グラスマン束の次数公式 (新証明)

楫　元
横浜

寺杣友秀氏 (東大数理) との共同研究

藤井一幸先生 定年退職記念研究集会

第25回沼津改め静岡研究会

静岡大学

2018年3月7日

1　序

$\boldsymbol{X}$ を任意標数の体 $\boldsymbol{k}$ 上の $\boldsymbol{n}$ 次元射影多様体とし, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ を $\boldsymbol{X}$ 上の階数 $\boldsymbol{r}$ のベクトル束とする. $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ の余階数 $\boldsymbol{d}$ の部分束全体のなす $\boldsymbol{X}$ 上のファイバー束を**グラスマン束**とよび, $\mathbb{G}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}})$ と記す. グラスマン束が射影的な場合にその**次数**を如何にして求めるかが本研究の主題である.

詳しく述べると, $\boldsymbol{\mathcal{Q}} \leftarrow \boldsymbol{\pi}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}$ を $\mathbb{G}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}})$ の階数 $\boldsymbol{d}$ の普遍商束とすれば, その $\boldsymbol{d}$次外積から得られる商直線束, $\det \boldsymbol{\mathcal{Q}} \leftarrow \wedge^{d}\boldsymbol{\pi}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}$ により, $\boldsymbol{X}$ 上の相対プリュッカー埋め込み射 $\mathbb{G}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \hookrightarrow \mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}(\wedge^{d}\boldsymbol{\mathcal{E}})$ が定義される. $\mathbb{P} := \mathbb{P}(\boldsymbol{H}^0(\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}(\wedge^{d}\boldsymbol{\mathcal{E}}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}(\wedge^{d}\boldsymbol{\mathcal{E}})}(\mathbf{1})))$ とおくとき, $\wedge^{d}\boldsymbol{\mathcal{E}}$ が非常に豊富(すなわち, 有理写像 $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}(\wedge^{d}\boldsymbol{\mathcal{E}})}(\mathbf{1})| : \mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}(\wedge^{d}\boldsymbol{\mathcal{E}}) \dashrightarrow \mathbb{P}$ が埋め込み射となる) ならば, $\mathbb{G}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}})$ は $\mathbb{P}$ 内の射影多様体とみなせる:

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{G}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) & \overset{\substack{\text{相対プリュッカー}\\\text{埋め込み}}}{\hookrightarrow} & \mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}(\wedge^{d}\boldsymbol{\mathcal{E}}) & \overset{\left|\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}(\wedge^{d}\boldsymbol{\mathcal{E}})}(\mathbf{1})\right|}{\hookrightarrow} & \mathbb{P}. \\
& \boldsymbol{\pi} \searrow & \downarrow & & \\
& & \boldsymbol{X} & &
\end{array}
$$

このとき,

問題　グラスマン束 $\mathbb{G}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}})$ の $\mathbb{P}$ における次数を求めよ.

2014 年 3 月 6 日第 21 回沼津研究会で発表させていただいた結果は

定理 (次数公式)　**X が非特異かつ $\wedge^d \mathcal{E}$ が非常に豊富とすれば,**

$$\deg \mathbb{G}_X(d,\mathcal{E}) = \sum_{|\lambda|=n} \frac{(d(r-d)+n)!\prod_{1\le i<j\le d}(\lambda_i-\lambda_j-i+j)}{\prod_{1\le i\le d}(r+\lambda_i-i)!}\int_X \Delta_\lambda(s(\mathcal{E})).$$

ただし, $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_d)$ は分割 (すなわち, 非増加非負整数列, $\lambda_1\ge\cdots\ge\lambda_d\ge 0$), $|\lambda|:=\sum_{1\le i\le d}\lambda_i$, $\Delta_\lambda(s(\mathcal{E})):=\det[s_{\lambda_i+j-i}(\mathcal{E})]_{1\le i,j\le d}$ は λ に対応する $\mathcal{E}$ のセグレ類のシューア関数, $\varepsilon:=((r-d)^d)$ は $\varepsilon_i=r-d$ $(1\le i\le d)$ である分割.

ある種のローラン級数の定数項として $\mathbb{G}_X(d,\mathcal{E})$ の次数を記述し計算していた.

