

# エルミート多様体上の $C$ 射影同値

清原一吉

(岡山大学 自然科学研究科)

アブストラクト：

2つのアフィン接続が射影同値とは、それらの測地線がパラメータを除いて一致するときをいう。それらがリーマン計量に対するレビチビタ接続の時は、その条件は当のリーマン計量に強い制約を与える。実際、レビチビタによれば、適当な非退化性条件のもとで、その計量はいわゆる Liouville-Stäckel type になり、その測地流は（ハミルトン力学の意味で）完全積分可能となる。射影同値性と測地流の可積分性は本来無関係のはずだが、射影同値のケーラー版類似である  $C$  射影同値でも同様の現象が知られている。この講演ではそれらを復習したのち、さらにエルミート版を考え、対応する Hermite-Liouville 多様体の分類問題との関連を述べる。

話の予定

1. 射影同値なリーマン計量
2.  $C$  射影同値なケーラー計量
3. (Kähler-)Liouville 多様体の概略
4.  $C$  射影同値の類似と Hermite-Liouville 多様体

## 1. 射影同値なリーマン計量

多様体  $M$  上のリーマン計量  $g, \tilde{g}$  が射影同値

$\iff$  両者の測地線がパラメータを除いて同一

$\iff \exists \phi$ , a 1-form on  $M$  s.t.

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \phi(X)Y + \phi(Y)X \quad (1)$$

(1,1) tensor  $A$  を

$$\tilde{g}(\cdot, \cdot) = (\det A)^{-1} g(A^{-1}\cdot, \cdot)$$

で定義すれば (1) は

$$-g((\nabla_X A)Y, Z) = \phi(AZ)g(X, Y) + \phi(AZ)g(X, Y) \quad (2)$$

と同値になる。

$$\phi(AX) = -d \operatorname{tr}(A)(X)$$

が判るので、(2) は  $A$  について線形である！

特に  $A$  の代わりに  $\alpha A + \beta \operatorname{Id}$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) としても成り立つ。

ある点の近傍で  $A$  の固有値 (関数)  $f_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) がすべて異なり、 $df_i \neq 0$  とすると ( $f_1 > \dots > f_n$  として)、適当な座標系  $(x_1, \dots, x_n)$  が取れて、 $f_i = f_i(x_i)$  であり、

$$g = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \prod_{k \neq i} (f_k(x_k) - f_i(x_i)) dx_i^2$$

と表示される。

このような型 (Liouville-Stäckel type) の計量を持つ多様体は Liouville 多様体 (の特別な場合) と呼ばれる。

この時計量  $\tilde{g}$  の一般形は ( $A$  を  $\alpha A + \beta \text{Id}$  に変えて) 次の形。

$$\begin{aligned}\tilde{g} &= \frac{1}{\prod_{l=1}^n (\alpha f_l + \beta)} \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \prod_{k \neq i} (f_k - f_i) \frac{dx_i^2}{\alpha f_i + \beta} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \prod_{k \neq i} \left( \frac{f_k}{\beta(\alpha f_k + \beta)} - \frac{f_i}{\beta(\alpha f_i + \beta)} \right) (\alpha f_i + \beta)^{n-3} dx_i^2\end{aligned}\quad (3)$$

- ノンコンパクトなリーマン多様体のコンパクト多様体への射影埋め込み

通常は (3) の定数  $\alpha, \beta$  は計量が多様体全体で正定値になるように選ぶのだが、ある開集合上のみで正定値となるよう設定することもできて、そのとき (3) の計量はその開集合上に完備なリーマン計量を定義する。

例：単位球面の半分に、ユークリッド空間を射影同値に埋め込むことができるし、もう少し小さい開集合上に双曲空間を射影同値に埋め込むことができる (クラインのモデル)。また、楕円面

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} = 1 \quad (a_1 > a_2 > a_3 > 0)$$

の半分の部分  $\{x_1 > 0\}$  に二葉双曲面

$$\frac{x_1^2}{c_1} + \frac{x_2^2}{c_2} + \frac{x_3^2}{c_3} = 1 \quad (c_1 > 0 > c_2 > c_3)$$

を射影同値に埋め込むことができる。ただし両者の関係は

$$a_1 = (c_1 - c_2)(c_1 - c_3), \quad a_2 = -c_3(c_1 - c_2), \quad a_3 = -c_2(c_1 - c_3)$$

