，不変 2 次コーン場に付随した 1 階 PDE

$$
F = \frac{\partial \phi}{\partial c} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial b} \right)^2 = 0
$$

が得られる．

References

[C] E. Cartan, *Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre*, Ann. Ec. Normale 27 (1910), pp.109–192.

[G] E. Goursat, *Leçon sur l'intégration des équations aux dérivées du second ordre à deux variables indépendants I,II*, Hermann, Paris, 1898.

[M1] Y. Machida, *Goursat equations and twistor theory –two dualities–*, RIMS, Kokyuroku Vol.1502 (2006), pp.125–139.

[M2] Y. Machida, 「ツイスターから眺める微分方程式」, 数理の玉手箱, 遊星社, 2010.

[T] A. Tsuchiya, 「2 階偏微分方程式の幾何学的理論」, 名古屋大学数学教室, 1981.

• Homogeneous Ansatz

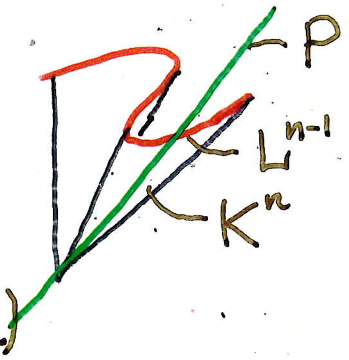
× $L = P(K) \circlearrowleft G_0$ homogeneous
ex. symmetric sp.

$M, Z, N \circlearrowleft G$ homogeneous
including G_0 as subgr.

simple Lie group

2nd kind flag mfd. (contact type)

M^{2n+1} $\quad \mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1}}_{1 \quad 2n} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$



(n-dim.) cubic Legendre cone str.

A, BD, exceptional type

no C type (projective contact str.)

• A type : Lagrange contact str.

1) contact distri. $D = \underset{n}{D_1} \oplus \underset{n}{D_2}$ (D_i : Lag.)

② proj. cone $L = P^{n-1}(D_1) \cup P^{n-1}(D_2)$ (D_i : cone degenerate

3) auto. $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+2,\mathbb{C})$

• BD type : Lie contact str.

1) $D = \underset{2}{W} \otimes \underset{n}{V}$ $\quad (V, g)$

Segre cone
linear + quadratic
reducible

② $L = P^1(W) \times \underset{\text{null}}{Q^{n-2}(V)} \subset P^1(W) \times P^{n-1}(V) \hookrightarrow P^{2n-1}(W \otimes V)$

3) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{o}(n,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n+4,\mathbb{C})$

- *exceptional type* (cubic irreducible)

G_2: $5 = 1 + \underset{2}{4}$

1) $\underset{4}{D} = S^3(\underset{2}{V})$

② $\underset{1}{L} = P^1(V)$ — [v⊙v⊙v] twisted cubic Veronese

3) $\mathfrak{g}_0 = \underbrace{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}_{V^2} \oplus \mathbb{C}$

F_4: $15 = 1 + \underset{7}{14}$

1) $\underset{14}{D} \underset{\text{irr.}}{\subset} \Lambda^3(V)$

② $\underset{6}{L} = LG(\mathbb{C}^6)$ — <u∧v∧w> Lag. basis — sym. matrix of degree 3

3) $\mathfrak{g}_0 = \underbrace{\mathfrak{sp}(3,\mathbb{C})}_{(V^6,\Omega)} \oplus \mathbb{C}$

E_6: $21 = 1 + \underset{10}{20}$

1) $\underset{20}{D} = \Lambda^3(V)$

② $\underset{9}{L} = G_3(\mathbb{C}^6)$ — <u∧v∧w> Plücker — matrix of degree 3

3) $\mathfrak{g}_0 = \underbrace{\mathfrak{sl}(6,\mathbb{C})}_{V^6} \oplus \mathbb{C}$

E_7: $33 = 1 + \underset{16}{32}$

1) $\underset{32}{D} \underset{\text{irr}}{\subset} \Lambda^3(V)$

② $\underset{15}{L} = NG(\mathbb{C}^{12})$ — alt. matrix of degree 6

3) $\mathfrak{g}_0 = \underbrace{\mathfrak{so}(12,\mathbb{C})}_{(V^{12},g)} \oplus \mathbb{C}$

E_8: $57 = 1 + \underset{28}{56}$

1) $\underset{56}{D} \underset{\text{irr.}}{\subset} \Lambda^3(P^C)$

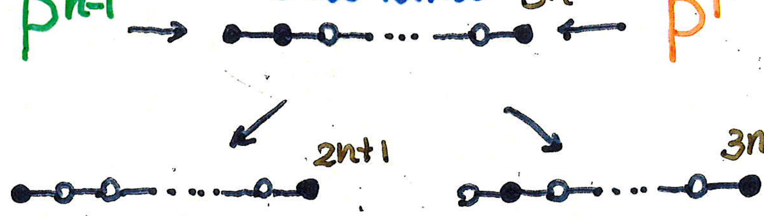
② $\underset{27}{L} = E_7/E_6U(1)$ — exceptional Jordan alg. of degree 3

3) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{e}_7^{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}$

×

• A type: $P^{n-1} \to$ 3rd kind $3n$ $\leftarrow P^1$

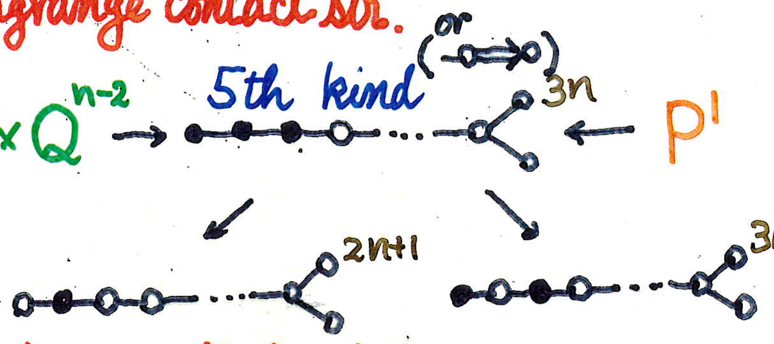
2nd kind $2n+1$ $3n-1$ 2nd kind



Lagrange contact str.

• BD type: $P^1 \times Q^{n-2} \to$ 5th kind (or) $3n$ $\leftarrow P^1$

2nd kind $2n+1$ $3n-1$ 3rd kind



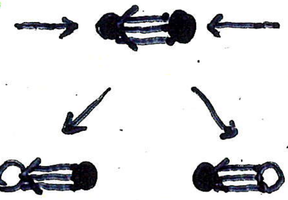
Lie contact str.

• exceptional type

G_2: P^1 $\to$ 5th kind $\leftarrow P^1$

1

2nd kind 3rd kind

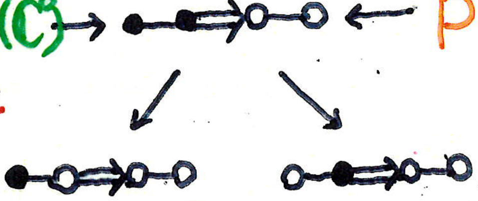


$5 = 1 + 4$ $5 = 2 + 1 + 2$

2

F_4: $LG(\mathbb{C}^6) \to$ $\leftarrow P^1$

6



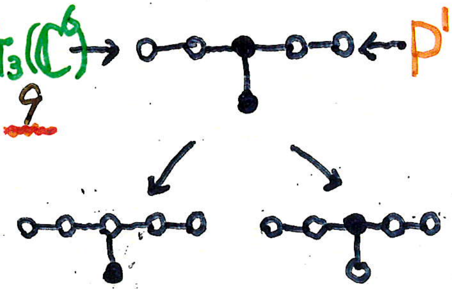
$15 = 1 + 14$ $20 = 2 + 6 + 12$

7

E_6: E_7: E_8:

$G_3(\mathbb{C}^6) \to$ $\leftarrow P^1$

9

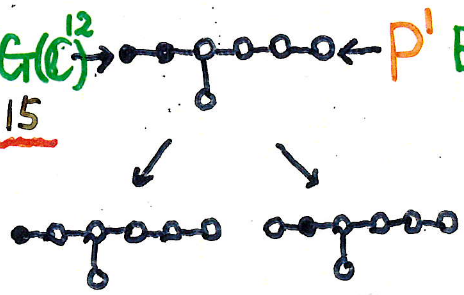


$21 = 1 + 20$ $29 = 2 + 9 + 18$

10

$NG(\mathbb{C}^{12}) \to$ $\leftarrow P^1$

15

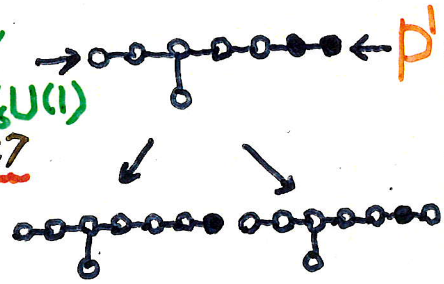


$33 = 1 + 32$ $47 = 2 + 15 + 30$

16

$E_7 / E_6 U(1) \to$ $\leftarrow P^1$

27



$57 = 1 + 56$ 83 $= 2 + 27 + 54$

28

- Homogeneous Ansatz

× $L = P(K) \circlearrowleft G_0$ homogeneous
ex. symmetric sp.

$M, Z, N \circlearrowleft G$ homogeneous
including G_0 as subgr.

simple Lie group

1st kind flag mfd. (CHSS) $\quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$
various dim. cone str.
no projective str.

