

時間発展するランダム行列

香取眞理(かとりまこと)

中央大学理工物理

(統計力学, 確率論)

2014年3月7日

第21回 沼津研究会 (2014年3月6-8日)

沼津工業高等専門学校

目次

1. ブラウン運動とベッセル過程
2. ランダム行列理論とダイソン模型
3. ダイソン模型の楕円関数拡張と可積分性

1. ブラウン運動とベッセル過程

1次元上 $x \in \mathbb{R}, t > 0$

$B(t)$ = Brown 運動の時刻 t での位置

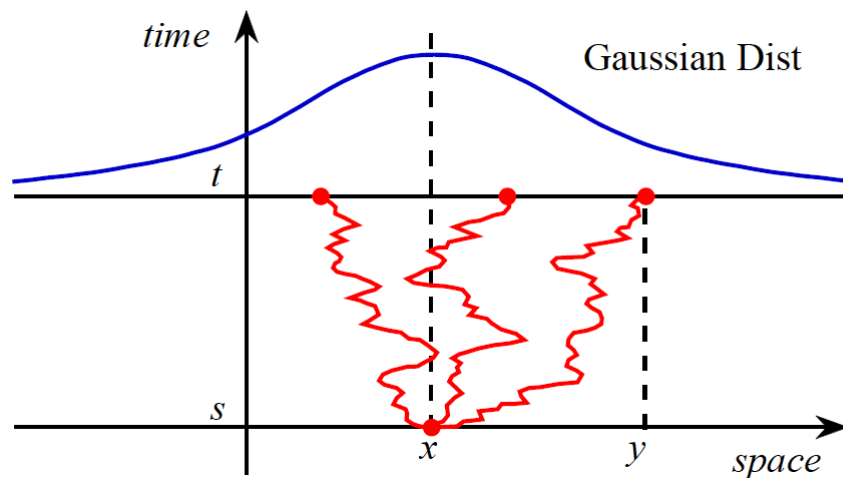
$$\text{Prob}\left(B(t) \in [a, b] \mid B(s) = x\right) = \int_a^b p(t-s, y|x) dy, \quad t \geq s \geq 0.$$

$$p(t, y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2t}\right\}, \quad t \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Brownian motion (BM) の推移確率密度

$$\text{熱核: } \frac{\partial}{\partial t} p(t, y|x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t, y|x),$$

$$\lim_{t \downarrow 0} p(t, y|x) = \delta(x-y) \quad \text{を満たす解}$$

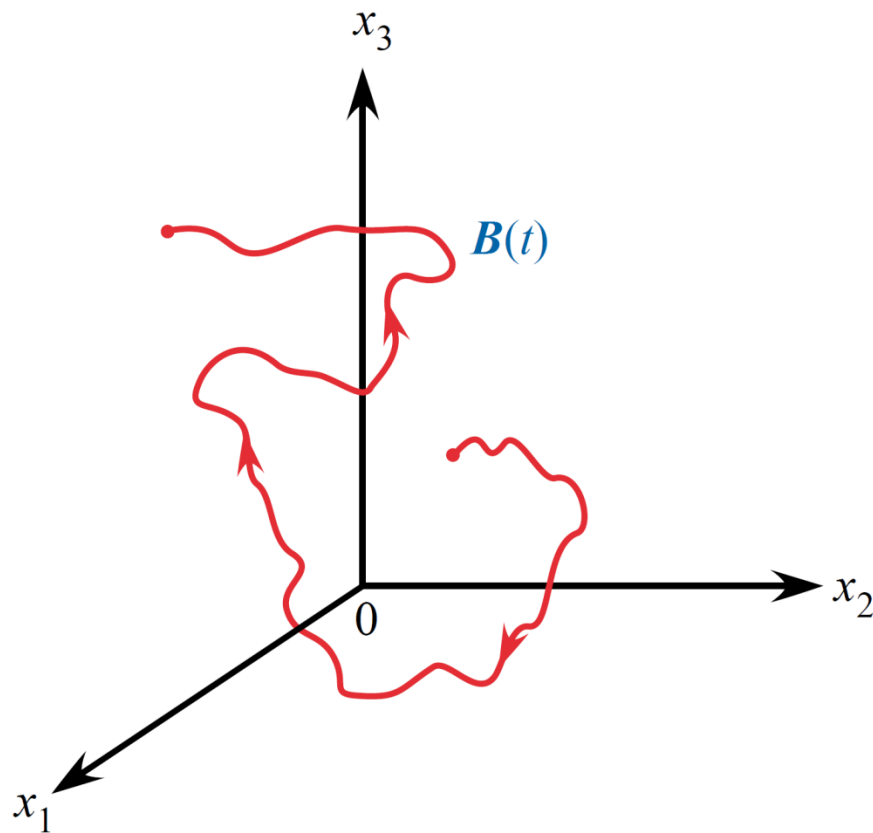


$D \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$ 空間次元

D 次元 BM

$$\mathbf{B}(t) = (B_1(x), B_2(x), \dots, B_D(x))$$

各成分 $B_j(t), 1 \leq j \leq D$ は互いに独立な 1 次元 BM

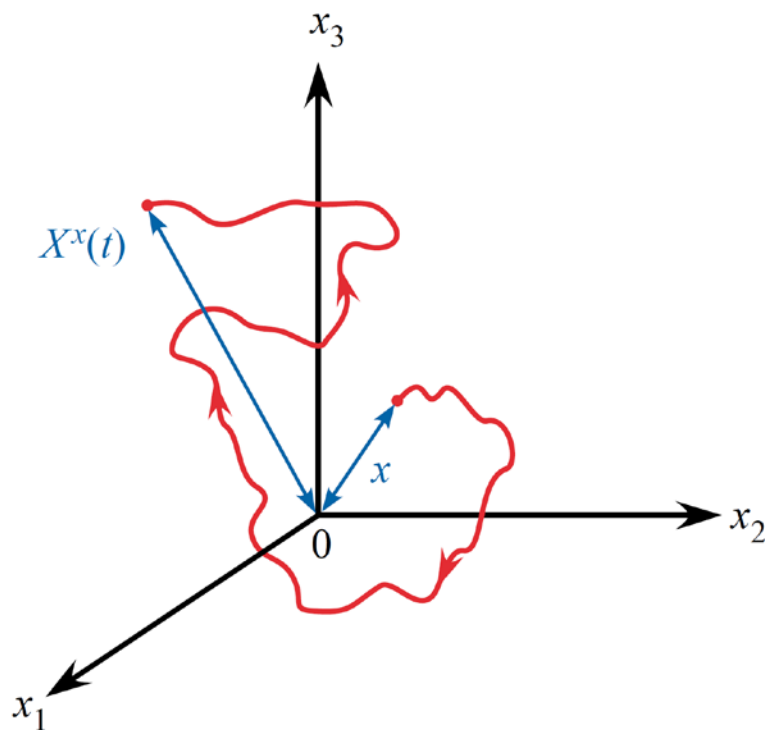


D次元 Bessel 過程

D次元 BM の動径成分 (原点からの距離)

$$X(t) \equiv |\mathbf{B}(t)| = \sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + \cdots + B_D(t)^2}$$

を D次元 Bessel 過程とよぶ.



D 次元 BM の各成分がランダム \implies それらの関数である $|\mathbf{B}(t)|$ もランダム

動的な誤差の伝播 \iff 伊藤の公式

$$dX(t) = dB(t) + \frac{D-1}{2} \frac{dt}{dX(t)}, \quad t > 0.$$

確率微分方程式 stochastic differential equation (SDE)

- 右辺第1項の $B(t)$ は $B_j(t), 1 \leq j \leq D$ とは独立な 1 次元 BM.

確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) , 期待値 $E[\cdot]$

$\{\mathcal{F}(t) : t \in [0, \infty)\}$, $\mathcal{F}(t) = \sigma(B(s), s \in [0, t])$, usual conditions

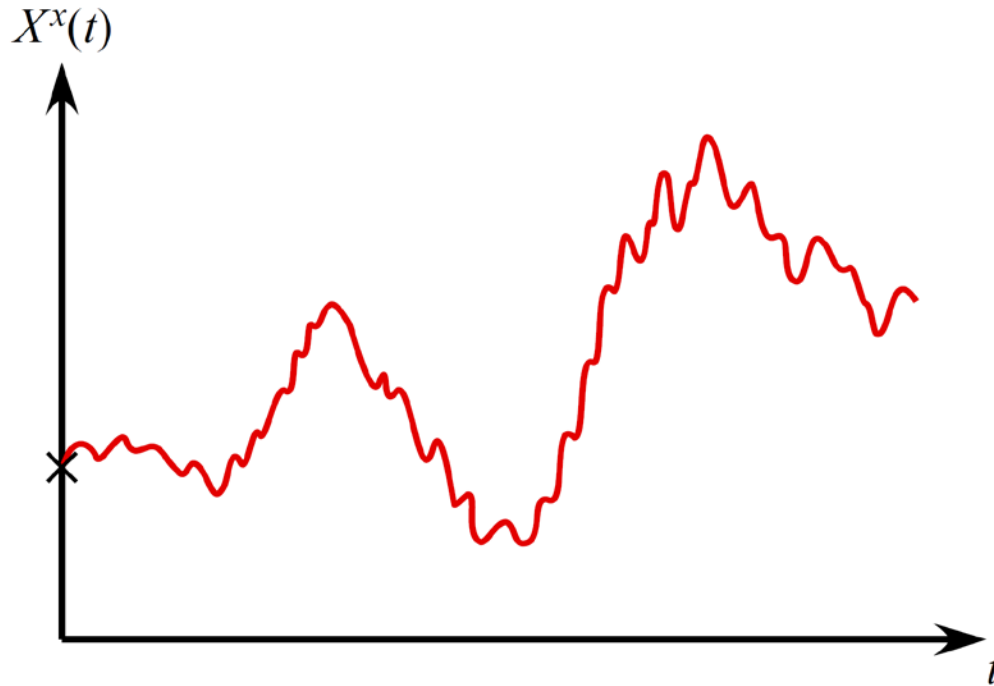
マルチンゲール $E[B(t)|\mathcal{F}(s)] = B(s)$ a.s. $s \leq t$

二次変分 $\langle B, B \rangle_t = t$ (標準ブラウン運動)

- $D > 1$ とすると $\frac{D-1}{2} > 0$.

$$X(t) \downarrow, \quad D \uparrow \implies \frac{D-1}{2} \frac{1}{X(t)} \uparrow$$

右辺第2項=ドリフト項: 原点から外向きに働く斥力



原点からの長距離斥力 \Leftarrow “エントロピー力”

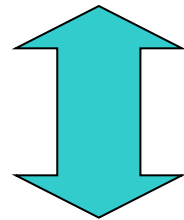
特に原点に戻りたくないわけではない。

ただ、次元 D が高いといろいろな方向に行ける。

その中で原点に戻るルート（重み（割合））は小さくなってしまふ。

（確率分布は D 次元空間 \mathbb{R}^D 全体で規格化されている。）

$$\text{SDE: } dX(t) = dB(t) + \frac{D-1}{2} \frac{1}{X(t)} dt$$



推移確率密度関数 $p^{(D)}(t, y|x) : (0, x) \rightsquigarrow (t, y)$ に対する
Fokker-Planck (Kolmogorov) 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} p^{(D)}(t, y|x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p^{(D)}(t, y|x) + \frac{D-1}{2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} p^{(D)}(t, y|x)$$

推移確率密度関数 $p^{(D)}(t, y|x) : (0, x) \rightsquigarrow (t, y)$ に対する

Fokker-Planck (Kolmogorov) 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} p^{(D)}(t, y|x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p^{(D)}(t, y|x) + \frac{D-1}{2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} p^{(D)}(t, y|x)$$

$$\lim_{t \downarrow 0} p^{(D)}(t, y|x) = \delta(x - y).$$

$$p^{(D)}(t, y|x) = \frac{1}{t} \frac{y^{\nu+1}}{x^\nu} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right)$$

$$\nu = \frac{1}{2}(D - 2) \iff D = 2(\nu + 1)$$

modified Bessel function $I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du \quad (\text{Gamma function}).$$

