4次元多様体上の接続の空間とその余接空間の幾何的量子化

郡　敏昭

沼津-待田シンポジウム-2016

1

1. **Classical Hamiltonian**:

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}\sum p_i^2 + V(q), \quad (q,p) \in T^*M = \mathbf{R}^{2n}\,,\ M = \mathbf{R}^n.$$

2. 対応する **Schrödingier 作用素**:

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\,\cdot\,.$$

3. **WKB Ansatz**

$(\widehat{H} - E)\varphi = 0$ の定常状態解を $\hbar$ で級数展開した

$$\varphi = e^{iS/\hbar}\,a\,, \quad a \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\hbar^k\,, \quad a_0 = 1.$$

の形で探す方法.

$S:\ M \longrightarrow \mathbf{R}$: Phase function, a_k: amplitude.

$e^{iS/\hbar}\sum^k a_k\,\hbar^k$: 第 (k+1) 近似解.

Hamilton-Jacobi 方程式 $S : M \longrightarrow \mathbf{R}$ が
Hamilton-Jacobi equation

$$H \circ dS = \frac{\|\nabla S\|^2}{2m} + V(q) = E$$

を満たすなら、 第1 近似解; $(\widehat{H} - E)\varphi = \mathbf{O}(\hbar)$ が

$$\varphi = \exp^{iS/\hbar} \sim 1 + iS/\hbar + \cdots$$

で与えられる.

Proof

$$\frac{\partial}{\partial x_j} e^{iS/\hbar} = \frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial x_j} e^{iS/\hbar}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} e^{iS/\hbar} = \left(\frac{i}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\hbar^2}(\frac{\partial S}{\partial x_j})^2\right) e^{iS/\hbar},$$

$$(\widehat{H} - E)\varphi = \left[\frac{\|\nabla S\|^2}{2m} + V(q) - E - \frac{i\hbar}{2m}\Delta S\right] \exp^{iS/\hbar}.$$

$\square$

2 Hamilton-Jacobi equation の幾何．

$$L \overset{\text{def.}}{=} image\, dS \;=\; \{(q,p) \in T^*M\,;\, p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\}\,.$$

n-dimensional submanifold of T^*M.

1. Hamilton-Jacobi equation: $H \circ dS = E$ より L は $H^{-1}(E) \subset T^*M$. の n-dimensional submanifold．

2. $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$: symplectic form on T^*M.

   $$\omega|L \;=\; d(\sum p_i dq_i\,) = d(\sum \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i\,) = d(dS) = 0$$

   より L は Lagrangian submanifold.

3. $\pi : T^*M \;\longrightarrow\; M$ により $L \simeq M$: diffeomorphism.

4. The canonical 1-form $\theta = \sum p_i dq_i$ on T^*M induces the 1-form $i^*\theta = d(S \circ \pi_L)$ on L; $\theta|L = \sum \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i$.

Hamilton-Jacobi Theorem

T^*M 上の関数 H の Lagrangian submanifold L　への制限が locally constant であることの必要十分条件は

その Hamiltonian vector field X_H が L　に接していることである.

$$dH = \omega(\cdot, X_H)\,, \quad X_H(w) \in T_w L\,, \forall w \in L.$$

3　準古典近似；Semi-classical state

Hamilton-Jacobi equation: $H \circ dS = E$, を満たすphase fnction $S = S(x)$ と *amplitude function* $a = a(x)$ に対して

$$\varphi = \exp^{iS/\hbar} a$$

の形の解を考える.

a が *homogeneous transport equation*:

$$a\Delta S + 2\sum \frac{\partial a}{\partial q_j}\frac{\partial S}{\partial q_j} = 0 \tag{3.1}$$

を満たすなら

$$\varphi = \exp^{iS/\hbar} a$$

は Schr$\ddot{\text{d}}$ingier operator $\widehat{H}$ の定常状態解の $\hbar$ 展開の第2次近似を与える；

$$(\widehat{H} - E)\varphi = O(\hbar^2).$$

Proof

$$(\widehat{H} - E)\varphi = \left(\frac{1}{2m}\|\nabla S\|^2 + (V - E)\right) \exp^{iS/\hbar} a$$

$$- \frac{i\hbar}{2m}\left(a\Delta S + 2\sum \frac{\partial a}{\partial q_j}\frac{\partial S}{\partial q_j}\right) \exp^{iS/\hbar} - \quad \frac{\hbar^2}{2m}\Delta a \, \exp^{iS/\hbar}$$

4 semi-classical state の幾何

いま、ハミルトニアンが $H = \sum_i p_i^2/2 + V(q)$ の形なのでハミルトンベクトル場は

$$X_H = \sum_i (-\frac{\partial V}{\partial q_i})\frac{\partial}{\partial p_i} + p_i \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

X_H を $L = dS$ に制限すると

$$X_H|L = \sum_i (-\frac{\partial V}{\partial q_i})\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial q_i}.$$

すなわち、

$$\pi_* X_H = \nabla S. \qquad (4.1)$$

-

またhomogeneous transport equation:

$$a\Delta S + 2\sum \frac{\partial a}{\partial q_j}\frac{\partial S}{\partial q_j} = 0$$

が満たされれば、

vector field $a^2\nabla S$ は divertence free.

$$div\,(a^2\nabla S) = \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j}(a^2\frac{\partial S}{\partial q_j}) = a(a\Delta S + 2\sum \frac{\partial a}{\partial q_j}\frac{\partial S}{\partial q_j}) = 0 \qquad (4.2)$$

divergence の定義より

$$(div\,\mathbf{v})|dx| = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}|dx|\,, \qquad (4.3)$$

ここに　$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$ はLie-微分.