(I) $M = G_m(\mathbb{C}^{m+n})$: Grassmann mfd.

$$G_0 = \{ (A, B) \in GL(m) \times GL(n) \mid \det A \cdot \det B = 1 \}$$

$$\mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n \cong T_o M$$

$$K = \{ v \otimes w \in \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n \} = \{ m \times n \text{ matrices, rank } 1 \}$$

$$L = P(K) \cong P^{m-1}(\mathbb{C}) \times P^{n-1}(\mathbb{C}) \underset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} P^{mn-1}$$

$D(L)$: hypersurf. in $(P^{mn-1})^* \Leftrightarrow m = n$

(II) $M = LG(\mathbb{C}^{2n})$: Lagrange Grass. mfd.

$$G_0 = SL(n) \times \mathbb{C}^*$$

$$\mathfrak{g}_{-1} = S^2\mathbb{C}^n \cong T_o M$$

$$K = \{ v \odot v \in S^2\mathbb{C}^n \}$$

$$L = P(K) \cong P^{n-1}(\mathbb{C}) \underset{\text{Veronese}}{\hookrightarrow} P(S^2\mathbb{C}^n)$$

$D(L)$: hypersurf. in $(P(S^2\mathbb{C}^n))^*$

(III) $M = NG(\mathbb{C}^{2n})$: null Grass. mfd.

$G_0 = SL(n) \times \mathbb{C}^*$

$\mathfrak{g}_{-1} = \Lambda^2 \mathbb{C}^n \cong T_o M$

$K = \{ v \wedge w \in \Lambda^2 \mathbb{C}^n \}$

$L = P(K) \cong G_2(\mathbb{C}^n) \xhookrightarrow{\text{Plücker}} P(\Lambda^2 \mathbb{C}^n)$

$D(L)$: hypersurf. in $(P(\Lambda^2\mathbb{C}^n))^* \Leftrightarrow n$: even

(IV) $M = Q^n(\mathbb{C})$: quadric

$G_0 = SO(n) \times \mathbb{C}^*$

$\mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{C}^n \cong T_o M$

K : quadratic cone w.r.t. metric in $\mathbb{C}^n$

$L = P(K) \cong Q^{n-2}(\mathbb{C})$

(V) $M = E_6 / SO(10) \times U(1)$

$G_0 = Spin(10) \times \mathbb{C}^*$

$\mathfrak{g}_{-1}$: half-spinor representation

K : cone of simple semispinors of $SO(10)$

$L = P(K) \cong SO(10)/U(5)$

$D(L)$: not hypersurf. in $(P(\mathbb{C}^{16}))^*$

(VI) $M = E_7 / E_6 \times U(1)$

$G_0 = E_6 \times \mathbb{C}^*$

$\mathfrak{g}_{-1} = J_3(\mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}^{27}$

$K = \{ A \in J_3(\mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \mid \det(A, A, B) = 0, \forall B \}$

$L = P(K) \cong E_6 / SO(10) \times U(1) \xhookrightarrow{\text{Severi}} P(\mathbb{C}^{27})$

$D(L)$: cubic hypersurf. in $(P(\mathbb{C}^{27}))^*$

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{3rd kind} & & \\ \times\ L & \longrightarrow & Z & \longleftarrow & R \\ & \swarrow & & \searrow & \\ M & & & & N \\ \text{cone str.} & & & & \text{contact str.} \\ \text{1st kind} & & & & \text{2nd kind} \end{array}$$

1. A_{2n-1} : $(M = G_{n,2n},\ L = P(K) = P^{n-1} \times P^{n-1})$

D(L): $\det(p_{ij}) = 0$, $1 \le i,j \le n$

$P^{n-1} \times P^{n-1} \rightarrow$  $\leftarrow G_{n-1,2(n-1)}$

$\swarrow \quad \searrow$

$G_{n,2n}$ Lagrange contact str.

2. C_n : $(M = LG(2n),\ L = P(K) = P^{n-1})$

D(L): $\det(p_{ij}) = 0$, $1 \le i,j \le n$ $(p_{ij} = p_{ji})$

$P^{n-1} \rightarrow$  $\leftarrow LG(2(n-1))$

$\swarrow \quad \searrow$

$LG(2n)$ projective contact str.

3. D_n : $(M = NG(2n),\ L = P(K) = G_{2,n})$

$n = 2k$

D(L): $pf(p_{ij}) = 0$, $1 \le i,j \le n$ $(p_{ij} = -p_{ji})$

$G_{2,n} \rightarrow$  $\leftarrow NG(2(n-1))$

$\swarrow \quad \searrow$

$NG(2n)$ Lie contact str.

4. $D_{\cancel{2k+2}}^{\,k+1}$: $(M = Q^n,\ L = P(K) = Q^{n-2})$

$n = 2k$

D(L): quadratic form (deg=2)

$Q^{n-2} \rightarrow$  $\leftarrow P^1$

$\swarrow \quad \searrow$

Q^n Lie contact str.

5. E_7 : $(M = E_7/E_6 \times U(1),\ L = P(K) = E_6/SO(10) \times U(1))$

D(L): Freudenthal det (deg=3)

$E_6/SO(10) \times U(1) \rightarrow$  $\leftarrow Q^{10}$

$\swarrow \quad \searrow$

$E_7/E_6 \times U(1)$ E_7 contact str.