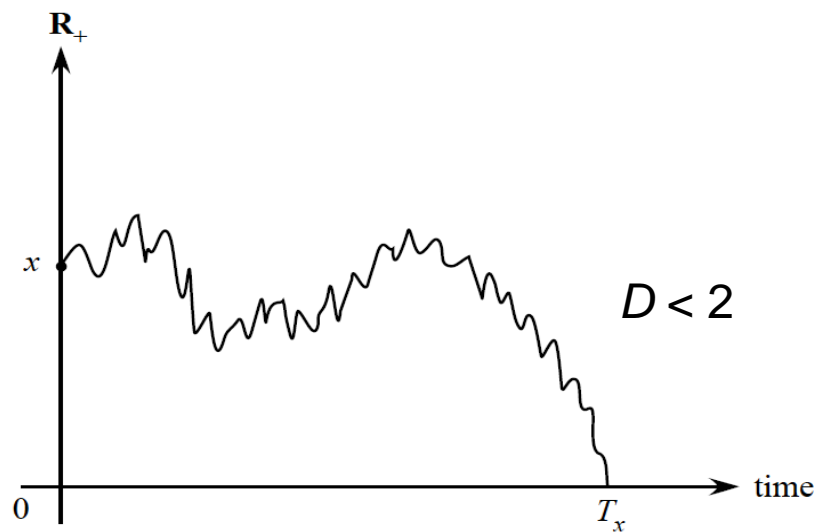
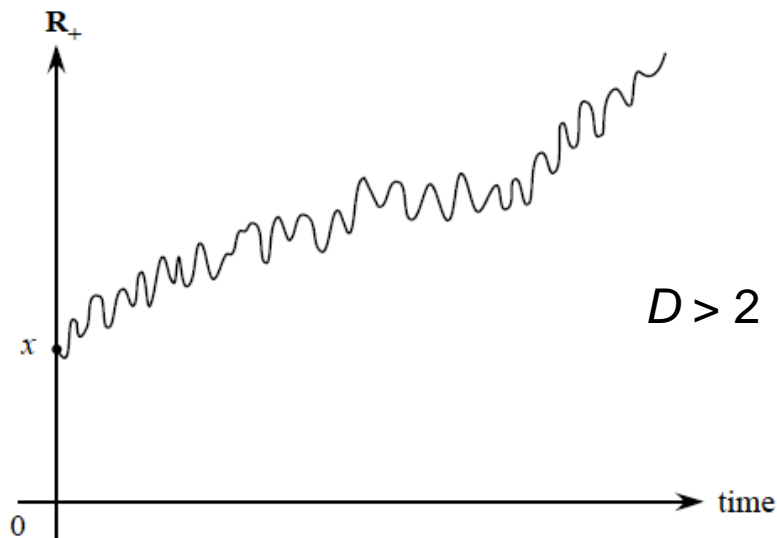
\implies 「Bessel 過程」という名称の由来

$x > 0$ から出発した D 次元 Bessel 過程が初めて原点に到達する時刻を T_x と記す；

$$T_x = \inf \{ t > 0 : X_t^x = 0 \}.$$

(i) $D \geq 2 \implies T_x = \infty, \forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ.
 ($D > 2$) 推移的 transient

(ii) $1 \leq D < 2 \implies T_x < \infty, \forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ.
 再帰的 recurrent

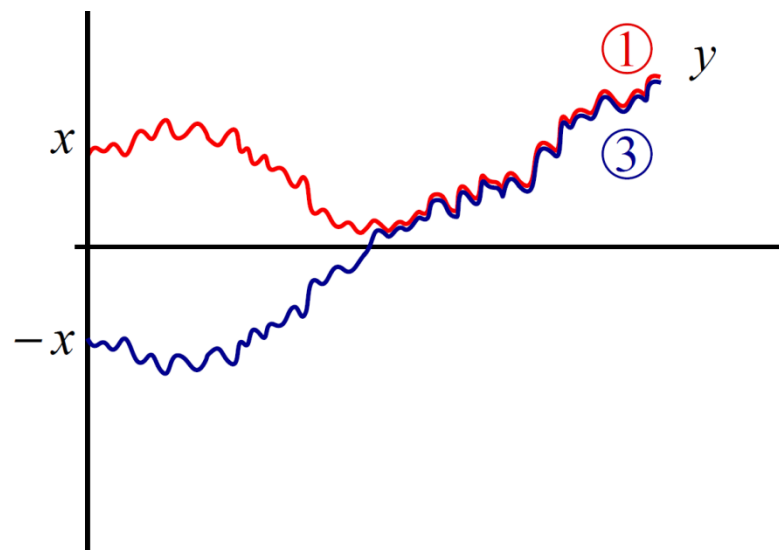
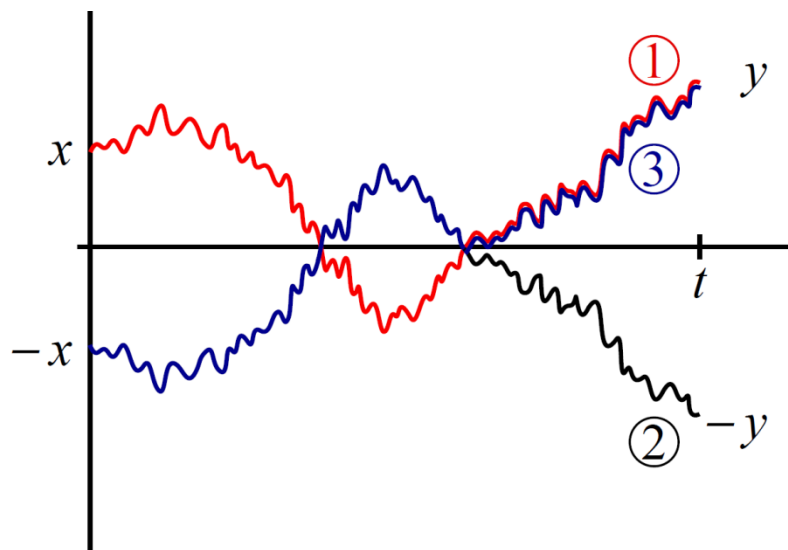


$$D = 3 \text{ のとき, } \nu = \frac{1}{2}(3 - 2) = \frac{1}{2}$$

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} (e^z - e^{-z})$$

$$p^{(3)}(t, y|x) = \frac{y}{x} \left\{ p(t, y|x) - p(t, y|-x) \right\}$$

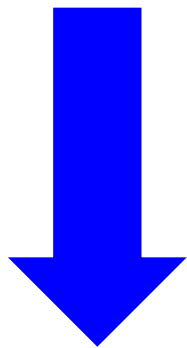
$x > 0$ からスタートした 3次元 Bessel 過程が原点に戻る確率=0
(推移的)



$$\textcircled{1} = \textcircled{2} = \textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1} - \textcircled{3} = 0$$

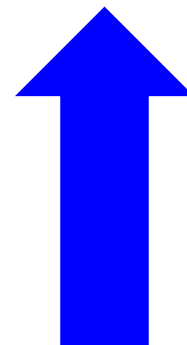
$$\textcircled{1} - \textcircled{3} > 0$$

3次元ベツセル過程



原点に戻らない，つまり正領域に留まっている1次元ブラウン運動

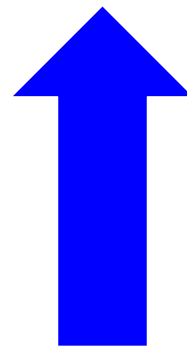
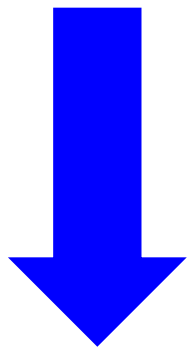
3次元ベッセル過程



確率の正規化 $\times \frac{y}{x}$

原点に戻らない，つまり正領域に留まっている1次元ブラウン運動
(正領域に留まるという条件付きの1次元ブラウン運動)

3次元ベッセル過程



確率の正規化 $\times \frac{y}{x}$

原点に戻らない，つまり正領域に留まっている1次元ブラウン運動
(正領域に留まるという条件付きの1次元ブラウン運動)

$X(t), t \geq 0$: 3次元ベッセル過程 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x), \mathbb{E}_x, \{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$
 $W(t), t \geq 0$: 1次元ブラウン運動 $\mathbb{P}_x, \mathbb{E}_x$

$$\mathbb{P}_x[X(t) \in dy] = \mathbb{P}_x[W(t) \in dy, T_x > t] \frac{y}{x}$$

$0 \leq t \leq T < \infty$, すべての $\mathcal{F}(T)$ -可測関数 F に対して

$$\mathbb{E}_x[F(X(\cdot))] = \mathbb{E}_x \left[F(W(\cdot)) \mathbf{1}(T_x > T) \frac{X(T)}{x} \right]$$

$$\mathbf{1}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{条件 } \omega \text{ が満たされるとき} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

特に F が各時刻で偶関数 ($F(-x) = F(x)$) であるとき, BM の経路の対称性 (reflection principle) より

$$\mathbb{E}_x[F(X(\cdot))] = \mathbb{E}_x \left[F(W(\cdot)) \frac{X(T)}{x} \right]$$

$X(t), t \geq 0$: 3次元ベッセル過程 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x), \mathbb{E}_x, \{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$
 $W(t), t \geq 0$: 1次元ブラウン運動 $\mathbb{P}_x, \mathbb{E}_x$

$$\mathbb{P}_x[X(t) \in dy] = \mathbb{P}_x[W(t) \in dy, T_x > t] \frac{y}{x}$$

$0 \leq t \leq T < \infty$, すべての $\mathcal{F}(T)$ -可測関数 F に対して

$$\mathbb{E}_x[F(X(\cdot))] = \mathbb{E}_x \left[F(W(\cdot)) \mathbf{1}(T_x > T) \frac{X(T)}{x} \right]$$

$$\mathbf{1}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{条件 } \omega \text{ が満たされるとき} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

特に F が各時刻で偶関数 ($F(-x) = F(x)$) であるとき, BM の経路の対称性 (reflection principle) より

$$\mathbb{E}_x[F(X(\cdot))] = \mathbb{E}_x \left[F(W(\cdot)) \frac{X(T)}{x} \right]$$

 原点からの斥力あり

$X(t), t \geq 0$: 3次元ベッセル過程 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x), \mathbb{E}_x, \{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$
 $W(t), t \geq 0$: 1次元ブラウン運動 $\mathbb{P}_x, \mathbb{E}_x$

$$\mathbb{P}_x[X(t) \in dy] = \mathbb{P}_x[W(t) \in dy, T_x > t] \frac{y}{x}$$

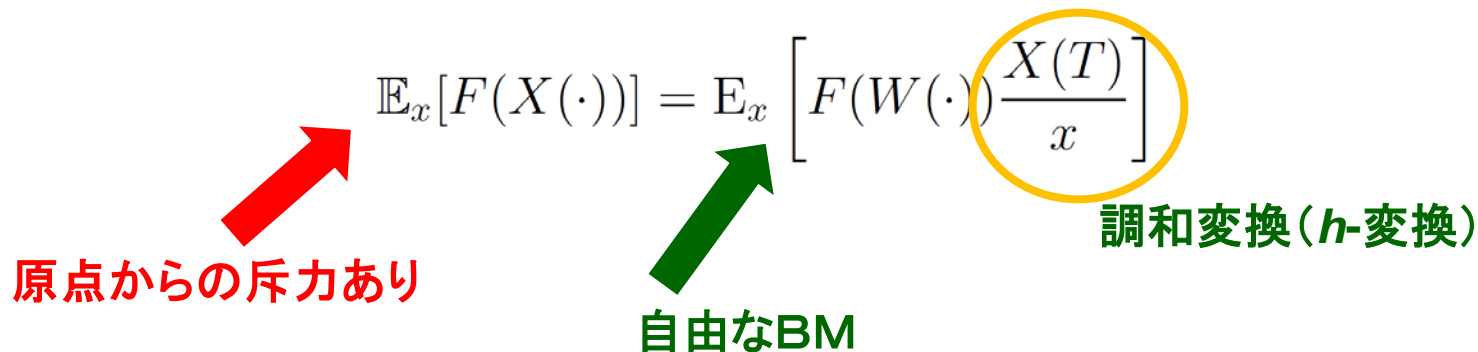
$0 \leq t \leq T < \infty$, すべての $\mathcal{F}(T)$ -可測関数 F に対して

$$\mathbb{E}_x[F(X(\cdot))] = \mathbb{E}_x \left[F(W(\cdot)) \mathbf{1}(T_x > T) \frac{X(T)}{x} \right]$$

$$\mathbf{1}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{条件 } \omega \text{ が満たされるとき} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

特に F が各時刻で偶関数 ($F(-x) = F(x)$) であるとき, BM の経路の対称性 (reflection principle) より

$$\mathbb{E}_x[F(X(\cdot))] = \mathbb{E}_x \left[F(W(\cdot)) \frac{X(T)}{x} \right]$$



原点からの斥力あり
 自由なBM
 調和変換 (h -変換)

$$\mathbb{E}_x [F(X(\cdot))] = \mathbb{E}_x \left[F(W(\cdot)) \frac{X(T)}{x} \right]$$

3次元ベッセル過程



「正值条件の下でのブラウン運動」の h -変換

F. Spitzer, A Tauberian theorem and its probability interpretation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **94**, (1960), 150-169.