(4.1), (4.3), (4.2), より

$$\mathcal{L}_{(a^2 X_H)}\,|dx| = \mathcal{L}_{(a^2\nabla S)}\,|dx| = \, div\,(a^2\nabla S)\;|dx| = 0,$$

$\Longrightarrow$

$$\mathcal{L}_{X_H}\,(\,a^2\,|dx|\,) = 0.$$

(Hamilton-Jacobi theorem)から　X_H: tangent to L ,
また　リー微分はdiffeomorpism invariant だから,
この式を$\pi|L : L \xrightarrow{\simeq} M$ で持ち上げて

L上で

$$\mathcal{L}_{X_H}\,(\,a^2\,|dx|\,) = 0.$$

が成り立つ.

$a^2|dx| = (a|dx|^{1/2})^2$ より

homogeneous transport equation $\Longleftrightarrow$
Lagrangian submanifold 上にハミルトンベクトル場 X_H
で不変な half-density が存在する

5　幾何的量子化

- 余接空間 T^*M の幾何的量子化:

  幾何的準古典近似とは 次の組 (L, i, a):

  1. (L, i): Lagrangian immersion で その埋め込み $i(L)$ が classical Hamiltonian H の energy level set $H^{-1}(E)$ に含まれている .
  2. H のハミルトン流れで invariant な L 上の half-density a .

" Quantization " $\equiv$ この data (L, i, a) を用いて approximate solution to Schrödinger equation $\widehat{H} - E = 0$ を作ること.

すなわち Hamilton-Jacobi eq. を満たす phase function S と

$L = dS \subset T^*M$ 上の half-density $a|dx|^{1/2}$ により、

$$\varphi = e^{iS/\hbar}(dS)^* a$$

はSchrödinger 方程式の定常解の 2 次近似を与える; $(H - E)\varphi = \mathbf{O}(\hbar^2)$.

6 Pre-quantization of a projectable Lagrangian

次に　M を一般の 多様体として　余接空間 T^*M の Lagrangian submanifold の pre-quantization を考える,

$T^*M \longrightarrow M$; cotangent bundle.

$$T_{(m,\alpha)}T^*M = T_mM \oplus T_m^*M \ \ni (t, \xi)$$

Canonical 1-form , Liouville form: $\theta \overset{\text{definition}}{\Longleftrightarrow}$ θ; 1-form on T^*M ; defined at $(m, \alpha) \in T^*M$ by

$$\theta_{(m,\alpha)}\left((t,\xi)\right) = \alpha(t)\,, \quad \forall (t,\xi) \in T_{(m,\alpha)}T^*M\,, \,.$$

Canonical 2-form : $\omega = d\theta$.

$L \subset T^*M$: Lagrangian submanifold $\overset{\text{definition}}{\Longleftrightarrow}$ $\omega|L = 0$.

Example:

$$\begin{aligned} \theta &= \sum_i p_i dq_i\,, \quad \omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i\,, \\ L &= image\, dS, \quad \text{for a } S : M \longrightarrow \mathbf{R}. \end{aligned}$$

$$i : L \hookrightarrow T^*M$$

projectable Lagrangian embedding:

すなわち　$\pi|L : L \xrightarrow{\text{diffeo}} M$, の場合を考える。

L: exact すなわち $L = \mathit{image}\, dS$, でなくてよい.

$\omega|L = 0$ だから $\theta|L$ closed on L.

$\exists\{L_k\}$: a cover of L

各 L_k 上で $i\,|L_k$ exact ;

$\exists\,\phi_k$ on L_k (primitive) such that :

$$d\phi_k = i^*\theta\,|L_k.$$

$(\, L_k,\, i\,|L_k, \phi_k\,)$ の quantization は L_k 上の oscillatory function :

$$I_k \;=\; (\pi_{L_k}^{-1})^*\, e^{i\,\phi_k/\hbar}\,.$$

で与えられる.

$(L, i\,)$ の quantization には " I_k を貼り合わせて" well defined な $I(L, i, \phi\,)$ on M を得ることになる:

$$I(L, i, \phi) \;\sim\; \sum_k (\pi_{L_k}^{-1})^*\, e^{i\,\phi/\hbar}\;.$$

このための（十分）条件は

$$e^{i\,\phi_k/\hbar} \;=\; e^{i\,\phi_j/\hbar}, \qquad \text{on} \qquad L_k \cap L_j\,.$$

すなわち

$$\phi_j - \phi_k \in\; 2\pi\hbar \cdot \mathbf{Z} \qquad \text{on} \qquad L_k \cap L_j\,. \tag{6.1}$$

$L = \cup_k L_k$; projectable Lagrangian L の covering で

$\exists \quad \phi_j : L_j \longrightarrow \mathbf{R}$,

$d\phi_k = i^*\theta \,|L_k$.

$\{ \lambda_{jk} = \phi_j - \phi_k \}$ defines the Liouville class

$\lambda_{(L,i)} = [\lambda_{jk}] \in \check{H}^1(M, \mathbf{R})$.(independent of covers)

いま Liouville class が 整数条件 (6.1) ;

$$\lambda_{(L,i)} \in \check{H}^1(M, 2\pi\hbar \cdot \mathbf{Z})$$

を満たせば、

$\exists$ good cover $L = \cup_j L_j$

$\exists$ primitives $\phi_j : L_j \longrightarrow \mathbf{R}$;

$$i^*\theta|L_j = d\phi_j,$$

各 $L_j \cap L_k$ 上で

$$\phi_j - \phi_k \in \mathbf{Z}_\hbar = 2\pi\hbar \cdot \mathbf{Z}$$

ゆえに $\{\phi_j\}_j$ は

$$\phi : L \longrightarrow \mathbf{T}_\hbar = \mathbf{R}/\mathbf{Z}_\hbar \tag{6.2}$$

を定めて、 $i^*\theta = d\phi$ が成り立つ.