この公式は, 2013 年 12 月開催の京都大学数理解析研究所 (RIMS) 研究集会を皮切りに, 沼津研究会を含めたいくつかの研究集会において講演発表の機会を頂いた.

この右辺の**有理式の係数**の意味について RIMS 研究集会での講演発表の際, 向井茂先生から御質問を頂いた. しかし, そのときはただ計算したら出てきたというだけで, それ以上のことは判っておらず, 何も答えられなかった.

その後, 学術雑誌に投稿すると, 査読者から単純明快で非常に短い証明をご教示いただいた. また, 問題の係数は, 分割 $\lambda+\varepsilon$ に対応する標準ヤング盤の数 $f^{\lambda+\varepsilon}$ と一致することを知った:

$$f^{\lambda+\varepsilon} = \frac{(d(r-d)+n)!\prod_{1\le i<j\le d}(\lambda_i-\lambda_j-i+j)}{\prod_{1\le i\le d}(r+\lambda_i-i)!}.$$

したがって以下のとおり書き直せる:

定理 (次数公式) **X が非特異かつ $\wedge^d \mathcal{E}$ が非常に豊富とすれば,**

$$\deg \mathbb{G}_X(d, \mathcal{E}) = \sum_{|\lambda|=n} f^{\lambda+\varepsilon} \int_X \Delta_\lambda(s(\mathcal{E})).$$

ただし, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ は分割 (すなわち, 非増加非負整数列, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq 0$), $|\lambda| := \sum_{1\leq i\leq d} \lambda_i$, $\Delta_\lambda(s(\mathcal{E})) := \det[s_{\lambda_i+j-i}(\mathcal{E})]_{1\leq i,j\leq d}$ は λ に対応する $\mathcal{E}$ のセグレ類のシューア関数, $\varepsilon := ((r-d)^d)$ は $\varepsilon_i = r-d$ $(1 \leq i \leq d)$ である分割. そして, $f^{\lambda+\varepsilon}$ は型 $\lambda+\varepsilon$ をもつ標準ヤング盤の数である.

本講演の目的は, その明快かつ簡潔な証明を解説することである. そして, 次数公式に標準ヤング盤の数が現れてくる過程を説明したい.

定理の新証明は, 以下に説明するとおり,

- 対称関数に関する幾つかの基本定理—Jacobi-Trudi の恒等式, および, Pieri の公式,
- Józefiak-Lascoux-Pragacz の押し出し公式,

から得られる.

“*Don’t teach fishes how to swim*”—**チャーン類とセグレ類**—

$\boldsymbol{X}$: 射影多様体, 次元 $\boldsymbol{n}$　　$\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{X}$ 上のベクトル束, 階数 $\boldsymbol{r}$

$\boldsymbol{\mathcal{E} := \mathcal{O}_X(E)}$ 切断たちのなす層. これは階数 $\boldsymbol{r}$ の局所自由層 (対応 $\boldsymbol{E \leftrightarrow \mathcal{E}}$ により同一視)

$\boldsymbol{E = \mathcal{E}}$ に付随する**射影空間束**とは

$$\boldsymbol{\mathbb{P}_X(\mathcal{E}) := \mathbf{Proj}(\mathbf{Symm}\,\mathcal{E}) = (E^\vee \setminus \text{zero-section})/\mathbb{G}_m \xrightarrow{\pi} X}$$

射影空間束上の標準的全射

$$\boldsymbol{\pi^*\mathcal{E} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \to 0 \quad (\leftrightarrow \quad 0 \to L_E \to \pi^* E^\vee)}$$

における $\boldsymbol{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)}$ (または $\boldsymbol{L_E}$) を**トートロジカル直線束**とよぶ.