D. L. Iglehart, Functional central limit theorems for random walks conditioned to stay positive, *Ann. Probab.* **2**, (1974), 608-619.

2. ランダム行列理論とダイソン模型

- 3次元 Bessel 過程 $\frac{D-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$

$$dX(t) = dB_j(t) + \frac{1}{X(t)} dt, \quad t \geq 0$$

↓ 1次元 N 粒子系に拡張

$$dX_j(t) = dB_j(t) + \sum_{1 \leq k \leq N: k \neq j} \frac{1}{X_j(t) - X_k(t)} dt, \quad 1 \leq j \leq N, \quad t \geq 0$$

ここで, $B_j(t), 1 \leq j \leq N$ は互いに独立な 1次元 BM

- $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t))$
 すべての粒子間に, 粒子間距離に反比例する
 斥力が働く 1次元多粒子系

Dyson 模型

(Dyson's BM model with $\beta = 2$, 1962)

“Bessel/Dyson 対応”の two aspects

[aspect 1]

- 独立な 1 次元 BMs

$$\begin{aligned} B_{jk}(t), & \quad 1 \leq j \leq k \leq N \\ \tilde{B}_{jk}(t), & \quad 1 \leq j < k \leq N \\ & \quad \frac{N(N+1)}{2} + \frac{N(N-1)}{2} = N^2 \quad \text{個} \end{aligned}$$

- $N \times N$ エルミート行列値 BM

$$M(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{12}(t) + i\tilde{B}_{12}(t)) & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{1N}(t) + i\tilde{B}_{1N}(t)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{12}(t) - i\tilde{B}_{12}(t)) & B_{22}(t) & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{2N}(t) + i\tilde{B}_{2N}(t)) \\ & \cdots & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{1N}(t) - i\tilde{B}_{1N}(t)) & \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{2N}(t) - i\tilde{B}_{2N}(t)) & \cdots & B_{NN}(t) \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{H}_N = \{N \times N \text{ Hermite 行列}\} \simeq \mathbb{R}^{N^2}$

$$M(t) \in \mathcal{H}_N \iff N^2 \text{ 次元 BM} \in \mathbb{R}^{N^2}$$

- 各時刻 $t \geq 0 \implies \exists! U(t) : N \times N$ ユニタリ行列

s.t. $U(t)^\dagger M(t) U(t) = \Lambda(t)$

$$\Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t) \equiv (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$$

$$\in \mathbb{W}_N^A \equiv \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N\} \quad A_{N-1} \text{ 型 Weyl chamber}$$

- 伊藤の公式 (行列値確率過程バージョン)

$$\begin{aligned} d\Lambda(t) &= dU(t)^\dagger M(t) U(t) + U(t)^\dagger dM(t) U(t) + U(t)^\dagger M(t) dU(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} dU(t)^\dagger dM(t) U(t) + \frac{1}{2} dU(t)^\dagger M(t) dU(t) + \frac{1}{2} U(t) dM(t) dU(t) \end{aligned}$$

\Downarrow

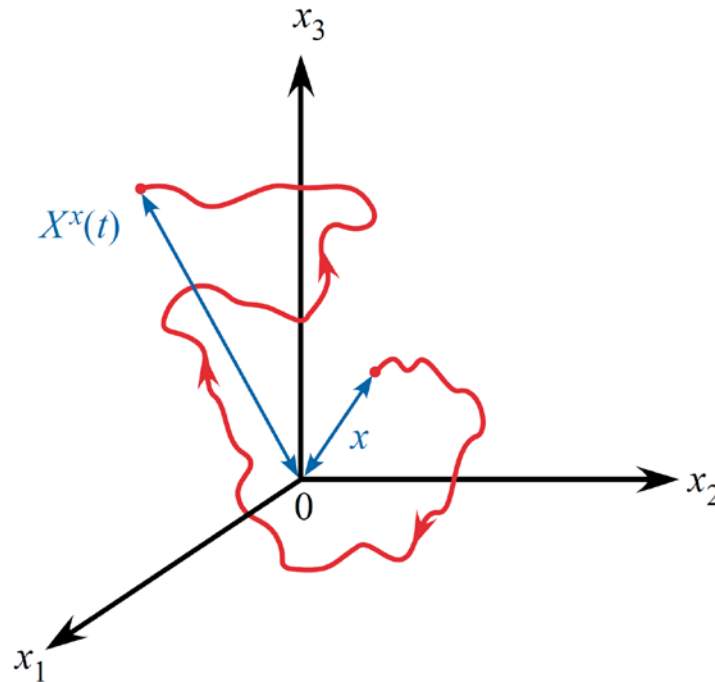
[Bru (1991), K-Tanemura (2004)]

$$d\lambda_j(t) = dB_j(t) + \sum_{1 \leq k \leq N: k \neq j} \frac{dt}{\lambda_j(t) - \lambda_k(t)}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad t \geq 0$$

つまり, 「固有値プロセス = Dyson モデル」

[aspect 1]

3次元 Bessel 過程 \iff 3次元 BM の動径成分
 N 粒子 Dyson 模型 \iff $N \times N$ エルミート行列値 BM の
固有値成分



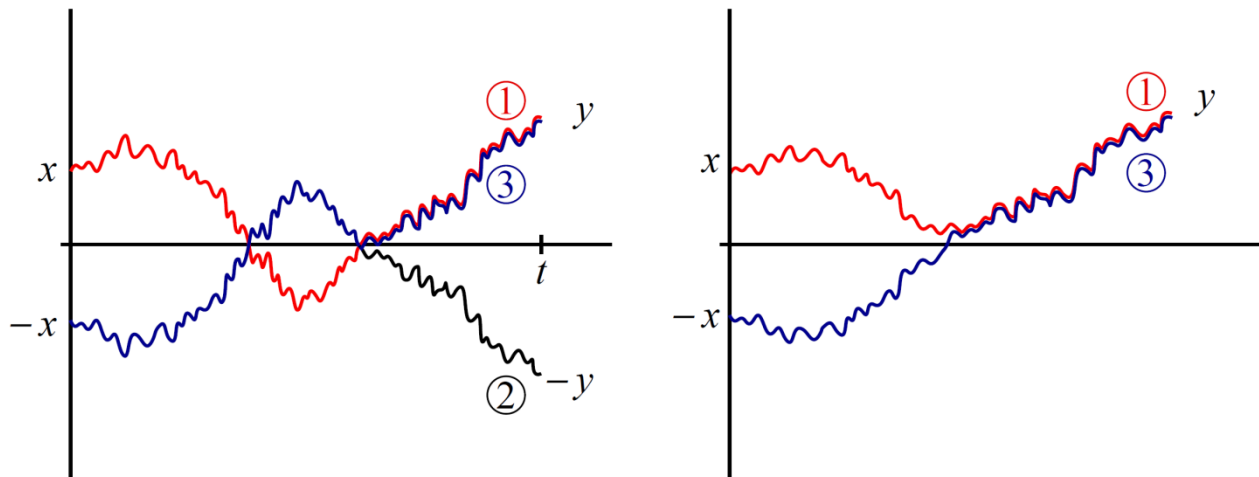
- 3次元 Bessel 過程の推移確率密度 ($D = 3 \iff \nu = 1/2$)

$$\begin{aligned} p^{(3)}(t, y|x) &= \frac{y}{x} \left\{ p(t, y|x) - p(t, y| -x) \right\} \\ &= \frac{\phi(y)}{\phi(x)} \sum_{\sigma \in \{\text{id.}, \text{ref.}\}} \text{sgn}(\sigma) p(t, y|\sigma(x)) \end{aligned}$$

$$p(t, y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-y)^2/2t} \quad \text{BM の推移確率密度}$$

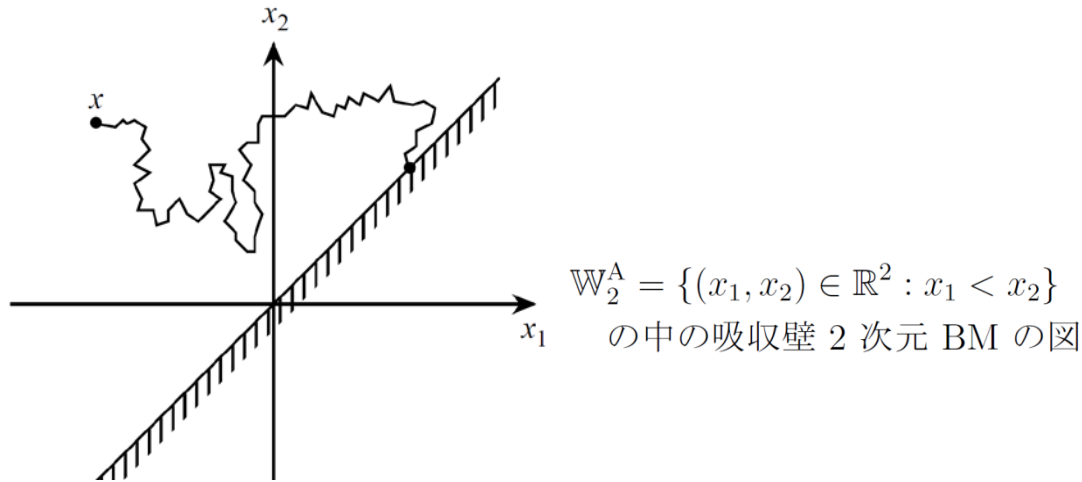
$$\phi(x) = x : \quad \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = 0, \quad \phi(0) = 0$$

調和関数 (harmonic function)



- 非衝突 BM = Weyl chamber \mathbb{W}_N^A 中の吸収壁 BM + 調和変換 (h -transform)

$$\mathbb{W}_N^A = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N\} \quad A_{N-1} \text{ 型 Weyl chamber}$$



$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in W_N^A$$

$$p^{\text{noncoll.}}(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = \frac{h_N(\mathbf{y})}{h_N(\mathbf{x})} \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^N p(t, y_j | x_{\sigma(j)})$$

$$= \frac{h_N(\mathbf{y})}{h_N(\mathbf{x})} \det_{1 \leq j, k \leq N} [p(t, y_j | x_k)]$$

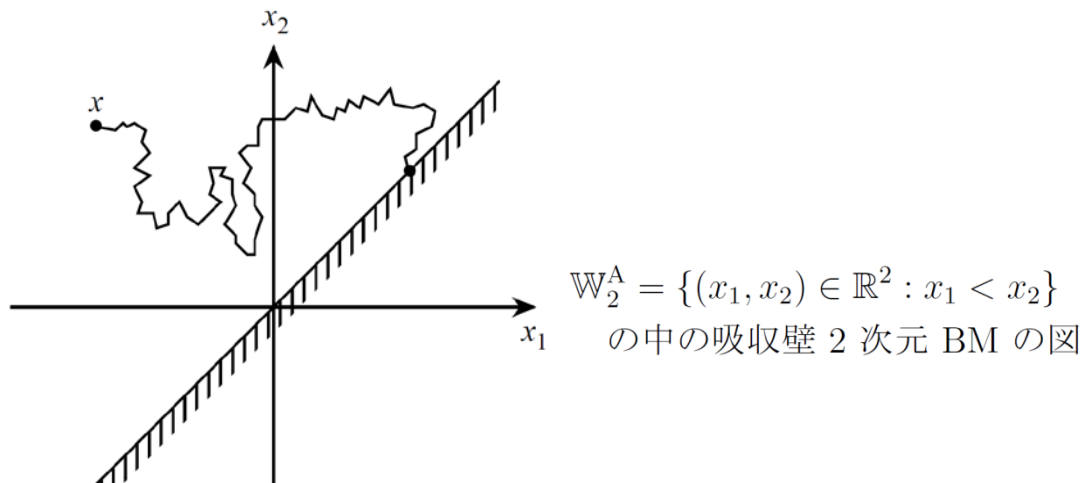
Karlin-McGregor 行列式 (1959)

$$h_N(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j) = \det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{k-1}]$$