となっている。

もっと一般にユークリッド空間内の2次超曲面を単位球面内の2次超曲面(球面の直積に同相)の開集合として、射影同値に埋め込むことができる:

$$S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2} = \{(u_0, \dots, u_{n+1})\}, \quad a_0 > \dots > a_{n+1} \quad (\text{定数})$$

$$M_k(\subset S^{n+1}): \sum_{i=0}^{n+1} \frac{u_i^2}{a_i - \lambda_{k,0}} = 0 \quad (a_k > \lambda_{k,0} > a_{k+1}, \quad 0 \leq k \leq n)$$

$$M_k \simeq S^k \times S^{n-k}$$

$$\mathbb{R}^{n+1} = \{v_1, \dots, v_{n+1}\} = \{u_0 > 0\} \cap S^{n+1}, \quad v_i = \frac{u_i}{u_0} \frac{1}{\sqrt{a_0 - a_i}}$$

$$N_k(\subset \mathbb{R}^{n+1}): \sum_{i=1}^{n+1} \frac{v_i^2}{c_i - \mu_{k,0}} = 1 \quad (c_j = \frac{-1}{a_0 - a_j}, \quad \mu_{k,0} = \frac{-1}{a_0 - \lambda_{k,0}})$$

$$c_1 < \dots < c_{n+1} < 0, \quad c_k < \mu_{k,0} < c_{k+1} \quad (0 \leq k \leq n, \quad c_0 = -\infty)$$

- $N_k = \{u_0 > 0\} \cap M_k, \quad N_k \simeq \mathbb{R}^k \times S^{n-k}$

座標面の射影同値性:

$$g = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \prod_{k \neq i} (f_k(x_k) - f_i(x_i)) dx_i^2$$

$$\tilde{g} = \frac{1}{\prod_{l=1}^n (\alpha f_l + \beta)} \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \prod_{k \neq i} (f_k - f_i) \frac{dx_i^2}{\alpha f_i + \beta}$$

の時、固定された  $k$  について、 $x_k = \text{一定}$ 、で定義される超曲面  $N$  に2つの計量を制限した時、それらは射影同値である。実際、

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \phi(X)Y + \phi(Y)X$$

から

$$(\tilde{\nabla}_X Y)_N - (\nabla_X Y)_N = \phi(X)Y + \phi(Y)X$$

を得る。

## 2. $C$ 射影同値なケーラー計量

1つの複素多様体上  $M$  の2つの Kähler 計量  $g, \tilde{g}$  が  $C$  射影同値であるとは、

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = a(t)\dot{\gamma}(t) + b(t)J\dot{\gamma}(t)$$

( $a(t), b(t)$  は任意の関数) を満たす曲線  $\gamma(t)$  のクラスが両者で ( $\tilde{g}$  については  $\tilde{\nabla}$  に関して) 一致する場合をいう。つまり、

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \phi(X)Y + \phi(Y)X - \phi(JX)JY - \phi(JY)JX. \quad (4)$$

が成立する場合である。ここで  $\nabla, \tilde{\nabla}$  は各々  $g, \tilde{g}$  に関するレビチビタ接続、 $\phi$  はある 1-form,  $J$  は複素構造である。

$M$  上の  $(1,1)$  型の対称テンソル  $A$  を  $\tilde{g}(\cdot, \cdot) = \det(A)^{-1/2}g(A^{-1}\cdot, \cdot)$  で定義する。 $A$  は正定値であり、

$$AJ = JA$$

を満たす。従って  $A$  は  $\mathbb{C}$ -線形とみなし、以後関連する  $\det, \text{tr}$  等は  $\mathbb{C}$ -線形の意味で取る。すると  $A$  の定義式は

$$\tilde{g}(\cdot, \cdot) = \det(A)^{-1}g(A^{-1}\cdot, \cdot) \quad (5)$$

となる。

ペア  $(g, A)$  を考えることと、 $(g, \tilde{g})$  を考えることは同じであるが、この時、実の場合と同様、次の命題が成立する。

**命題** 条件式 (4) は次と同値：

$$\begin{aligned} -g((\nabla_X A)Y, Z) &= \phi(AZ)g(X, Y) \\ &+ \phi(AJY)g(X, JZ) + \phi(AJZ)g(X, JY) \end{aligned} \quad (6)$$