これにより

global oscillatory function on L :

$e^{i\phi/\hbar}$. Quantizatin $\mathbf{O}(\hbar)$ OK.

7　$\mathbf{T}_{\hbar}$- 主束: Chern class　復習

余接空間のLagrangian submanifold の上の$\mathbf{T}_{\hbar}$-トーラス主束の" 切断 " (6.2) を作ることが問題だとわかった。

　トーラス主束の復習をしておく。

$$\mathbf{T}_{\hbar} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}_{\hbar}\,, \quad \mathbf{Z}_{\hbar} = 2\pi\hbar\mathbf{Z}\,,$$

$\mathbf{T}_{\hbar} \ni [t] = [t + 2\pi k\hbar]$

　$P \xrightarrow{\pi} X$ を多様体 X 上の $\mathbf{T}_{\hbar}$-主束とする.

$\mathbf{T}_{\hbar} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}_{\hbar} \ni t$ の $p = (x, u) \in P$ への作用は $p \cdot t = (x, u + t \mod \mathbf{Z}_{\hbar})$ で与えられる.

　trivialization を

$$X = \cup_j U_j\,, \quad \varphi_j : \pi^{-1}(U_j) \xrightarrow{\simeq} U_j \times \mathbf{T}_{\hbar}, \quad \varphi_j(x, t) = (x\,, f_j(x, t)).$$

　transition function は

$$g_{jk} : U_j \cap U_k \longrightarrow \mathbf{T}_{\hbar}$$

$$f_j(x, t) = f_k(x,\, t + g_{jk}(x)\,)\,, \forall x \in U_j \cap U_k.$$

で与えられるから、

$$f_i(x, t) = f_i(x,\, t + g_{ij}(x) + g_{jk}(x) + g_{ki}(x))$$

$$\Longrightarrow g_{ij}(x) + g_{jk}(x) + g_{ki}(x) = 0 \; mod\, \mathbf{Z}_{\hbar}.$$

g_{jk} : $U_j \cap U_k \longrightarrow \mathbf{T}_{\hbar}$ の $\mathbf{R}$ (加法群) への lift を $\tilde{g}_{jk} : U_j \cap U_k \longrightarrow \mathbf{R}$:　とする．$\{\tilde{g}_{jk}\}$ は条件

$$c_{ijk} = \tilde{g}_{ij}(x) + \tilde{g}_{jk}(x) + \tilde{g}_{ki}(x) \in \mathbf{Z}_{\hbar}$$

を満たし　次の cohomology class が定まる：

$$[P] = [c_{ink}] \in \check{H}^2(X, \mathbf{Z}_{\hbar}) : \quad \text{Chern class of } P.$$

Theorem 7.1.
多様体 X 上の $\mathbf{T}_{\hbar}$-主束 $P \longrightarrow M$ の *isomorphism classe* は、その *Chern class* $[P] \in \check{H}^2(X, \mathbf{Z}_{\hbar})$　と *bijective* に対応する*:*

8 principal $\mathbf{T}_{\hbar}$- bundlesについてのKostant-Souriau考察

$\mathbf{T}_{\hbar}$-bundle $P \xrightarrow{\pi} X$. 加法+ mod はややこしいので $t \in \mathbf{T}_{\hbar}$ を $e^{it} \in \mathbf{T}_{\hbar}$ と書く。

$P \ni p = (x, c) \sim (x, e^{ic})$ への $t \in \mathbf{Z}_{\hbar}$ の右作用は

$$p \cdot t \sim p \cdot e^{it} = (x, e^{ic}) \cdot e^{it} = (x, e^{i(c+t)}) \sim (x, c + t))$$

$$X = \cup_j U_j \,, \quad \pi^{-1}(U_j) \overset{\varphi_j}{\simeq} U_j \times \mathbf{T}_{\hbar} \,,$$
$$T_{(x,t)}P \simeq T_x X \times \mathbf{R} \,.$$

Definition 8.1.

γ : a connection form on $\mathbf{T}_{\hbar}$-bundle $P \xrightarrow{\pi} X$

$\iff \gamma$: $\mathbf{T}_{\hbar}$-invariant ($\mathbf{R}$-valued) 1-form on P

such that $\gamma(\xi_P) = \xi$, $\forall \xi \in \mathbf{R}$,

ここに $\xi_P(p) = \frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}\, p \cdot e^{i\epsilon\xi} \in T_pP$; fundamental vector field.

局所表現：

$U_j \ni x$ 上の local section $\sigma_j(x) = \varphi_j^{-1}(x, 0)$ による引き戻しを $\gamma_j = \sigma_j^* \gamma$ とすると、

$\{\gamma_j\}_j$ は各 U_j 上の $\mathbf{T}_{\hbar}$-valued 1-form で、$U_i \cap U_j$ 上で

$$\gamma_j - \gamma_k = d\tilde{g}_{jk} \,,$$

$\tilde{g}_{jk}$: transition function of $P \longrightarrow X$

$\Longrightarrow$

$\omega := d\gamma_j = d\gamma_k$: X 上定義された $\mathbf{T}_{\hbar}$-valued closed 2-form ; curvature form of $\mathbf{T}_{\hbar}$ bundle P.

$$\pi^* \omega = d\gamma \quad \text{on } P.$$

Theorem 8.1.
manifold X 上の *closed 2-form* ω が、ある $\mathbf{T}_{\hbar}$-主束 P *with connection* の *curvature form* である
$\Longleftrightarrow \omega \in H^2(P, \mathbf{Z}_{\hbar})$.