Vandermonde 行列式 $\times (-1)^{N(N-1)/2}$

- 非衝突 BM = Weyl chamber \mathbb{W}_N^A 中の吸収壁 BM + 調和変換 (h -transform)

$$\mathbb{W}_N^A = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N\} \quad A_{N-1} \text{ 型 Weyl chamber}$$



$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in W_N^A$$

$$\begin{aligned} p^{\text{noncoll.}}(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) &= \frac{h_N(\mathbf{y})}{h_N(\mathbf{x})} \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^N p(t, y_j | x_{\sigma(j)}) \\ &= \frac{h_N(\mathbf{y})}{h_N(\mathbf{x})} \det_{1 \leq j, k \leq N} [p(t, y_j | x_k)] \end{aligned}$$

Karlin-McGregor 行列式 (1959)

差積

$$h_N(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j) = \det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{k-1}]$$

Vandermonde 行列式 $\times (-1)^{N(N-1)/2}$

$$\Delta h_N(\mathbf{x}) \equiv \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} h_N(\mathbf{x}) = 0 \quad N \text{ 変数 harmonic function}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p^{\text{noncoll.}}(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \Delta p^{\text{noncoll.}}(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^N \sum_{1 \leq k \leq N: k \neq j} \frac{1}{x_j - x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} p^{\text{noncoll.}}(t, \mathbf{y} | \mathbf{x})$$

Fokker-Planck-Kolmogorov 方程式

$$\Updownarrow$$

$$dX_j(t) = dB_j(t) + \sum_{1 \leq k \leq N: k \neq j} \frac{dt}{X_j(t) - X_k(t)}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad t \geq 0.$$

SDE

[aspect 2]

3 次元 Bessel 過程 \iff 原点吸収壁がある BM + h -変換

\iff 正值に条件付けられた BM

N 粒子 Dyson 模型 \iff \mathbb{W}_N^A 中の吸収壁 BM + h -変換

\iff 非衝突条件下の N 粒子 BM

[aspect 1]

3次元 Bessel 過程 \iff 3次元 BM の動径成分
 N 粒子 Dyson 模型 \iff $N \times N$ エルミート行列値 BM の
 固有値成分

[aspect 2]

3次元 Bessel 過程 \iff 原点に吸収壁がある BM + h -変換
 \iff 正值に条件付けられた BM
 N 粒子 Dyson 模型 \iff \mathbb{W}_N^A 中の吸収壁 BM + h -変換
 \iff 非衝突条件下の N 粒子 BM

射影 \iff 制限付きプロセス \iff 長距離相互作用
 “エントロピー力”(配置空間の制限) \iff ゲージ場 (対称性)

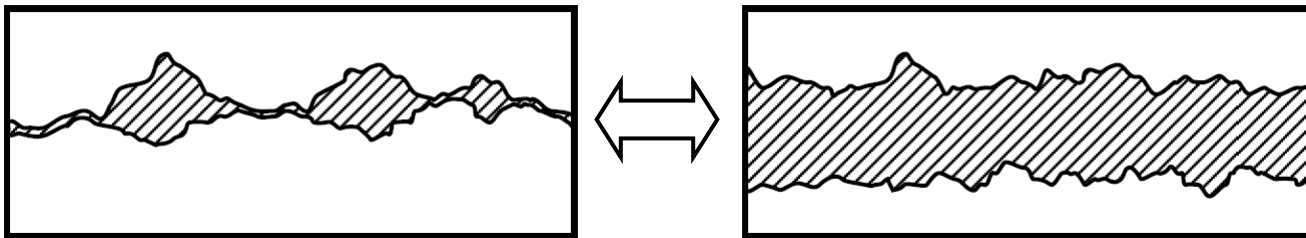
香取眞理, 種村秀紀: 「非衝突過程・行列値過程・行列式過程」
『数学』, Vol. 61, No.3, July 2009, pp.225-247 (2008)

M. Katori, H. Tanemura: Noncolliding processes, matrix-valued processes
and determinantal processes. *Sugaku Expositions (AMS)* **24**, 263-289 (2011)

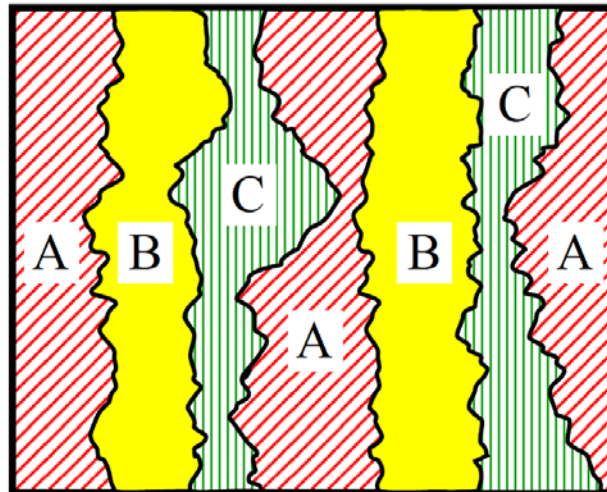
Dyson model = noncolliding Brownian motion

⇒ Vicious Walker Models

- As a model of **Wetting or Melting Transitions**
(Fisher (J. Statistical Physics 1984))

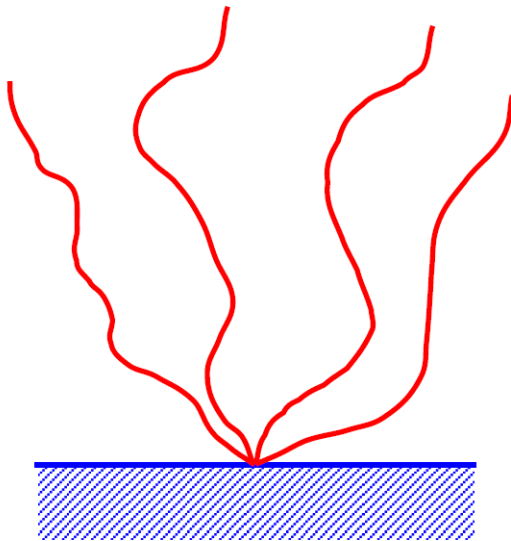


- As a model of **Commensurate-Incommensurate Transitions**
(Huse and Fisher (Physical Review B 1984))

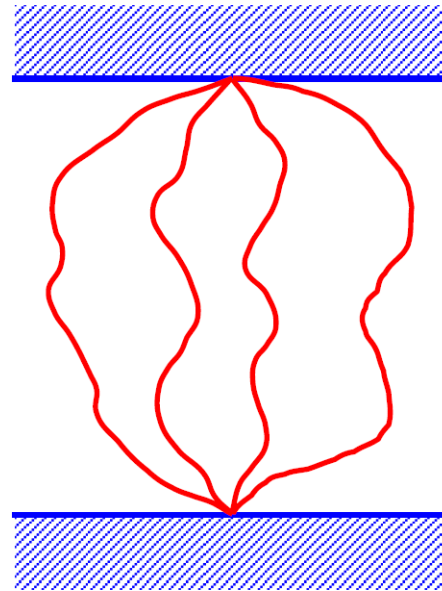


- As a model of **Directed Polymer Networks**
(de Gennes (J. Chemical Phys. 1968),
Essam and Guttmann (Phys. Review E 1995))

(a) polymer with **star topology**



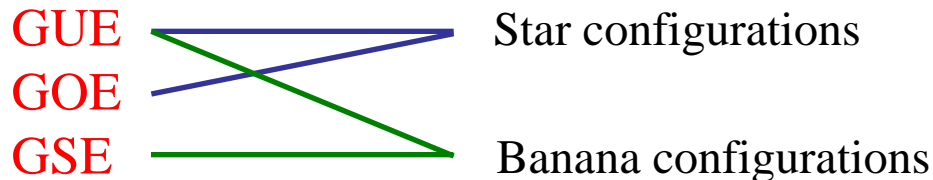
(b) polymer with **watermelon topology**



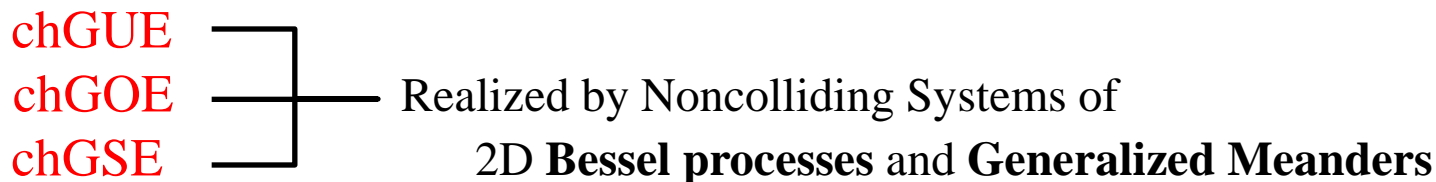
Vicious Walks/Random Matrix 対応

- There are **10 CLASSES** of Gaussian Random Matrix Theories.

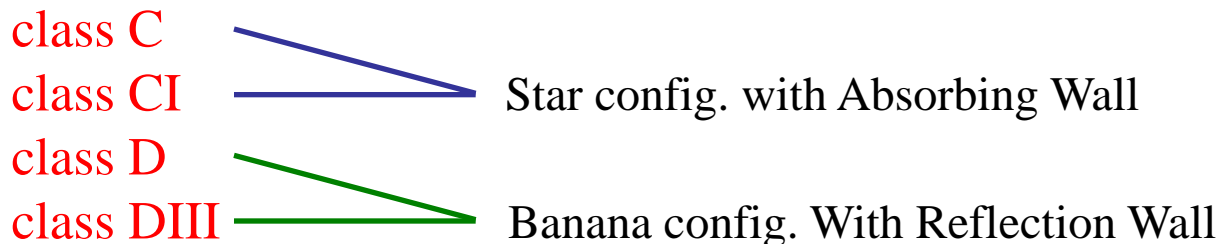
Standard (Wigner-Dyson)