$\boldsymbol{A(X) := \oplus_{i\geq 0} A^i(X)}$: $\boldsymbol{X}$ のチャウ環
ただし, $\boldsymbol{A^i(X) := \{\sum m_i V_i :}$ 余次元 $\boldsymbol{i}$-サイクル$\boldsymbol{\}}$ /(有理同値) ($\boldsymbol{= H^{2i}_{\mathrm{an}}(X, \mathbb{Z})}$)

チャウ環における引き戻し $\boldsymbol{\pi^* : A(X) \to A(\mathbb{P}(\mathcal{E}))}$ により $\boldsymbol{A(\mathbb{P}(\mathcal{E}))}$ は, $\boldsymbol{1, \xi, \ldots, \xi^{r-1}}$ を基底とする階数 $\boldsymbol{r}$ の自由 $\boldsymbol{A(X)}$ 加群となる. ただし, $\boldsymbol{\xi := c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)) \in A^1(X)}$. このとき $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ の**チャーン類** $\boldsymbol{c_i(\mathcal{E}) \in A^i(X)}$ を以下により定義する [Grothendieck]:

$$\boldsymbol{\sum_{0\leq i\leq r} (-1)^i \pi^* c_i(\mathcal{E}) \xi^{r-i} = 0 \quad \text{in} \ \oplus_{0\leq i<r} A(X)\xi^i = A(\mathbb{P}(\mathcal{E})).}$$

チャーン多項式, $\boldsymbol{c_t(\mathcal{E}) = \sum_{0\leq i\leq n} c_i(\mathcal{E}) t^i \in \oplus A^i(X) t^i}$ を用いて $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ の**セグレ級数** $\boldsymbol{s_t(\mathcal{E})}$, および, **セグレ類** $\boldsymbol{s_i(\mathcal{E}) \in A^i(X)}$ を以下により定義する ($\boldsymbol{\{c_i(\mathcal{E})\}}$ から $\boldsymbol{\{s_j(\mathcal{E})\}}$ が帰納的に決まる):

$$\boldsymbol{s_t(\mathcal{E}) c_t(\mathcal{E}^\vee) = 1, \quad s_t(\mathcal{E}) = \sum s_i(\mathcal{E}) t^i \quad \text{in} \ \oplus_{i\geq 0} A^i(X) t^i.}$$

このとき, たとえば以下が成り立つ (これをセグレ類の定義に採用する流儀もある [Fulton]):

$$\boldsymbol{\alpha \wedge s_i(\mathcal{E}) = \pi_*(\pi^*\alpha \wedge c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1))^{i+r-1}) \quad \text{in} \ A^{i+k}(X) \quad (\alpha \in A^k(X), i \geq 0).}$$

2 対称関数

$\underline{x} = \{x_1, \ldots, x_d\}$ を変数とする．その**基本対称関数** $\{e_i(\underline{x})\}_i$ は

$$\prod_{1 \leq j \leq d} (1 + x_j t) = \sum_{i \geq 0} e_i(\underline{x}) t^i = E(\underline{x}; t) \in \mathbb{Z}[\underline{x}][t]$$

により定められ，また，**完全対称関数** $\{h_i(\underline{x})\}_i$ は

$$\prod_{1 \leq j \leq d} \frac{1}{1 - x_j t} = \sum_{i \geq 0} h_i(\underline{x}) t^i = H(\underline{x}; t) \in \mathbb{Z}[\underline{x}][[t]]$$

により定められる．明らかに以下が成り立つ:

$$H(\underline{x}; t) E(\underline{x}; -t) = 1.$$

例 $d = 3$ のとき，$e_1 = h_1 = x_1 + x_2 + x_3$，$e_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$，$h_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$，…

観察 ベクトル束 Ω のチャーン根を $\underline{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ とすれば，その第 i 基本対称関数は Ω の第 i チャーン類そのものである: $e_i(\underline{\alpha}) = c_i(\Omega) \in A^i(X)$.

$E(\underline{\alpha}; t)$ は Ω のチャーン多項式 $c_t(\Omega) = \sum c_i(\Omega) t^i$ そのものである: $E(\underline{\alpha}; t) = c_t(\Omega) \in \bigoplus A^i(X) t^i$.

セグレ級数 $s_t(\Omega) = \sum s_i(\Omega) t^i \in \bigoplus A^i(X) t^i$ は定義により $s_t(\Omega) c_t(\Omega^\vee) = 1$，つまり，$s_t(\Omega) c_{-t}(\Omega) = 1$ をみたす．したがって，$H(\underline{\alpha}; t) E(\underline{\alpha}; -t) = 1$ より，$H(\underline{\alpha}; t)$ は Ω のセグレ級数 $s_t(\Omega)$ と一致する: $H(\underline{\alpha}; t) = s_t(\Omega)$.