Proof

Follow the zig-zag of Čech-de Rham ;

$$\check{H}^2(X, \mathbf{Z}_{\hbar}) \ni [P] = [c_{ink}] \longleftrightarrow [\omega] \in H^2(P, \mathbf{Z}_{\hbar})$$

9 余接空間 T^*M 上の Pre-quantum line bundle と Oscillatory function

θ : the canonical 1-form on T^*M;

$$\theta_{(m,\alpha)}((t,\tau)) = \alpha(t)\,,$$

for $\forall(m,\alpha) \in T^*M$, $m \in M$, $\alpha \in T^*_mM$, and
for $\forall(t,\tau) \in T_{(m,\alpha)}T^*M = T_mM \oplus T^*_mM$.

$\omega = d\theta$: the canonical 2-form on T^*M.

$\mathbf{T}_{\hbar} = \mathbf{R}/2\pi\hbar\,\mathbf{Z}$: a torus with period $2\pi\hbar$.

Definition 9.1. 自明な $\mathbf{T}_{\hbar}$-主束

$$P_{\hbar} = T^*M \times \mathbf{T}_{\hbar} \xrightarrow{\pi} T^*M$$

と、その上の connection 1-form

$$\theta_{\hbar} = -\pi^*\theta + d\beta$$

の組を 余接束 T^*M の pre-quantum bundle と云う．ここに

$$\beta : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{T}_{\hbar} : \text{ the linear variable in } \mathbf{T}_{\hbar}$$

$$-\pi^*\theta \;:\; \text{horizontal direction.}$$

$$\beta : \qquad ;\text{ vertical direction}$$

$i: L \hookrightarrow T^*M$ をLagrange 埋め込みとしょう.

$i^*P_{\not h} \longrightarrow L$: pre-quantum bundle $P_{\not h} \longrightarrow T^*M$ の Lagramge submanifld $L \subset T^*M$ への引き戻し.

$i^*P_{\not h} \longrightarrow L$ が quantization できる条件を見よう.

まず、　$i^*P_{\not h}$ 上に引き戻した接続形式 $i^*\theta_{\not h}$ は flat になる:

$$d(i^*\theta_{\not h}) = di^*(-\pi^*\theta + d\beta) = -(\pi \circ i)^* d\theta = i^*\omega = \omega|L = 0$$

$\exists\{L_j\}_j$: L の covering ,

$\exists\{\phi_j\}_j$,　such that　$d\phi_j = i^*\theta_{\not h}|L_j$.

$$\lambda_{jk} = \phi_j - \phi_k$$

De Rham cohomology class

$$[\, i^*\theta_{\not h}] \in H^1(L, \mathbf{R})$$

が定まるが、これは

Liouville class

$$\lambda_{(L,i)} = [\lambda_{jk}] \in \check{H}^1(L, \mathbf{R})$$

と一致する.

整数条件（Bohr-Sommerfeld 条件）$\lambda_{(L,i)} \in H^1(M, 2\pi\hbar\mathbf{Z})$ が満たされているなら、

$$\phi_j \equiv \phi_k \qquad \mathrm{mod} \;\; \mathbf{Z}_\hbar = 2\pi\hbar\mathbf{Z}$$

より quotient $\mathbf{T}_\hbar = \mathbf{R}/\mathbf{Z}_\hbar$ 値 global section

$$\phi : L \longrightarrow \mathbf{T}_\hbar$$

が定まる (parallel lift of $i^*Q_\hbar \longrightarrow L$).

$\mathbf{T}_\hbar$ の表現 $\quad \rho : \mathbf{T}_\hbar \ni x \longrightarrow e^{-ix/\hbar} \in U(1)$ により主束 $i^*P_\hbar$ に associate した ($U(1)$-主束に associate した) line bundle (pre quantum line bundle)

$$\mathcal{E}_\hbar = i^*P_\hbar \otimes_\rho \mathbf{C} \;:$$

が定まる.

表現 ρ により parallel lift $\phi : L \longrightarrow \mathbf{T}_\hbar$ は $\mathcal{E}_\hbar$ の section

$$e^{i\,\phi/\hbar} \;:\; L \longrightarrow U(1).$$

を定めるが、これは global oscillatory function に他ならない.

Theorem 9.1.
T^*M の *Lagranjian submanifold* $L \hookrightarrow T^*M$ は *projectable* $L \overset{\pi}{\simeq} M$ で、その *Liouville class* が *BS*-条件 $[\lambda] \in H^1(L, 2\pi\mathbf{Z}_\hbar)$ を満たすときに *quantifiable* である。

上の議論より

imbedded Lagrangian submanifold $i: L \hookrightarrow T^*M$ は non-zero parallel section $\phi: L \longrightarrow i^*P_\hbar$ が取れるとき *quantifiable* である。

こともわかった。

Remark

Lagrangian submanifold が、submanifold $N \subset M$ 上の graph の微分、より一般に 1-form, で与えられる場合を考えることがある。

$T^*M \xrightarrow{\pi} M$: cotangent bundle.

$N \subset M$; a submanifold of M.