Nonstandard (chiral random matrices) Particle Physics of QCD



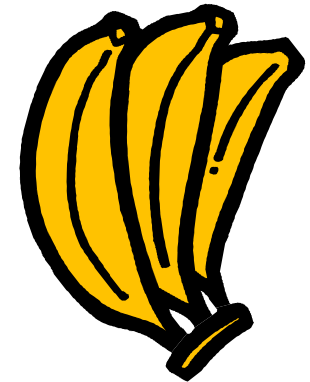
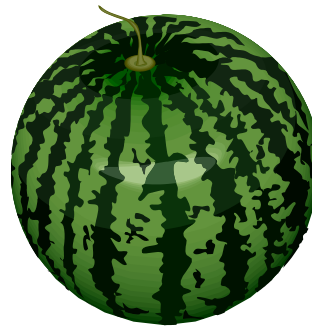
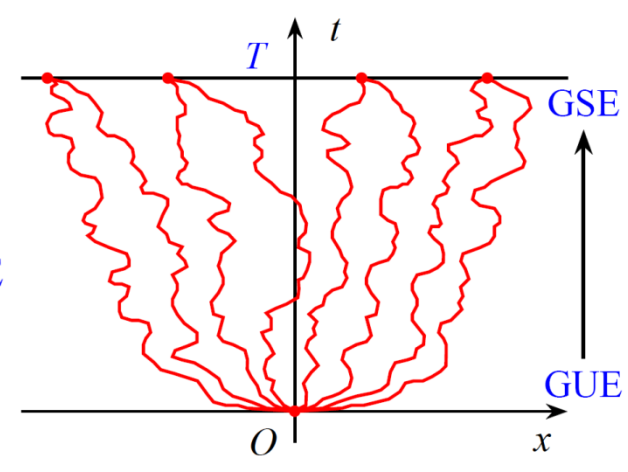
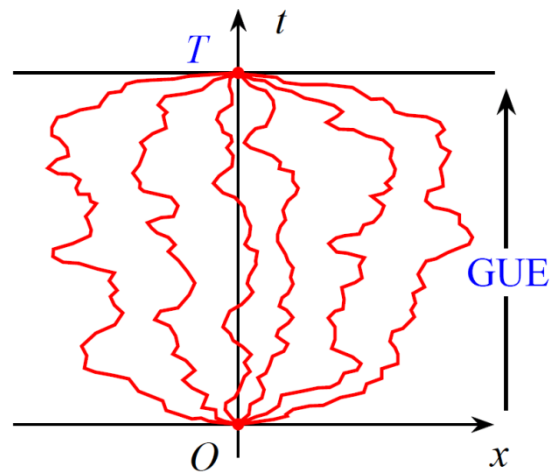
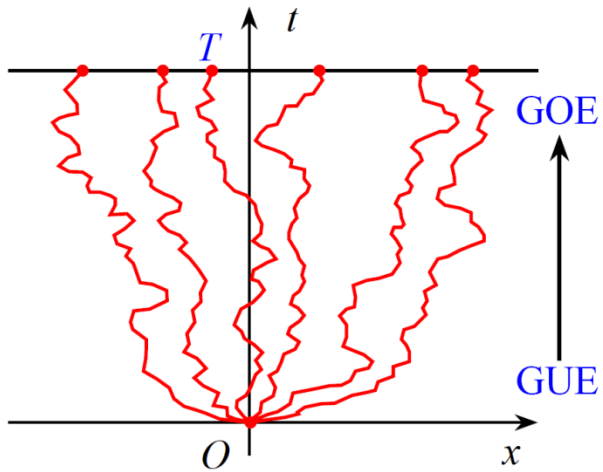
Nonstandard (Altland-Zirnbauer) Mesoscopic Physics with Superconductivity



All of the 10 eigenvalue-distributions can be realized by the
Noncolliding Diffusion Particle Systems (Vicious Walks).

非衝突ランダム曲線 (directed polymers) のトポロジー

⇔ ランダム行列の対称性の転移 (two-matrix models)

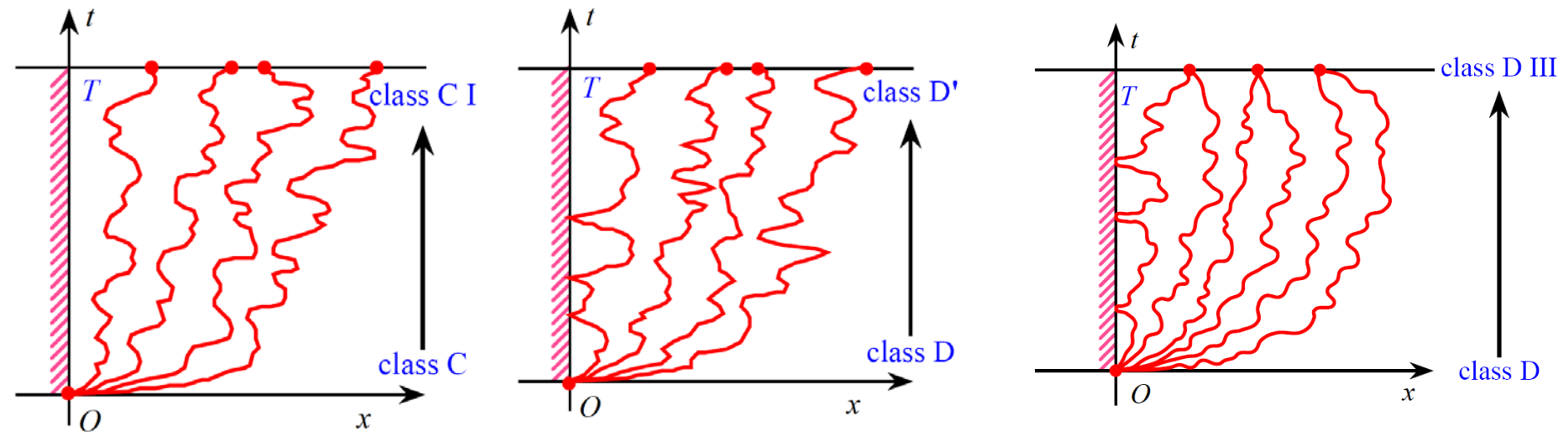


非衝突ランダム曲線 (directed polymers) のトポロジー

⇔ ランダム行列の対称性の転移 (two-matrix models)

壁付き (吸収壁、反射壁)

⋯ Bogoliubov-de Gennes class (Altland-Zirnbauer)



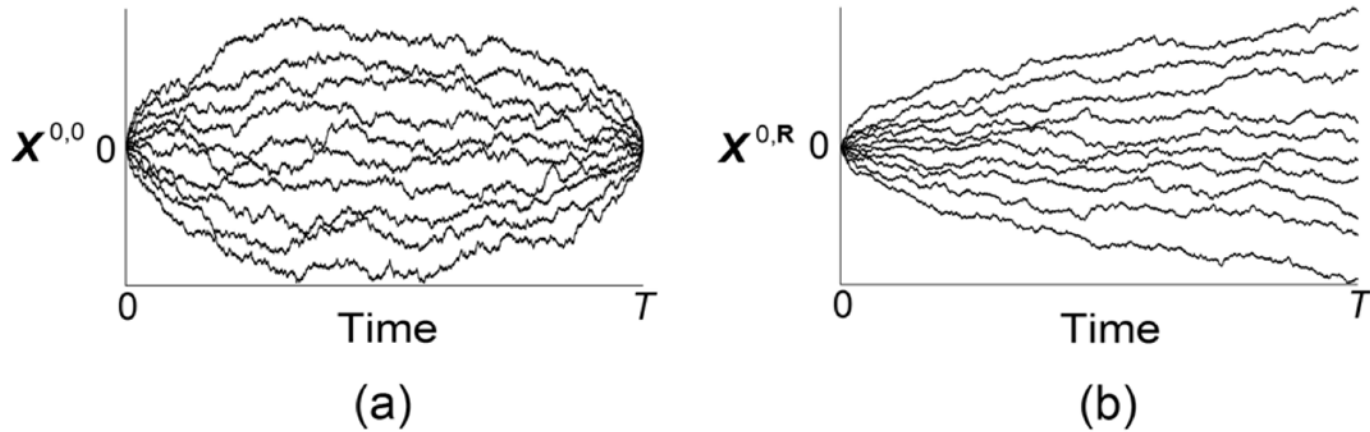


Figure 1. Samples of paths for (a) $X^{0,0}(t)$ and (b) $X^{0,\mathbb{R}}(t)$, $t \in [0, T]$, generated by simulating the corresponding eigenvalue processes of random-matrix models.

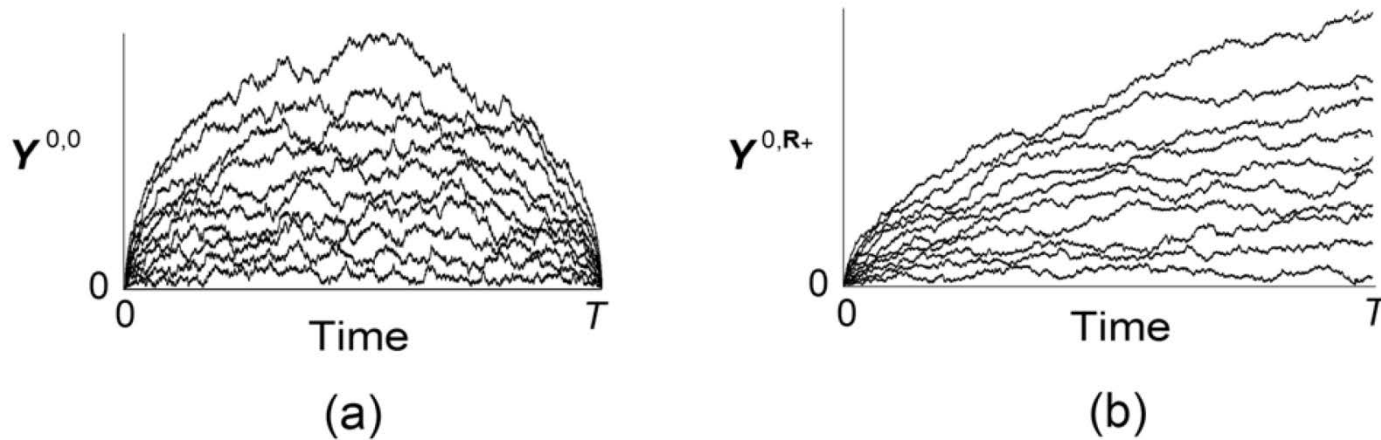
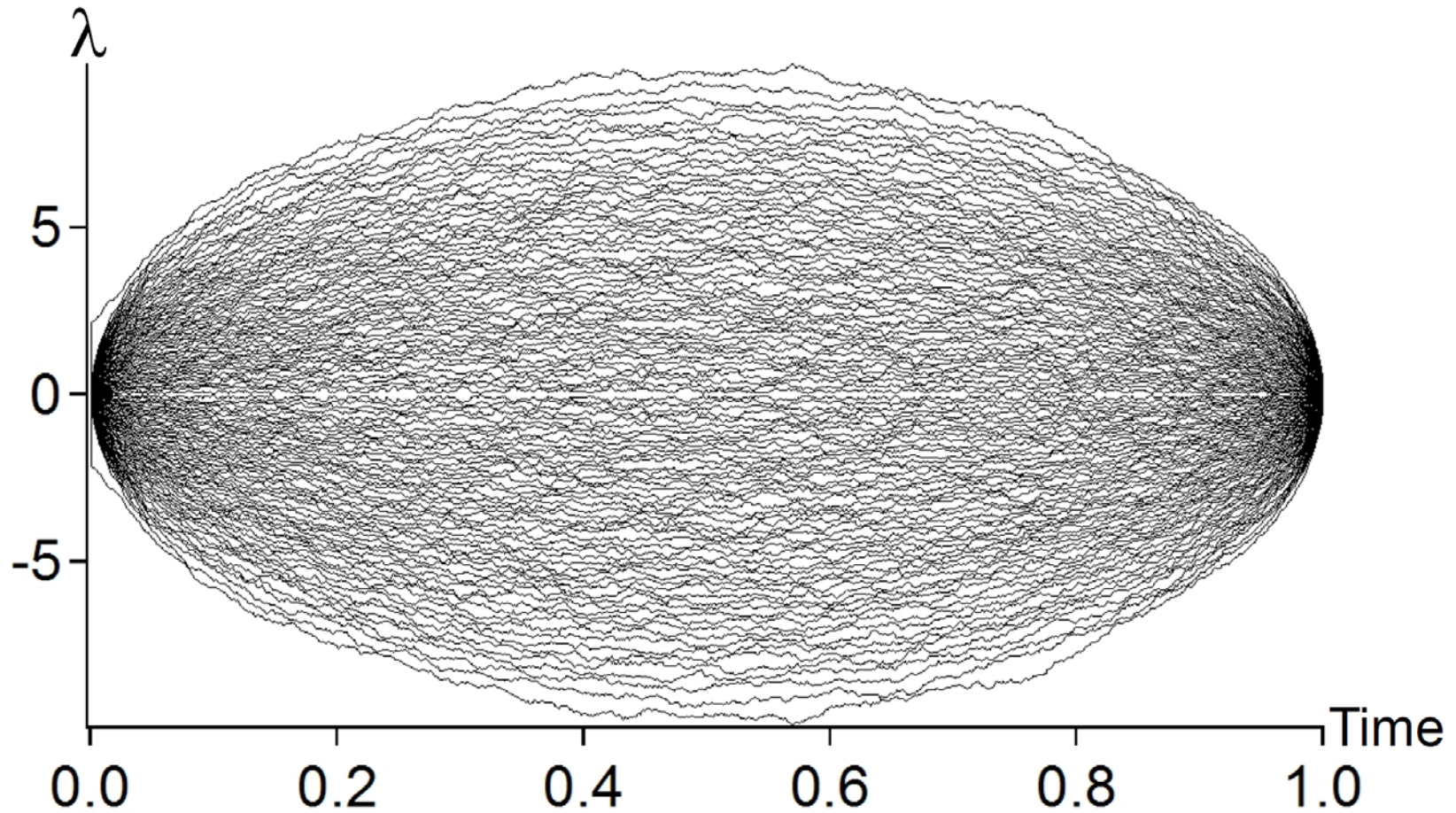


Figure 2. Samples of paths for (a) $Y^{0,0}(t)$ and (b) $Y^{0,\mathbb{R}+}(t)$, $t \in [0, T]$.