$\phi(AZ) = -1/2d(\text{tr } A)(Z)$  が判るので、(6) は  $A$  について線形な方程式になっている。

次の2つの定理が成立する。

**定理 1**  $M$  をコンパクトとし、 $A$  の固有値がすべて異なる点があるとする。このとき、 $M$  は Kähler-Liouville 多様体である。さらにこのとき次が成立する。

- (1) もし  $A$  の固有値がすべて定数でないならば、 $M$  は複素射影空間  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  に双正則。
- (2) いくつかの固有値は定数、かつ  $M$  は Kähler-Liouville 多様体としてプロパーならば、 $M$  は正則ファイバー束の構造を持ち、ファイバーは  $\mathbb{C}\mathbb{P}^l$ 、ベースはその普遍被覆が 1 次元ケーラー多様体の直積となる。(いわゆるリーマン沈め込みではない。)

**定理 2** 任意のコンパクトかつプロパーな Kähler-Liouville 多様体に対し、それと  $C$  射影同値な Kähler-Liouville 多様体の (2 パラメタ) ファミリーが存在する。

### 3. (Kähler-)Liouville 多様体の概略

$M$  を  $n$  次元リーマン多様体、 $g$  をその計量、 $\mathcal{F}$  を  $T^*M$  上の関数からなる  $n$  次元ベクトル空間として、 $(M, \mathcal{F})$  が Liouville 多様体であるとは、次の条件が満たされる時をいう：

- (1) For every  $F \in \mathcal{F}$  and  $p \in M$ ,  $F_p := F|_{T_p^*M}$  is a quadratic form.
- (2)  $F_p, F \in \mathcal{F}$ , are simultaneously normalizable for each  $p \in M$ .
- (3)  $\mathcal{F}$  contains the Hamiltonian  $E$  of the geodesic flow.
- (4) The Poisson bracket  $\{F, H\}$  vanishes for every  $F, H \in \mathcal{F}$ .
- (5)  $\mathcal{F}_p := \{ F_p ; F \in \mathcal{F} \}$  is  $n$ -dimensional at some point  $p \in M$ .

特にその測地流は完全積分可能。例としてユークリッド空間内の 2 次超曲面がある。

$M$  を複素  $n$  次元 Kähler 多様体、 $g$  をその計量、 $\mathcal{F}$  を  $T^*M$  上の関数からなる  $n$  次元ベクトル空間として、 $(M, \mathcal{F})$  が Kähler-Liouville 多様体である

とは、(1) の “quadratic form” を “Hermitian form” に代えて、同じ条件が成り立つ時をいう。

(Kähler-)Liouville 多様体がプロパーであるとは、

$$F \in \mathcal{F} - \{0\}, p \in M \text{ s.t. } F_p = 0 \Rightarrow \exists \xi \in T_p^* M \text{ s.t. } dF_\xi \neq 0$$

が成り立つ時をいう。

Kähler-Liouville 多様体  $M$  は適当な非退化条件のもとで次の性質を持つ：

- 無限小正則等長のなすりー環  $\mathcal{Y}$  があって、これと  $\mathcal{F}$  により  $M$  の測地流が完全積分可能
- コンパクトなら  $\mathcal{Y}$  はトーラス作用を生成し、 $M$  はトーリック多様体の構造を持つ。
- 実の  $n$  次元 Liouville 多様体を全測地的部分多様体として含む(実部)。

典型例は  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  with the Fubini-Study metric である。

## Liouville 多様体の分類と構成

プロパーな Liouville 多様体にランクの概念が定義される：

$$1 \leq \text{rank}(M, g; \mathcal{F}) \leq \dim M$$

- 最大ランク ( $\text{rank} = \dim M$ ) で  $M: \text{compact} \Rightarrow M$  の適当な有限被覆はトーラスに微分同相。
- ランク 1 の Liouville 多様体は完全に分類されている：それらは  $S^n$  (type A),  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  (type B), or  $\mathbb{R}^n$  (type C, D) に微分同相。
- 一般にランク  $r$  の Liouville 多様体の適当な有限被覆は  $r$  個の球面の直積になると予想される。

ランク 1、type (B) の Liouville 多様体は円  $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$  (with the standard metric  $dt^2$ ) とその上の  $n - 1$  個の関数の射影クラス  $[f_1(t)], \dots, [f_{n-1}(t)]$

のペア

$$(\mathbb{R}/l\mathbb{Z}; [f_1(t)], \dots, [f_{n-1}(t)])$$

で分類され、type (B) の core という。それらは（適当な代表元  $f_i$  について）次を満たす。

1. There are constants  $0 < \beta_1 < \dots < \beta_{n-1} < l/2$  such that  $f_m(\pm\beta_m) = 0$ ,  $f_m(t) > 0$  for  $-\beta_m < t < \beta_m$ , and  $f_m(t) < 0$  for  $\beta_m < t < l - \beta_m$ .
2.  $f'_m(\beta_m) < 0$ .
3.  $f_m(t) = f_m(-t)$  for any  $t \in \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ .
4.  $f_1(t) < \dots < f_{n-1}(t)$  for any  $t \in \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ .

定理： Type (B) の Liouville 多様体の同型類と type (B) の core の同型類は 1 : 1 に対応する。

同型の定義：

$$\begin{aligned} (M, g; \mathcal{F}) &\simeq (M', g'; \mathcal{F}') \\ \iff \exists \phi : (M, g) &\xrightarrow{\simeq} (M', g') \quad \text{with} \quad \phi_* \mathcal{F} = \mathcal{F}'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}/l\mathbb{Z}; [f_1], \dots, [f_{n-1}]) &\simeq (\mathbb{R}/\tilde{l}\mathbb{Z}; [\tilde{f}_1], \dots, [\tilde{f}_{n-1}]) \\ \iff \tilde{l} = l, \quad [\tilde{f}_i(t)] &= [f_i(t)] \quad (1 \leq i \leq n-1), \\ \text{or} \\ \tilde{l} = l, \quad [\tilde{f}_i(t)] &= [-f_{n-i}(l/2 - t)] \quad (1 \leq i \leq n-1). \end{aligned}$$

$$\mathcal{C} = (\mathbb{R}/l\mathbb{Z}; [f_1], \dots, [f_{n-1}])$$

に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^r &= (\mathbb{R}/l\mathbb{Z}; [f_1^r], \dots, [f_{n-1}^r]), \\ f_i^r(t) &= -f_{n-i}(l/2 - t) \quad (1 \leq i \leq n-1). \end{aligned}$$



と定義すれば

$$\mathcal{C}_1 \simeq \mathcal{C}_2 \iff \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \quad \text{または} \quad \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1^r$$

例：(1) 定曲率 1 の  $\mathbb{R}P^n$  は

$$l = \pi, \quad f_i(t) = (\cos t)^2 - c_i \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

に対応する。ただし、 $1 > c_1 > \cdots > c_{n-1} > 0$  は勝手な定数。

(2)  $E$  を楕円面  $\sum_{i=0}^n \frac{x_i^2}{a_i} = 1$  ( $a_0 > \cdots > a_n > 0$ ) として、リーマン多様体  $E/\{\pm \text{identity}\}$  は次の core に対応：

$$l = \frac{1}{2} \times \text{the length of the ellipse } \frac{x_0^2}{a_0} + \frac{x_n^2}{a_n} = 1,$$

$$f_i(t) = (\cos s(t))^2 - \frac{a_i - a_n}{a_0 - a_n} \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a_0(\cos s)^2 + a_n(\sin s)^2}}$$

### Kähler-Liouville 多様体の分類と構成

Kähler-Liouville 多様体もランクの概念が定義され、その実部の Liouville 多様体と同じランクを持つ。コンパクトでランク 1 の場合、その実部はランク 1、type (B) の Liouville 多様体で、対応する type (B) のコアは次の形をしている（特別形と呼ぶ）：

$$(\mathbb{R}/l\mathbb{Z}; [v(t) - c_1], \dots, [v(t) - c_{n-1}]),$$

ここで  $1 > c_1 > \cdots > c_{n-1} > 0$  であり、 $v(t) \in C^\infty(\mathbb{R}/l\mathbb{Z})$  は次を満たす：

- (1)  $v(-t) = v(t)$ .
- (2)  $v(0) = 1, v(l/2) = 0$ .
- (3)  $v'(t) < 0$  if  $0 < t < l/2$ .

$$(4) \quad -v''(0) = v''(l/2) = c_*.$$

$$(5) \quad v'(\beta_i) = -\sqrt{2c_*c_i(1-c_i)}, \text{ where } \beta_i = v^{-1}(c_i) \in (0, l/2), 1 \leq i \leq n-1.$$

定理： コンパクト、ランク 1 の Kähler-Liouville 多様体の同型類と、特別形の type (B) の core の同型類は 1 : 1 に対応している。この場合、対応する Kähler-Liouville 多様体はトーリック多様体として  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  に同型である。

$C$  射影同値な cores の対応：

2 つの special type の cores

$$\mathcal{C} = (\mathbb{R}/l\mathbb{Z}; [h(t) - c_1], \dots, [h(t) - c_{n-1}])$$

$$\tilde{\mathcal{C}} = (\mathbb{R}/\tilde{l}\mathbb{Z}; [\tilde{h}(\tilde{t}) - \tilde{c}_1], \dots, [\tilde{h}(\tilde{t}) - \tilde{c}_{n-1}])$$