β; a closed 1-form on N.

$$
\begin{array}{ccc}
N^\dagger_\beta & = \{(x,p) \in T^*M \,:\, x \in N,\, p|_{T_xN} = \beta(x)\} & \hookrightarrow T^*M \\
\pi|N^\dagger_\beta \downarrow & & \\
N & & \hookrightarrow M
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

$N^\dagger_\beta$ は Liouville class

$$[\lambda_{(N^\dagger_\beta, i)}] = [(\pi|N^\dagger_\beta)^*\beta] \in H^1(N^\dagger_\beta, \mathbf{R})$$

とする Lagrangian subspace of T^*M

後に平坦接続の部分空間 $\mathcal{A}^\flat \hookrightarrow \mathcal{A}$ の quantization を考えるときに関係。

Kostant, Souriou, Kirilov, Guillemin

Abstract Formulation [Kostant, Souriau, Kirilov, Guillemin]

•*Pre-quantization of a manifold endowed with a closed 2-form .*

For a manifold X endowed with a closed 2-form σ,
we call a *pre-quantization* of (X, σ)
a hermitian line bundle $(\mathcal{L}\,, <\,, >)$ over X equiped with
a hermitian connection ∇ whose curvature is σ.

Our purpose :

1. *Geometric pre-quantization of the cotangent space of connections a four-manifold.*
2. *Geometric pre-quantization of the moduli space of flat connections on a four-manifold.*

10 Differential calculus on the space of connections

M : a m-dimensional riemannian manifold with boundary ∂M.
$G = SU(N)$, $N \geq 2$.
$P \xrightarrow{\pi} M$: a principal G-bundle,
$\mathcal{A} = \mathcal{A}(M)$ the (affine) space of *irreducible* connections over P, Lie環 Lie G値 1-form $\Omega^1(M, Lie\, G)$ をモデルとするアフィン空間.

$$T_A\mathcal{A} = \Omega^1(M, Lie\, G)\,) : \quad \text{tangent space at } A \in \mathcal{A},$$

$$A \in \mathcal{A}, \quad a \in T_A\mathcal{A} \Longrightarrow A + a \in \mathcal{A}.$$

$$T_A^*\mathcal{A} = \Omega^{m-1}(M, Lie\, G)\,), \quad A \text{ での余接空間}$$

$\alpha \in T_A^*\mathcal{A}$ and $a \in T_A\mathcal{A}$ の pairing:

$$\langle \alpha,\, a \rangle_A = \int_M tr(\, a \wedge \alpha\,)$$

アフィン空間 $\mathcal{A}$ 上の解析

vector space V に値をとる 関数 $\Phi = \Phi(A)$ on $\mathcal{A}$ の方向微分 $\partial_A \Phi$ は

functional variation:

$$\partial_A \Phi \quad : \quad T_A \mathcal{A} \longrightarrow V\,, \tag{10.1}$$

$$(\partial_A \Phi)\, a \;=\; \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}\,(\,\Phi(A + ta) - \Phi(A)\,)\,, \quad \text{for } a \in T_A \mathcal{A}. \tag{10.2}$$

で定義.

For example,

$$(\partial_A A)\, a = a,$$

曲率 $F_A = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]$ の a-方向微分は

$$(\partial_A F_A) a = d_A a \equiv da + \frac{1}{2}[A \wedge a\,].$$

$\widetilde{d}$: $\mathcal{A}(M)$ 上の外微分.

For a function F on $\mathcal{A}(M)$, $(\widetilde{d}F)_A\, a = (\partial_A F)\, a$. $a \in T_A \mathcal{A}$

For a 1-form Φ on $\mathcal{A}(M)$,

$$\begin{aligned}(\widetilde{d}\Phi)_A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= (\partial_A < \Phi, \mathbf{b} >)\mathbf{a} - (\partial_A < \Phi, \mathbf{a} >)\mathbf{b} - < \Phi, [\mathbf{a}, \mathbf{b}] > \\ &= \; < (\partial_A \Phi)\mathbf{a}, \mathbf{b} > - < (\partial_A \Phi)\mathbf{b}, \mathbf{a} >, \end{aligned} \tag{10.3}$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$; $\mathcal{A}(M)$ 上のベクトル場.

余接空間 $T^*\mathcal{A}$ への $(A,\alpha) \in T^*\mathcal{A}$ における接空間は

$$T_{(A,\alpha)}T^*\mathcal{A} = T_A\mathcal{A} \oplus T_A^*\mathcal{A} = \Omega^1(M,\ Lie\,G) \oplus \Omega^{m-1}(M.\,Lie\,G).$$

canonical 1-form θ on $T^*\mathcal{A}$:

$$\theta_{(A,\alpha)}(\begin{pmatrix} a \\ \nu \end{pmatrix}) = \langle\, \alpha, \pi_* \begin{pmatrix} a \\ \nu \end{pmatrix} \rangle_A = \int_M tr\, a \wedge \alpha. \quad \forall \begin{pmatrix} a \\ \nu \end{pmatrix} \in T_{(A,\lambda)}T^*\mathcal{A}$$

canonical 2-form :

$$\sigma = \widetilde{d}\theta. \tag{10.4}$$

1.
$$\sigma_{(A,\alpha)}\,(\begin{pmatrix} a \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ \nu \end{pmatrix}) = \langle\, \mu, b\,\rangle_A - \langle\, \nu, a\,\rangle_A = \int_M tr[\,b \wedge \mu - a \wedge \nu\,].$$

2. σ : cotangent space $T^*\mathcal{A}$ 上の *non-degenerate* closed 2-form .