We use $50 \times (2 \times 50 + 1) = 5050$ independent Brownian bridges.

- The particle distribution μ_{Ai} with the *Airy kernel* is highly asymmetric: As a matter of fact, the particle density $\rho_{\text{Ai}}(x) = K_{\text{Ai}}(x|x)$ decays rapidly to zero as $x \rightarrow \infty$, but it diverges

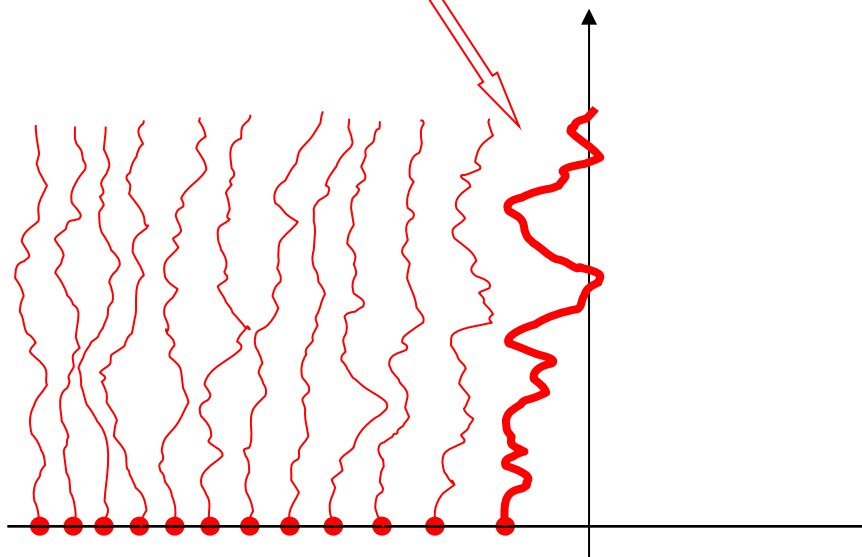
$$\rho_{\text{Ai}}(x) \simeq \frac{1}{\pi}(-x)^{1/2} \rightarrow \infty \quad \text{as } x \rightarrow -\infty.$$

- Let R be the position of the rightmost particle on \mathbb{R} in μ_{Ai} . Then its distribution is given by the celebrated *Tracy-Widom distribution* (Tracy-Widom (1994))

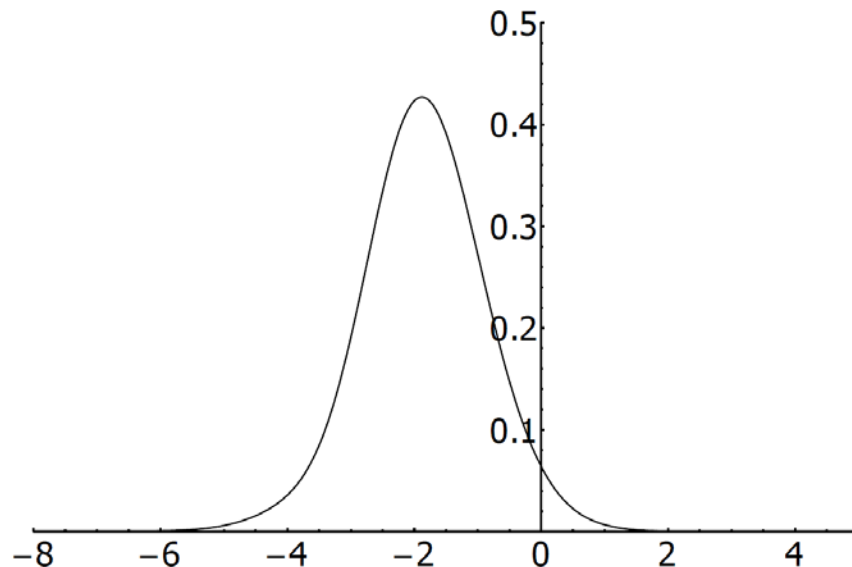
$$\mu_{\text{Ai}}(R < x) = \exp \left[- \int_x^\infty (y-x)(q(y))^2 dy \right],$$

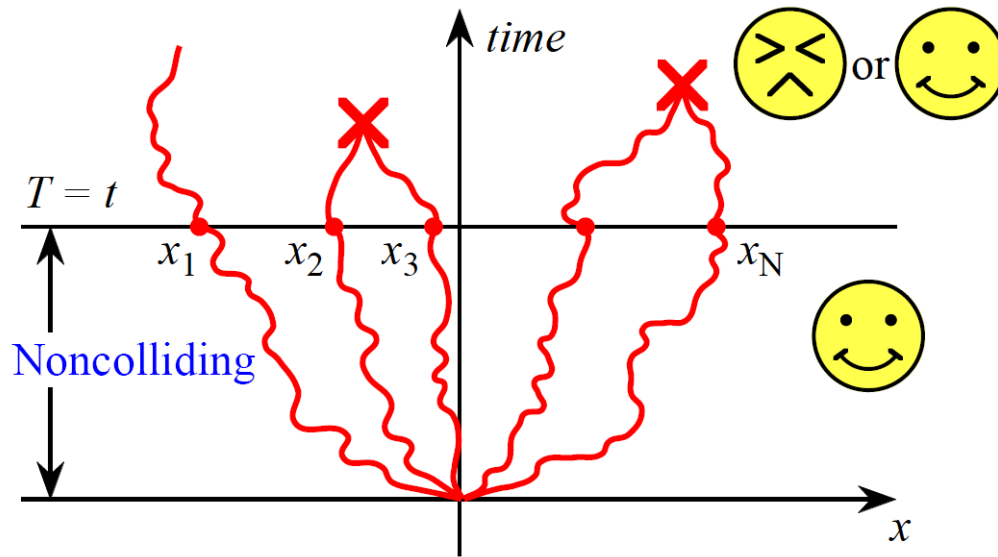
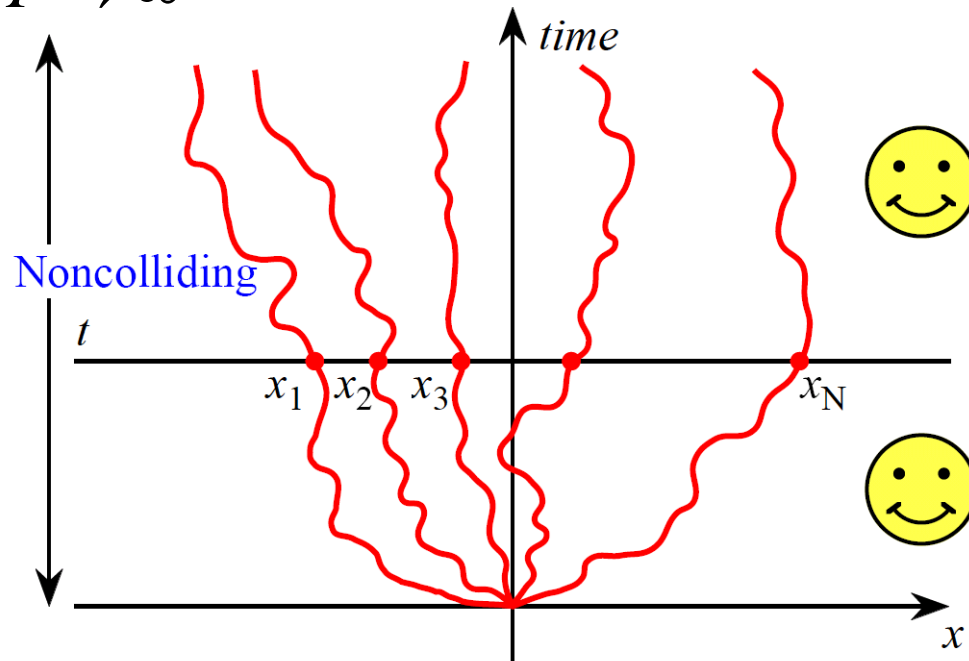
where $q(x)$ is the unique solution of the Painlevé II equation $q'' = xq + 2q^3$ satisfying the boundary condition $q(x) \simeq \text{Ai}(x)$ in $x \rightarrow \infty$.

rightmost path



probability density function of the Tracy-Widom distribution



Case $t = T$ Case $T \rightarrow \infty$ 

Vicious Walker Models

Physics

Focus: How Animals Avoid Each Other

Published November 12, 2010 | *Phys. Rev. Focus* **26**, 20 (2010) | DOI: 10.1103/PhysRevFocus.26.20

Foraging animals or other randomly moving entities can more easily avoid each other by taking more long-distance jumps,





Vicious walkers and random matrices

May 16th – 27th, Catherine Donati-Martin, Sandrine Péché,
Grégory Schehr

Orateurs

Cours introductif: J.B. Zuber (Paris)

Partie mathématique: K. Johansson (Stockholm) et C. Krattenthaler (Vienne)

Partie physique: S.N. Majumdar (Orsay) et M. Katori (Tokyo)

Objectifs

Cette école s'articule autour des développements récents en théorie des matrices aléatoires et leur connexion avec les marches aléatoires répulsives. Depuis les travaux pionniers de P.G. de Gennes et M.E. Fisher, les marches aléatoires répulsives ont été abondamment étudiées en physique statistique, dans différents contextes comme la physique des polymères, la transition de mouillage ou les problèmes de temps de premier passage. Par ailleurs, il est maintenant bien connu, depuis le "mouvement Brownien de Dyson" que ces modèles de marches aléatoires répulsives sont intimement reliés aux valeurs propres de matrices aléatoires. Durant ces dernières années, ces modèles de marches aléatoires répulsives, en connexion avec les matrices aléatoires ont également été beaucoup étudiés par les mathématiciens dans divers contextes comme les statistiques d'extrema ou les problèmes de pavages aléatoires. Il apparaît donc clairement qu'il s'agit d'un domaine où les interactions entre physiciens théoriciens et mathématiciens peuvent être bénéfiques. Le but de cette école est donc d'apporter aux étudiants la connaissance d'outils théoriques pour aborder ces thématiques en rapide évolution et favoriser les échanges entre ces deux communautés.