に対応する Kähler-Liouville 多様体が互いに  $C$  射影同値であるための条件は

$$\exists \psi : \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\tilde{l}\mathbb{Z} \quad (\text{diffeo.}) \quad s.t.,$$

$$\psi(\beta_i) = \tilde{\beta}_i \quad (h(\beta_i) = c_i, \tilde{h}(\tilde{\beta}_i) = \tilde{c}_i)$$

and

$$\tilde{h}(\tilde{t}(t)) = \frac{a h(t)}{(a-1)h(t)+1}, \quad \tilde{c}_i = \frac{a c_i}{(a-1)c_i+1}$$

$$\frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{\sqrt{a\gamma}}{(a-1)h(t)+1}, \quad \tilde{l} = \int_0^l \frac{\sqrt{a\gamma}}{(a-1)h(t)+1} dt,$$

( $a > 0, \gamma > 0$  は勝手な定数、 $\tilde{t} = \psi(t)$ )

か、または向きを逆にした同様の式を満たす時である。この時、 $\psi$  は正則同型  $\Psi : M \rightarrow \tilde{M}$  を導き、 $\Psi^*\tilde{g}$  と  $g$  が  $M$  上  $C$  射影同値になる。

(これが、定理 1 の (1) の場合に対応する。)

#### 4. $C$ 射影同値の類似と Hermite-Liouville 多様体

発端：  $g$  と  $\tilde{g}$  が射影同値で、  $\tilde{g} = \det A^{-1}g(A^{-1}\cdot, \cdot)$  の時、  $g^A = g(A\cdot, \cdot)$ , etc., と置けば

$$(g^A, \tilde{g}^A), (g^{A^2}, \tilde{g}^{A^2}), \dots$$

は互いに射影同値な計量のペアの系列となる。同じことを  $C$  射影同値な計量のペア  $(g, \tilde{g})$  について行くと、

- $g^A$  etc. は最早 Kähler ではなく、単に Hermitian metric である。
- $(g^A, \tilde{g}^A)$  etc. は最早  $C$  射影同値ではなく、次のような類似の関係式を満たすに過ぎない ( $Q$  は歪対称、 $J$  と可換で、 $-QJ$  は正定値)：

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \phi(X)Y + \phi(Y)X + \phi(Q^{-1}X)QY + \phi(Q^{-1}Y)QX$$

[定義] 複素多様体  $M$  上の2つの Hermite 計量  $g$  と  $\tilde{g}$  が上記の関係を満たすとき、互いに  $Q$  同値であるという。

[定義] Kähler-Liouville 多様体の定義で、Kähler 計量を Hermite 計量に置き換えたものを、**Hermite-Liouville 多様体**という。

**定理 3.** 複素多様体  $M$  上の  $C$  射影同値な Kähler 計量  $g, \tilde{g}$  と対応する  $(1,1)$  tensor  $A$  が定理 1 (1) の条件を満たす時、任意の正定値な  $(1,1)$  tensor  $B$  で

$$B = u(A), \quad u(t) \text{ は } t \text{ の実解析関数}^{(*)}$$

の形のものについて、Hermite 計量の組  $g^{B^{-1}}, \tilde{g}^{B^{-1}}$  は  $Q = BJ$  について  $Q$  同値となり、 $(M, g^{B^{-1}})$  は Hermite-Liouville 多様体となる。((\*は緩めることができる。))

定理 4. 複素次元  $n$  の複素多様体  $M$  上の 2 つの完備 Hermite 計量  $g$  と  $\tilde{g}$  が互いに  $Q$  同値で、

$$M_1 = \{p \in M \mid p \text{ で } A \text{ の固有値はすべて異なり、微分が消えない}\} \neq \emptyset$$

と仮定する。この時次が成立する。

(1)  $M_1$  は  $M$  で open and dense.