Generating functions

$$\tilde{s} : \mathcal{A} \longrightarrow T^*\mathcal{A} \quad : \text{a local section of } T^*\mathcal{A}$$

$$\tilde{s}(A) = (\, A,\, s(A)\,)\,, \quad s(A) \in T^*_A\mathcal{A} = \Omega^1(M, Lie\, G)\,.$$

に対して $\tilde{s}$ による canonical 1-form θ の引き戻し $\tilde{s}^*\theta$ は $\mathcal{A}$ 上の 1-form で、

characteristic property

$$\tilde{s}^*\theta = s. \tag{10.5}$$

すなわち,

$$(\tilde{s}^*\theta)_A\, a = \langle s(A),\, a\rangle\,. \tag{10.6}$$

for $a \in T_A\mathcal{A}$. を満たす一意的な 1-form として定まる．

canonical 2-form σ の引き戻し $\tilde{s}^*\sigma$ は :

$$\begin{aligned}(\tilde{s}^*\sigma)_A(a,b) &= \sigma_{\tilde{s}(A)}(\,\tilde{s}_*a\,,\,\tilde{s}_*b\,) = \sigma_{(A,s(A))}(\begin{pmatrix} a \\ (s_*)_A a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ (s_*)_A b\end{pmatrix} \\ &= \int_M tr[\,b \wedge (s_*)_A a \,-\, a \wedge (s_*)_A b].\end{aligned}$$

$\tilde{s}^*\sigma$ is a closed 2-form on $\mathcal{A}$.

characteristic property (10.5) より

$$\tilde{s}^*\sigma = \widetilde{d}\,(\tilde{s}^*\theta) = \widetilde{d}\,s\,. \tag{10.7}$$

Example[(Atiyah-Bott, 1982)]
M : a surface (2-dimensional manifold).

$$T_A\mathcal{A} \simeq T_A^*\mathcal{A} \simeq \Omega^1(M, LieG)$$

次の generating function

$$\tilde{s} : \mathcal{A} \ni A \longrightarrow s(A) = A \in \Omega^1(M, LieG) = T_A^*\mathcal{A}$$

を考えると

$$(\tilde{s}^*\theta)_A a = \int_M tr(\, Aa\,)\,.$$

また

$$\begin{aligned}(\tilde{s}^*\sigma)_A(a,b) &= (\widetilde{d}\,\tilde{s}^*\theta)_A(\,a,\,b\,) = \langle(\partial_A\,\tilde{s}^*\theta)\,a,\,b\,\rangle - \langle\,(\partial_A\,\tilde{s}^*\theta)\,b, a\,\rangle \\ &= \int_M tr(ba) - \int_M tr(ab) = 2\int_M tr(ba).\end{aligned}$$

$(\mathcal{A}(M),\,\omega \equiv \tilde{s}^*\sigma\,)$ は symplectic manifold, ω は非退化.

11 Pre-symplectic structure on the space of connections on a four-manifold

X : Riemannian four-manifold with boundary ∂X that may be empty.
$P = X \times SU(n)$: the trivial principal bundle
$\mathcal{A}(X)$: the space of irrreducible connections

$$T_A\mathcal{A}(X) = \Omega^1(X, Lie\, G)\,, \qquad \text{the tangent space}$$

$$T^*_A\mathcal{A}(X) = \Omega^3(X, Lie\, G)\,, \qquad \text{the cotangent space}$$

pairing は

$$T_A\mathcal{A}(X) \times T^*_A\mathcal{A}(X) \ni (a, \alpha) \longrightarrow \langle a, \alpha \rangle = \int_M trace\, a \wedge \alpha\,.$$

θ を $T^*\mathcal{A}$ 上の canonical 1 form ,
$\sigma = \widetilde{d}\theta$ を $T^*\mathcal{A}$ 上の canonical 2 form とする.

$\tilde{s}$: cotangent bundle $T^*\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ の section を次で定義する；

$$\tilde{s}(A) = (A, s(A)) = \left(A\,,\; q(\,AF_A + F_A A - \frac{1}{2}A^3) \right) \quad A \in \mathcal{A}. \tag{11.1}$$

$\tilde{s}(A) \in T^*_A\mathcal{A}$.

$s(A) = q(AF_A + F_A A - \frac{1}{2}A^3)$: a 3-form on X valued in $su(n)$,

$q_3 = \frac{1}{24\pi^3}$.

$\theta^s = \tilde{s}^*\theta$, $\sigma^s = \tilde{s}^*\sigma$ を $\tilde{s}$ による M 上の forms への引き戻しとする.

このとき次が成立；

$$\theta^s_A(a) = \frac{1}{24\pi^3}\int_X Tr[\,(AF_A{+}F_A A{-}\frac{1}{2}A^3)\,a\,], \quad a \in T_A\mathcal{A}\,, \tag{11.2}$$

$$\sigma^s_A(a,b) = \frac{1}{8\pi^3}\int_X Tr[(ab{-}ba)F_A]{-}\frac{1}{24\pi^3}\int_{\partial X} Tr[(ab{-}ba)A]\,. \tag{11.3}$$

第１式は characteristic property (10.5) :

$$(\widetilde{s}^*\theta)_A = s(A)$$

より .

第２式は$a, b \in T_A\mathcal{A}$に対して,

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{d}\,\theta^s)_A(a,b) &= \langle(\partial_A\theta^s)a, b\rangle - \langle(\partial_A\theta^s)b, a\rangle \\
&= \frac{1}{24\pi^3}\int_X Tr[\,2(ab-ba)F - (ab-ba)A^2 \\
&\qquad - (bd_Aa + d_Aab - d_Aba - ad_Ab)A\,]
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{8\pi^3}\int_X Tr[\,(ab{-}ba)F\,] - \frac{1}{24\pi^3}\int_{\partial X} Tr[\,(ab{-}ba)A\,],
$$

for $a, b \in T_A\mathcal{A}$. □

θ の characteristic property に注意しておこう：

$$
\theta^s_A \,=\, (\tilde{s}^*\theta)_A \,=\, s(A)\,, \quad \forall A \in \mathcal{A}. \tag{11.4}
$$

Theorem 11.1. *$P = X \times SU(n)$: trivial principal $SU(n)$-bundle on X.*

$\mathcal{A}(X)$: the space of irreducible connections on P.