E
JRIER
GIE.SANTÉ

PROGRAMME 2011

<http://houches.ujf-grenoble.fr>

下記の通り第8回岡シンポジウムを開催致しますのでご案内申し上げます。

松澤淳一 角田秀一郎 (奈良女子大学理学部数学教室)

記

日時：2010年12月4日(土)～5日(日)

場所：奈良市北魚屋西町 奈良女子大学理学部数学教室新B棟4階 階段教室

プログラム

12月4日(土)

13:30 - 15:30 石川剛郎(北海道大学理学研究院数学部門)

写像の特異点の分類・双対性・応用

16:00 - 18:00 小林俊行(東京大学数理科学研究科)

Geometric Analysis on Minimal Representations

(極小表現の解析)

18:30 - 20:30 夕食会

12月5日(日)

10:30 - 12:30 香取眞理(中央大学理工学部物理学科)

非衝突ブラウン運動・ランダム行列・整関数

14:00 - 16:00 野口潤次郎(東京大学数理科学研究科)

Oka [VII], {VIII} と関連する話題について

なお、夕食会の会場は未定ですが、ご参加頂ける方は11月27日までに下記にご一報頂ければ幸いです。

奈良市北魚屋西町 奈良女子大学理学部数学教室 松澤 淳一

(Phone: 0742-20-3361 e-mail: matsuzawa@cc.nara-wu.ac.jp)

このシンポジウムは、岡潔シンポジウム実行委員会と、組織的な大学院教育改革推進プログラム「理系の実践型女性科学者育成」の共催で行います。

3. **ダイソン模型の楕円関数拡張と可積分性**⁴¹

\mathbb{R}



$S^1(r) \equiv$ 半径 r の円周

3. ダイソン模型の楕円関数拡張と可積分性⁴²

$\mathbb{R} \rightarrow S^1(r) \equiv$ 半径 r の円周

$\mathbb{W}_N^A = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N\}$ Weyl chamber of type A_{N-1}

$$\mathcal{A}_{2\pi r}^{A_{N-1}} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_1 + 2\pi r\}$$

a scaled alcove of the affine Weyl group of type A_{N-1} (with scale $2\pi r$)

3. ダイソン模型の楕円関数拡張と可積分性⁴³

$\mathbb{R} \rightarrow S^1(r) \equiv$ 半径 r の円周

$\mathbb{W}_N^A = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N\}$ Weyl chamber of type A_{N-1}

$$\mathcal{A}_{2\pi r}^{A_{N-1}} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_1 + 2\pi r\}$$

a scaled alcove of the affine Weyl group of type A_{N-1} (with scale $2\pi r$)

Dyson model

$$dX_j^A(t) = dB_j(t) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N, \\ k \neq j}} \frac{1}{X_j(t) - X_k(t)} dt,$$

$1 \leq j \leq N, t \in [0, \infty)$, B_j : independent BMs on \mathbb{R} .

elliptic Dyson model

$$dX_j^A(t) = dB_j^r(t) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N, \\ k \neq j}} A_N^{2\pi r}(t_* - t, X_j^A(t) - X_k^A(t)) dt + A_N^{2\pi r}(t_* - t, \bar{X}_\delta^A(t)) dt,$$

$1 \leq j \leq N, t \in [0, t_*)$, B_j^r : independent BMs on $S^1(r)$.

elliptic Dyson model

$$dX_j^A(t) = dB_j^r(t) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N, \\ k \neq j}} A_N^{2\pi r}(t_* - t, X_j^A(t) - X_k^A(t))dt + A_N^{2\pi r}(t_* - t, \overline{X}_\delta^A(t))dt,$$

$1 \leq j \leq N, t \in [0, t_*), B_j^r$: independent BMs on $S^1(r)$.

$$\begin{aligned} A_N^\alpha(t_* - t, x) &= \left[\frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dv} \log \vartheta_1(v; \tau) \right]_{v=x/\alpha, \tau=2\pi i N(t_* - t)/\alpha^2} \\ &= \frac{1}{2\pi r} \frac{\vartheta_1'(x/\alpha; 2\pi i N(t_* - t)/\alpha^2)}{\vartheta_1(x/\alpha; 2\pi i N(t_* - t)/\alpha^2)} \\ &= \left[\zeta(x | 2\omega_1, 2\omega_3) - \frac{\eta_1 x}{\omega_1} \right]_{\omega_1=\alpha/2, \omega_3=\pi i N(t_* - t)/\alpha} \\ &= \zeta \left(x \left| \alpha, \frac{2\pi i N(t_* - t)}{\alpha} \right. \right) - \frac{2\eta_1(t_* - t)x}{\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_1(t_* - t) &= \frac{\pi^2}{\omega_1} \left(\frac{1}{12} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1 - q^{2n}} \right) \Big|_{\omega_1=\alpha/2, q=e^{-2\pi^2 N(t_* - t)/\alpha^2}} \\ &= \frac{2\pi^2}{\alpha} \left(\frac{1}{12} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-4\pi^2 n N(t_* - t)/\alpha^2}}{1 - e^{-4\pi^2 n N(t_* - t)/\alpha^2}} \right). \end{aligned}$$

elliptic Dyson model

$$dX_j^A(t) = dB_j^r(t) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N, \\ k \neq j}} A_N^{2\pi r}(t_* - t, X_j^A(t) - X_k^A(t))dt + A_N^{2\pi r}(t_* - t, \overline{X}_\delta^A(t))dt,$$

$1 \leq j \leq N, t \in [0, t_*), B_j^r$: independent BMs on $S^1(r)$.

$$i = \sqrt{-1}, v, \tau \in \mathbb{C}, \quad z = z(v) = e^{\pi i v}, \quad q = q(\tau) = e^{\pi i \tau}.$$

The Jacobi theta function

$$\begin{aligned} \vartheta_1(v; \tau) &= i \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{(n-(1/2))^2} z^{2n-1} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{\pi i \tau (n-(1/2))^2} \sin\{(2n-1)\pi v\}. \end{aligned}$$

The Weierstrass zeta function $\zeta(\omega_1, \omega_3$:基本周期)

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \zeta(z|2\omega_1, 2\omega_3) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left[\frac{1}{z - \Omega_{m,n}} + \frac{1}{\Omega_{m,n}} + \frac{z}{\Omega_{m,n}^2} \right], \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}, \quad \Im \tau > 0, \quad \Omega_{m,n} = 2m\omega_1 + 2n\omega_3, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

elliptic Dyson model

$$dX_j^A(t) = dB_j^r(t) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N, \\ k \neq j}} A_N^{2\pi r}(t_* - t, X_j^A(t) - X_k^A(t))dt + A_N^{2\pi r}(t_* - t, \bar{X}_\delta^A(t))dt,$$

$1 \leq j \leq N, t \in [0, t_*)$, B_j^r : independent BMs on $S^1(r)$.

$$\mathbf{X}^A(0) = \mathbf{u} \in \mathcal{A}_{2\pi r}^{A_{N-1}}.$$

$$\bar{u}_\delta \equiv \delta + \sum_{j=1}^N u_j \in (0, 2\pi r), \quad \delta \in \pi r \mathbb{Z}$$

$$\bar{X}_\delta^A(t) = \delta + \sum_{j=1}^N X_j^A(t), \quad t \in [0, t_*).$$

$$\Xi^A(t, \cdot) = \sum_{j=1}^N \delta_{X_j^A(t)}(\cdot), \quad t \in [0, t_*)$$

初期配置 $\Xi(0, \cdot) = \xi(\cdot) = \sum_{j=1}^N \delta_{u_j}(\cdot), \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N) \in \mathcal{A}_{2\pi r}^{A_{N-1}}$

$T \in [0, t_*)$. $F: \mathcal{F}(T)$ -measurable observable (symmetric function).

$$\mathbb{E}_\xi[F(\Xi^A(\cdot))] = \mathbb{E}_{\mathbf{u}} \left[F \left(\sum_{j=1}^N \delta_{W_j^r(\cdot)} \right) \frac{h_N^A(t_* - T, \mathbf{W}^r(T))}{h_N^A(t_*, \mathbf{v})} \right].$$

$$\begin{aligned} h_N^A(t_* - t, \mathbf{x}) &= e^{-N(N-1)(N-2)t_*/48r^2} \eta(e^{-N(t_*-t)/r^2})^{-(N-1)(N-2)/2} \\ &\quad \times \vartheta_1 \left(\frac{\bar{x}_\delta}{2\pi r}, \frac{iN(t_* - t)}{2\pi r^2} \right) \prod_{1 \leq j < k \leq N} \vartheta_1 \left(\frac{x_k - x_j}{2\pi r}, \frac{iN(t_* - t)}{2\pi r^2} \right) \end{aligned}$$

Dedekind's η -function

$$\eta(x) = x^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n).$$

$$\Xi^A(t, \cdot) = \sum_{j=1}^N \delta_{X_j^A(t)}(\cdot), \quad t \in [0, t_*)$$

初期配置 $\Xi(0, \cdot) = \xi(\cdot) = \sum_{j=1}^N \delta_{u_j}(\cdot), \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N) \in \mathcal{A}_{2\pi r}^{A_{N-1}}$

$T \in [0, t_*)$. $F: \mathcal{F}(T)$ -measurable observable (symmetric function).

$$\mathbb{E}_\xi[F(\Xi^A(\cdot))] = \mathbb{E}_{\mathbf{u}} \left[F \left(\sum_{j=1}^N \delta_{W_j^r(\cdot)} \right) \frac{h_N^A(t_* - T, \mathbf{W}^r(T))}{h_N^A(t_*, \mathbf{v})} \right].$$

差積 \Rightarrow Jacobi theta の積

$$\begin{aligned} h_N^A(t_* - t, \mathbf{x}) &= e^{-N(N-1)(N-2)t_*/48r^2} \eta(e^{-N(t_*-t)/r^2})^{-(N-1)(N-2)/2} \\ &\quad \times \vartheta_1 \left(\frac{\bar{x}_\delta}{2\pi r}, \frac{iN(t_* - t)}{2\pi r^2} \right) \prod_{1 \leq j < k \leq N} \vartheta_1 \left(\frac{x_k - x_j}{2\pi r}, \frac{iN(t_* - t)}{2\pi r^2} \right) \end{aligned}$$

Dedekind's η -function

$$\eta(x) = x^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n).$$

$$\Xi^A(t, \cdot) = \sum_{j=1}^N \delta_{X_j^A(t)}(\cdot), \quad t \in [0, t_*)$$

初期配置 $\Xi(0, \cdot) = \xi(\cdot) = \sum_{j=1}^N \delta_{u_j}(\cdot)$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N) \in \mathcal{A}_{2\pi r}^{A_{N-1}}$

$T \in [0, t_*)$. F : $\mathcal{F}(T)$ -measurable observable (symmetric function).

$$\mathbb{E}_\xi[F(\Xi^A(\cdot))] = \mathbb{E}_{\mathbf{u}} \left[F \left(\sum_{j=1}^N \delta_{W_j^r(\cdot)} \right) \frac{h_N^A(t_* - T, \mathbf{W}^r(T))}{h_N^A(t_*, \mathbf{v})} \right].$$

elliptic Dyson model
(強く相互作用する粒子系)

$\mathbf{W}^r(t) = (W_1^r(t), \dots, W_N^r(t))$
($S^1(r)$ 上の N 個の自由な BM)

$$\begin{aligned} h_N^A(t_* - t, \mathbf{x}) &= e^{-N(N-1)(N-2)t_*/48r^2} \eta(e^{-N(t_*-t)/r^2})^{-(N-1)(N-2)/2} \\ &\times \vartheta_1 \left(\frac{\bar{x}_\delta}{2\pi r}; \frac{iN(t_* - t)}{2\pi r^2} \right) \prod_{1 \leq j < k \leq N} \vartheta_1 \left(\frac{x_k - x_j}{2\pi r}; \frac{iN(t_* - t)}{2\pi r^2} \right) \end{aligned}$$

Dedekind's η -function

$$\eta(x) = x^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n).$$

$$\frac{h_N^A(t_* - t, \mathbf{W}^r(t))}{h_N^A(t_*, \mathbf{u})} = \det_{1 \leq j, k \leq N} [\mathcal{M}_{\xi, u_k}^A(t, W_j^r(t))], \quad t \in [0, t_*).$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\xi, u_k}^A(t, x) &= \int_{\mathbb{R}} d\tilde{w} \frac{e^{-\tilde{w}^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} \Phi_{\xi, u_k}^A(x + i\tilde{w}) \\ &= \tilde{\mathbb{E}}[\Phi_{\xi, u_k}^A(x + i\tilde{W}(t))]. \end{aligned}$$

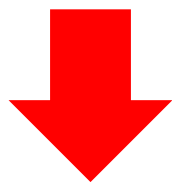
$$\begin{aligned} \Phi_{\xi, u_k}^A(z) &= \frac{\vartheta_1((\bar{u}_\delta + z - u_k)/2\pi r; iNt_*/2\pi r^2)}{\vartheta_1(\bar{u}_\delta/2\pi r; iNt_*/2\pi r^2)} \\ &\quad \times \prod_{\substack{1 \leq \ell \leq N, \\ \ell \neq k}} \frac{\vartheta_1((z - u_\ell)/2\pi r; iNt_*/2\pi r^2)}{\vartheta_1((u_k - u_\ell)/2\pi r; iNt_*/2\pi r^2)}, \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

H. Rosengren, M. Schlosser: Elliptic determinant evaluations and the Macdonald identities for affine root systems. *Compositio Math.* **142**, 937-961 (2006)

$$\Phi_{\xi, u_k}^A(z) = \frac{\vartheta_1((\bar{u}_\delta + z - u_k)/2\pi r; iNt_*/2\pi r^2)}{\vartheta_1(\bar{u}_\delta/2\pi r; iNt_*/2\pi r^2)} \times \prod_{\substack{1 \leq \ell \leq N, \\ \ell \neq k}} \frac{\vartheta_1((z - u_\ell)/2\pi r; iNt_*/2\pi r^2)}{\vartheta_1((u_k - u_\ell)/2\pi r; iNt_*/2\pi r^2)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$Z^r(t) = W^r(t) + i\widetilde{W}(t) : S^1(r) \times \mathbb{R}$ 上の複素ブラウン運動

複素ブラウン運動は共形不変



$\Phi_{\xi, u_k}^A(Z^r(t)), t \geq 0$: 共形マルチンゲール

$\Phi_{\xi, u_k}^A(Z^r(t)), t \geq 0$: 共形マルチンゲール

$0 \leq s \leq t < \infty$ である任意の停止時刻 s, t に対して,

$$\mathbf{E}[\Phi_{\xi, u_k}^A(Z(t)) | \mathcal{F}(s)] = \Phi_{\xi, u_k}^A(Z(s)) \quad \text{a.s.} \quad 1 \leq j \leq N.$$



可積分性

すべての時空相関関数が定まる

$M \in \mathbb{N}$.