(2) 任意の  $p \in M_1$  について、 $p$  のある近傍  $U$  上  $B = -QJ$  の適当な関数倍  $B_0$  があって、 $g^{B_0}$  と  $\tilde{g}^{B_0}$  は  $U$  上 Kähler 計量で互いに  $C$  射影同値である。

(3) (2) の  $U$  について、 $(U, g)$  は Hermite-Liouville 多様体であり、無限小正則等長変換のなす  $n$  次元の可換り一環  $\mathcal{Y}$  を許容し、それにより、測地流は可積分である。

### Hermite-Liouville 多様体の構成

- 一般の type (B) の core  $\mathcal{C} = (\mathbb{R}/l\mathbb{Z}; [f_1], \dots, [f_{n-1}])$
- 特別形の type (B) の core  $\tilde{\mathcal{C}} = (\mathbb{R}/\tilde{l}\mathbb{Z}; [h(s) - c_1], \dots, [h(s) - c_{n-1}])$
- 微分同相  $\phi : \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\tilde{l}\mathbb{Z}$  ( $t \mapsto s$ ) で、

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(-t) = -\phi(t), \quad \phi(\beta_i) = \tilde{\beta}_i$$

なるもの

からなる 3 つ組  $(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}}, \phi)$  から  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  に双正則な Hermite-Liouville 多様体を構成する。概略は次のようである。

1.  $\mathcal{C}$  から  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  に微分同相な Liouville 多様体  $N$  を作る。
2.  $\tilde{\mathcal{C}}$  から同様に  $\tilde{N}$  を作る。自然な同一視  $\tilde{N} \simeq \mathbb{R}\mathbb{P}^n \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  がある。
3.  $\phi$  は微分同相  $\Phi : N \rightarrow \tilde{N} \simeq \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  を導き、それを通じて  $N$  の計量と第一積分を「Hermite 化」する。

## 構成された Hermite-Liouville 多様体と 3 つ組との同型対応

定理 構成された 2 つの Hermite-Liouville 多様体が同型になるのは、対応する 2 つの 3 つ組が「同型」であるときに限る。

ここで 2 つの 3 つ組  $(\mathcal{C}_1, \tilde{\mathcal{C}}_1, \phi_1)$  と  $(\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2, \phi_2)$  が同型とは

- $\mathcal{C}_1$  と  $\mathcal{C}_2$  が同型
- $\tilde{\mathcal{C}}_1$  と  $\tilde{\mathcal{C}}_2$  はある微分同相  $\psi : \mathbb{R}/\tilde{l}_1\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\tilde{l}_2\mathbb{Z}$  で  $C$  射影同値
- $\phi_2 = \psi \circ \phi_1$  (in order) または  $\phi_2 \circ r = \psi \circ \phi_1$  (reversed order)

の時をいう。

## $Q$ 同値に対応する 3 つ組

定理： 定理 3 の場合、対応する Hermite-Liouville 多様体  $(M, g)$  は  $(\phi^*\mathcal{C}, \mathcal{C}, \phi)$  の形の 3 つ組から構成される。ここで、 $\mathcal{C}$  は特別形の type (B) の core で、

$$\mathcal{C} = (\mathbb{R}/\tilde{l}\mathbb{Z}; [h(s) - c_1], \dots, [h(s) - c_{n-1}])$$

の形。  $\phi$  は微分同相  $\mathbb{R}/l\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\tilde{l}\mathbb{Z}$  ( $\exists l > 0$ ) で

$$\phi^*\mathcal{C} = (\mathbb{R}/l\mathbb{Z}; [\phi^*h(t) - c_1], \dots, [\phi^*h(t) - c_{n-1}])$$

で与えられる。(  $\phi^*\mathcal{C}$  は一般に特別形ではない。)

逆に  $(\phi^*\mathcal{C}, \mathcal{C}, \phi)$  の形の 3 つ組で構成される Hermite-Liouville 多様体  $(M, g)$  はある  $Q$  について  $Q$  同値となる別の Hermite 計量  $\tilde{g}$  を許容する。

$(M, \tilde{g})$  に対応する 3 つ組も  $(\phi_1^*\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1, \phi_1)$  の形であり、 $C$  射影同値  $\psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_1$  と対応する写像  $\psi' : \phi^*\mathcal{C} \rightarrow \phi_1^*\mathcal{C}_1$  があって、図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}/\tilde{l}\mathbb{Z} (\mathcal{C}) & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}/\tilde{l}_1\mathbb{Z} (\mathcal{C}_1) \\ \phi \uparrow & & \uparrow \phi_1 \\ \mathbb{R}/l\mathbb{Z} (\phi^*\mathcal{C}) & \xrightarrow{\psi'} & \mathbb{R}/l_1\mathbb{Z} (\phi_1^*\mathcal{C}_1) \end{array}$$

が可換で、 $(\psi, \psi')$  が  $g$  と  $\tilde{g}$  の  $C$  射影同値の類似を導く。