$\mathcal{A}(X)$ 上の 2-form ω を

$$\omega_A(a,b) = \frac{1}{8\pi^3}\int_X Tr[(ab-ba)F] - \frac{1}{24\pi^3}\int_{\partial X} Tr[(ab-ba)A], \quad \forall a, b \in \tag{11.5}$$

で定義すると ω は closed 2-form になる．すなわち $(\mathcal{A}(X), \omega)$ は pre-symplectic space.

12　flat connection の空間

平坦接続, flat connections, の空間は:

$$\mathcal{A}^\flat = \{A \in \mathcal{A}(X); F_A = 0\}.$$

$\mathcal{A}^\flat$ の接空間は

$$T_A\mathcal{A}^\flat = \{a \in \Omega^1(X, Lie\, G); \quad d_A a = 0\}.$$

となる．($(\widetilde{d}\, F_A)a = d_A a$ だった)．

1-form θ^s の $\mathcal{A}^\flat$ への制限は

$$\theta^s_A(a) = \frac{i}{48\pi^3}\int_X Tr\,(A^3 a), \quad \forall a \in T_A\mathcal{A}^\flat$$

であり、

2-form $\omega = \sigma^s$ の $\mathcal{A}^\flat$ への制限は

$$\omega_A(a,b) = -\frac{1}{24\pi^3}\int_{\partial X} Tr[(ab{-}ba)A]\,, \quad \forall a, b \in T_A\mathcal{A}^\flat(X).$$

とくに X の境界がないとき, $\partial X = \emptyset$, には

$$\tilde{d}\,\theta^s \ = \ \omega|\mathcal{A}^\flat = 0\,.$$

より $\theta^s|\mathcal{A}^\flat$ は　closed 1-fprm on $\mathcal{A}^\flat$.

$\theta^s_A = s(A), \quad \forall A \in \mathcal{A}$, (11.4),

だったから, 前節 Remark に述べたように

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\flat \ &= \ (\mathcal{A}^\flat)^\dagger_{\theta^s|\mathcal{A}^\flat} = \Big\{(A, \alpha) \in T^*\mathcal{A} \,: \quad A \in \mathcal{A}^\flat \,,\, \alpha = s(A)\Big\} \\ &= \ \{\tilde{s}(A) = (A, s(A))\,; \quad A \in \mathcal{A}^\flat\}\end{aligned}$$

とすると、グラフ $\mathcal{L}^\flat = \ \tilde{s}(\mathcal{A}^\flat)$ はLagrangian submanifold of $T^*\mathcal{A}(X)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^\flat & \hookrightarrow & T^*\mathcal{A} \\ \downarrow & \pi & \downarrow \\ \mathcal{A}^\flat & \hookrightarrow & \mathcal{A} \end{array}$$

(注): submanifold になることは

$\partial_A\,\tilde{s}\,|_{T_A\mathcal{A}^\flat} : \, T_A\mathcal{A}^\flat \ \longrightarrow T_{\tilde{s}(A)}(T^*\mathcal{A})$ がisomorphismとなることより従う。

また、$A \in \mathcal{A}^\flat(X)$ に対しては

$$\tilde{s}(A) = (A, s(A)) = (A, -\frac{q}{2}A^3)$$

となることに注意. (pure gauge $A = g^{-1}dg$ では" 巻き数" になっている.)

$$P_{\hbar} = T^*\mathcal{A} \times \mathbf{T}_{\hbar} \xrightarrow{\pi} T^*\mathcal{A}$$

trivial principal $\mathbf{T}_{\hbar}$-bundle with a connection

$$\theta_{\hbar} = -\pi^*\theta + d\alpha\,.$$

θ は$T^*\mathcal{A}$ のcanonical 1-form,

α は the angle coordinate of $\mathbf{T}_{\hbar}$, であった.

このℒ$^\flat$ $\overset{i}{\hookrightarrow}$ $T^*\mathcal{A}$ への制限は

$$i^*P_{\hbar} \xrightarrow{\pi^\flat} \mathcal{L}^\flat \;:$$

trivial principal $\mathbf{T}_{\hbar}$-bundle で　そのconection form

$$i^*\theta_{\hbar} = (\pi^\flat)^*\theta + d\alpha = \frac{q}{2}A^3 + d\alpha$$

は flat connection. すなわち

$i^*P_{\hbar} \xrightarrow{\pi^\flat} \mathcal{L}^\flat$ はflat bundle ($\tilde{d}\, i^*\theta_{\hbar} = -i^*\pi^*\tilde{d}\theta = 0$)

となる.

flat bundle　$i^*Q_{\hbar} \longrightarrow \mathcal{L}^\flat$ のparallel lift を;

$$\phi : \mathcal{L}^\flat \longrightarrow \mathbf{T}_{\hbar}$$

を取れるので

$\mathcal{L}^\flat \overset{i}{\hookrightarrow} T^*\mathcal{A}$ がpre-quantizable である.

また、 $\mathcal{E}_{\hbar} = \mathcal{L}^{\flat} \otimes_{\rho} \mathbf{C}$ を 表現

$$\rho : \mathbf{T}_{\hbar} \ni x \longrightarrow e^{-ix/\hbar} \in U(1)$$

により $\mathcal{L}^{\flat}$ に随伴する line bundle (pre quantum line bundle) とすれば、oscillatory function

$$e^{i\phi/\hbar}$$

が得られ, $(L^{\flat} \overset{i}{\hookrightarrow} T^{*}\mathcal{A}^{\flat}(X))$, は pre-quantizable.