$\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_M); 0 < t_1 < \dots < t_M < t_*$.

$\mathbf{f} = (f_{t_1}, \dots, f_{t_M}) \in C_0(\Lambda)^M$.

モーメント母関数（多時刻分布関数のラプラス変換）

$$\Psi_{\xi, \mathbf{t}}^A[\mathbf{f}] = \mathbb{E}_{\xi} \left[\exp \left\{ \sum_{m=1}^M \int_{S^1(r)} f_{t_m}(x) \Xi(t_m, dx) \right\} \right].$$

「テスト関数」 $\chi_{t_m}(\cdot) = e^{f_{t_m}(\cdot)} - 1, 1 \leq m \leq M$ に関する展開係数として「時空相関関数」が定まる

$$\Psi_{\xi, \mathbf{t}}^A[\mathbf{f}] = \sum_{\substack{0 \leq N_m \leq N, \\ 1 \leq m \leq M}} \int_{\prod_{m=1}^M \mathcal{A}_{2\pi r}^{A_{n-1}}} \prod_{m=1}^M \left\{ d\mathbf{x}_{N_m}^{(m)} \prod_{j=1}^{N_m} \chi_{t_m}(x_j^{(m)}) \right\} \rho_{\xi}(t_1, \mathbf{x}_{N_1}^{(1)}; \dots; t_M, \mathbf{x}_{N_M}^{(M)}).$$

$M \in \mathbb{N}$.

$\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_M); 0 < t_1 < \dots < t_M < t_*$.

$\mathbf{f} = (f_{t_1}, \dots, f_{t_M}) \in C_0(\Lambda)^M$.

モーメント母関数 (多時刻分布関数のラプラス変換)

$$\Psi_{\xi, \mathbf{t}}^A[\mathbf{f}] = \mathbb{E}_{\xi} \left[\exp \left\{ \sum_{m=1}^M \int_{S^1(r)} f_{t_m}(x) \Xi(t_m, dx) \right\} \right].$$

「テスト関数」 $\chi_{t_m}(\cdot) = e^{f_{t_m}(\cdot)} - 1, 1 \leq m \leq M$ に関する展開係数として「時空相関関数」が定まる

$$\Psi_{\xi, \mathbf{t}}^A[\mathbf{f}] = \sum_{\substack{0 \leq N_m \leq N, \\ 1 \leq m \leq M}} \int_{\prod_{m=1}^M \mathcal{A}_{2\pi r}^{A_{n-1}}} \prod_{m=1}^M \left\{ d\mathbf{x}_{N_m}^{(m)} \prod_{j=1}^{N_m} \chi_{t_m}(x_j^{(m)}) \right\} \rho_{\xi}(t_1, \mathbf{x}_{N_1}^{(1)}; \dots; t_M, \mathbf{x}_{N_M}^{(M)}).$$

時空相関関数

以下の式で積分核を定める：(p^r は $S^1(r)$ 上の BM の推移確率密度)

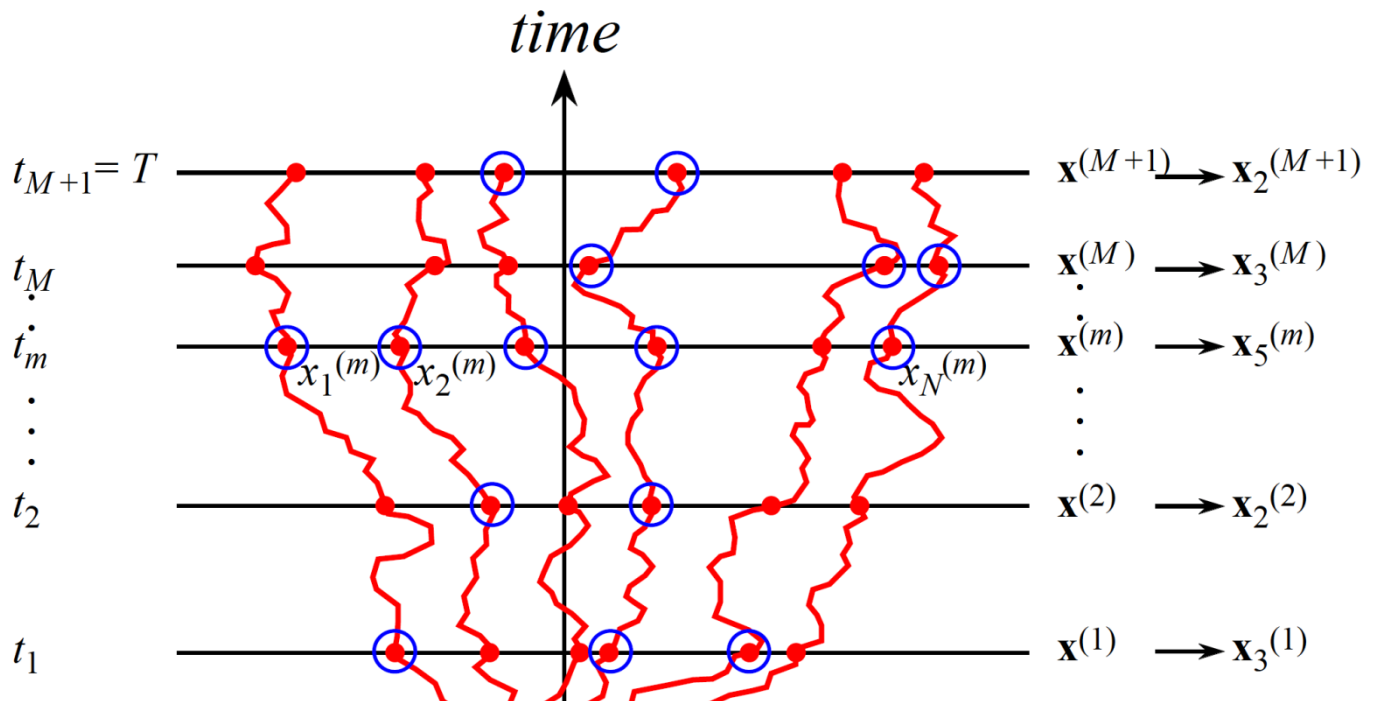
$$\mathbb{K}_\xi(s, x; t, y) = \int_{S^1(r)} \xi(du) p^r(s, x|u) \mathcal{M}_{\xi, u}^A(t, y) - \mathbf{1}(s > t) p^r(s - t, x|y).$$

すると、モーメント母関数はこれのフレドホルム行列式で与えられる：

$$\begin{aligned} \Psi_{\xi, \mathbf{t}}^A[\mathbf{f}] &= \text{Det}_{\substack{(s,t) \in \{t_1, \dots, t_M\}^2, \\ (x,y) \in (S^1(r))^2}} \left[\delta_{st} \delta_x(y) + \mathbb{K}_\xi(s, x; t, y) \chi_t(y) \right] \\ &\equiv \sum_{\substack{0 \leq N_m \leq N, \\ 1 \leq m \leq M}} \sum_{\substack{\mathbf{x}_{N_m}^{(m)} \in \mathcal{A}_{2\pi r}^{A_n-1}, \\ 1 \leq m \leq M}} \prod_{j=1}^{N_m} \chi_{t_m} \left(x_j^{(m)} \right) \det_{\substack{1 \leq j \leq N_m, 1 \leq k \leq N_n, \\ 1 \leq m, n \leq M}} \left[\mathbb{K}_\xi(t_m, x_j^{(m)}; t_n, x_k^{(n)}) \right]. \end{aligned}$$

よって、すべての時空相関関数は単一の積分核 \mathbb{K}_ξ で定まる行列式で与えられる:

$$\rho_\xi(t_1, \mathbf{x}_{N_1}^{(1)}; \dots; t_M, \mathbf{x}_{N_M}^{(M)}) = \det_{\substack{1 \leq j \leq N_m, 1 \leq k \leq N_n, \\ 1 \leq m, n \leq M}} \left[\mathbb{K}_\xi(t_m, \mathbf{x}_j^{(m)}; t_n, \mathbf{x}_k^{(n)}) \right].$$



初期配置 ξ

相関核 → 相関関数

$$\mathbb{K}_\xi(s, x; t, y) = \int_{S^1(r)} \xi(du) p^r(s, x|u) \mathcal{M}_{\xi, u}^A(t, y) - \mathbf{1}(s > t) p^r(s - t, x|y).$$

マルチンゲール → 揺らぎ

elliptic Dyson model

$$dX_j^A(t) = dB_j^r(t) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N, \\ k \neq j}} A_N^{2\pi r}(t_* - t, X_j^A(t) - X_k^A(t)) dt + A_N^{2\pi r}(t_* - t, \overline{X}_\delta^A(t)) dt,$$

$1 \leq j \leq N, t \in [0, t_*)$, B_j^r : independent BMs on $S^1(r)$.

時間非齊次 \implies 時間齊次: $t_* \rightarrow \infty$

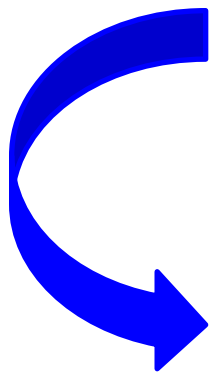
$$\lim_{t_* \rightarrow \infty} A_N^{2\pi r}(t_* - t, x) = \frac{1}{2r} \cot\left(\frac{x}{2r}\right)$$

$$dX_j^A(t) = dB_j^r(t) + \frac{1}{2r} \sum_{\substack{1 \leq k \leq N, \\ k \neq j}} \cot\left(\frac{X_j^A(t) - X_k^A(t)}{2r}\right) dt + \frac{1}{2r} \cot\left(\frac{\overline{X}_\delta^A(t)}{2r}\right) dt, \quad t \geq 0.$$

elliptic Dyson model

$$dX_j^A(t) = dB_j^r(t) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N, \\ k \neq j}} A_N^{2\pi r}(t_* - t, X_j^A(t) - X_k^A(t))dt + A_N^{2\pi r}(t_* - t, \overline{X}_\delta^A(t))dt,$$

$1 \leq j \leq N, t \in [0, t_*), B_j^r$: independent BMs on $S^1(r)$.



さらに, 円周上 $\implies \mathbb{R}$ 上: $r \rightarrow \infty$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{t_* \rightarrow \infty} A_N^{2\pi r}(t_* - t, x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2r} \cot\left(\frac{x}{2r}\right) = \frac{1}{x}$$

$$dX_j(t) = dB_j(t) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N, \\ k \neq j}} \frac{1}{X_j^A(t) - X_k^A(t)} dt, \quad 1 \leq j \leq N, \quad t \geq 0.$$

行列式過程 (determinantal process)

時空上での自由フェルミオン場

M. Katori, H. Tanemura: Complex Brownian motion representation of the Dyson model. *Electron. Commun. Probab.* **18**, no.4, 1-16 (2013)

M. Katori: Determinantal martingales and noncolliding diffusion processes. [arXiv:math.PR/1305.4412](https://arxiv.org/abs/math/1305.4412)

M. Katori: Elliptic determinantal processes. [arXiv:math.PR/1311.4146](https://arxiv.org/abs/math/1311.4146)