13　接続のモジュライ空間の幾何的pre-quantization

今度は　（cotangent space でなく）pre-symplectic space $(\mathcal{A}^\flat(X), \omega)$ の Moduli space $\mathcal{M}^\flat = \mathcal{A}^\flat/\mathcal{G}_0$ の pre-quantization を行う、すなわち $\mathcal{M}^\flat$ 上に line bundle with connection を構成する.（　boundary $\partial X = \emptyset$ のときは $\mathcal{M}^\flat$ 上の flat line bundle を構成）.

$G = SU(n)$, $n \geq 3$.

X を four-manifold ,　∂X をその境界とする.

まず $\partial X \neq \emptyset$ のとき.

$\mathcal{A}(X)$ を自明な G-主束上の irreducible connection 全体のつくる affine space とする.

(11.5) で定義された ω により ($\mathcal{A}(X)$, ω) は pre-symplectic space になった.

flat connection の部分空間を $\mathcal{A}^\flat = \{A \in \mathcal{A}(X);\ F_A = 0\}$.

ω の $\mathcal{A}^\flat$ への制限は ω より

$$\omega(a, b) = -\frac{1}{24\pi^3}\int_{\partial X} Tr[(a \wedge b - b \wedge a) \wedge A], \quad \forall a, b \in T^\flat_A \mathcal{A}.$$

$\mathcal{G}(X) = \Gamma(X, Ad_G\, P) = C^\infty(X, G)$ をゲージ変換群、境界 ∂X で恒等変換になるようなゲージ変換群を

$$\mathcal{G}_0 = \{g \in \mathcal{G}(X);\ g|\partial X = Id.\}\,.$$

$\mathcal{G}_0$ の $\mathcal{A}(X)$ への右作用：

$$g \cdot A = g^{-1} A g + g^{-1} dg\,.$$

平坦接続のモジュライは

$$\mathcal{M}^\flat = \mathcal{A}^\flat / \mathcal{G}_0.$$

ω は $\mathcal{G}_0$ 不変だったから $\mathcal{M}^\flat$ も pre-symplectic になる：

$$\omega_{\mathcal{M}^\flat}([a],[b]) = \omega(a,b).$$

記号：

$g \in \mathcal{G}_0$, $A \in \mathcal{A}^\flat$ に対して

$$\Gamma(g,\, A) = \frac{i}{48\pi^3}\int_X Tr[\,\frac{1}{2}(dgg^{-1}Adgg^{-1}A) + (dgg^{-1})^3 A\,]$$

$$C_5(g) = \frac{i}{240\pi^3}\int_Y Tr\,(d\mathbf{g}\mathbf{g}^{-1})^5 \; + C_5(g)\,.$$

ただし N は $\partial N = X$ なる５次元 manifold, $\mathbf{g} \in C^\infty(N, G)$ は $g \in C^\infty(X, G$ の N への延長 $\mathbf{g}|X = g$. $(\pi_4(G) = 0)$.

$C_5(g)$ は $\mod \mathbf{Z}$ で延長 $\mathbf{g}$ に依存しない.

1.

$$\Gamma(fg, A) = \Gamma(g,\, f\cdot A) + \Gamma(f, A), \qquad \mod \mathbf{Z}$$

$$\Theta(g, A) = \exp\, 2\pi i \Gamma(g, A) \quad g \in \mathcal{G}_0, \quad A \in \mathcal{A}^\flat$$

と置くと、2-cocycle condition:

$$\Theta(g, A)\Theta(h,\, g\cdot A) = \Theta(gh\,,\, A)$$

2. $\mathcal{G}_0$ の $\mathcal{A}^\flat \times \mathbf{C}$ への作用を

$$g\cdot(A, c) = (g\cdot A,\, \Theta(g, A)c\,)$$

で定義して、その商を

$$\mathcal{L} = \mathcal{A}^\flat \times \mathbf{C}/\mathcal{G}_0$$

とすると、line bundle

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}^\flat$$

が得られる。

$\mathcal{L}$ には自然に Hermitian line bundle の構造が入る.

3.
$$\theta_A(a) = \frac{i}{48\pi^3}\int_X Tr[\, A^3 a\,], \quad \forall a \in T_A\mathcal{A}^\flat$$

と置くと、θ は hermitian line bundle 上の connection を定める.

4. θ の curvature は ω である.

5. pre-symplectic space $(\mathcal{M}^\flat, \omega)$ の pre-quantization が得られた.

1. 上の議論で境界がないとき、　$\partial X = \emptyset$ のときは、$\omega|\mathcal{A}^\flat \equiv 0$ で、$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}^\flat$ はflat line bndle になる.

2. ここでは, $(\mathcal{M}^\flat, \omega)$ のpre-quantizationとは, $(\mathcal{M}^\flat, \omega)$ 上にhermitian line bundle with connection　を　そのcurvatueがω になるようにつくること, として、cotngent bundle の時のように oscillatory function を与えることをしてない。さらに$\mathcal{A}$ または$\mathcal{A}^\flat$ の Lagrangian submanifold も指示していない。　この場合には　そういう議論はないように思える。

3. $\mathcal{L}^\flat \hookrightarrow T^*\mathcal{A}$ のWKB 解としては、第１近似しか行わなかった。準古典解（第２近似）を行うには $\mathcal{L}^\flat$ または$\mathcal{A}^\flat$ の上のhalf density が必要である。どうすればいいか？