よって，チャーン根 $\underline{\alpha}$ の第 i 完全対称関数は第 i セグレ類と一致する: $h_i(\underline{x}) = s_i(\Omega)$.

シューア関数 $\{\boldsymbol{\Delta}_\lambda(\underline{\boldsymbol{x}})\}_\lambda$ は

$$\boldsymbol{\Delta}_\lambda(\underline{\boldsymbol{x}}) := \frac{\det\left[\boldsymbol{x}_j^{\lambda_i+d-i}\right]_{1\le i,j\le d}}{\det\left[\boldsymbol{x}_j^{d-i}\right]_{1\le i,j\le d}} \in \mathbb{Z}[\underline{\boldsymbol{x}}]$$

により定められる．ただし，$\boldsymbol{\lambda}$ は分割，すなわち，非増加非負整数列 $\boldsymbol{\lambda}_1 \ge \cdots \ge \boldsymbol{\lambda}_d \ge \mathbf{0}$ である．分子は斉次交代式なので，分母のファンデルモンド行列式，すなわち，差積により割り切れる．商は斉次対称式多項式となり，次数は $|\boldsymbol{\lambda}| := \sum \boldsymbol{\lambda}_i$ で与えられる．

補題 1　ベクトル束 $\boldsymbol{\Omega}$ のチャーン根を $\underline{\boldsymbol{\alpha}} = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_d\}$ とし，$\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_d)$ を分割とすれば，

$$\boldsymbol{\Delta}_\mu(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) = \boldsymbol{\Delta}_\mu(\boldsymbol{s}(\boldsymbol{\Omega})).$$

ただし，$\boldsymbol{\Delta}_\mu(\boldsymbol{s}(\boldsymbol{\Omega})) := \det[\boldsymbol{s}_{\mu_i+j-i}(\boldsymbol{\Omega})]_{1\le i,j\le d}$.

証明　Jacobi-Trudi **恒等式**，$\boldsymbol{\Delta}_\mu(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) = \det\left[\boldsymbol{h}_{\mu_i+j-i}(\underline{\boldsymbol{\alpha}})\right]_{1\le i,j\le d}$ に，先に示した $\boldsymbol{h}_i(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) = \boldsymbol{s}_i(\boldsymbol{\Omega})$ を代入すると

$$\boldsymbol{\Delta}_\mu(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) = \det[\boldsymbol{s}_{\mu_i+j-i}(\boldsymbol{\Omega})]_{1\le i,j\le d}$$

となり結論を得る． □

定理 2 (Jacobi-Trudi **恒等式**)　**分割** $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_d)$ **に対して**

$$\boldsymbol{\Delta}_\lambda(\underline{\boldsymbol{x}}) = \det\left[\boldsymbol{h}_{\lambda_i+j-i}(\underline{\boldsymbol{x}})\right]_{1\le i,j\le d}, \quad \boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\lambda}}(\underline{\boldsymbol{x}}) = \det\left[\boldsymbol{e}_{\lambda_i+j-i}(\underline{\boldsymbol{x}})\right]_{1\le i,j\le d}.$$

とくに，$\boldsymbol{h}_i(\underline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{\Delta}_{(i)}(\underline{\boldsymbol{x}})$，$\boldsymbol{e}_i(\underline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{\Delta}_{(1^i)}(\underline{\boldsymbol{x}})$ **である．ただし，**$\widetilde{\lambda}$ **は** λ **の共役，すなわち，**$\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_i := \#\{j|\boldsymbol{\lambda}_j \ge i\}$ **とする．**

補題 3 $\boldsymbol{e_1(\underline{x})^N = \sum_{|\lambda|=N} f^\lambda \Delta_\lambda(\underline{x})}$.

証明 以下, **Pieri の公式**を繰り返し用いて, $\boldsymbol{e_1(\underline{x}) = \Delta_{(1)}(\underline{x})}$ のベキを計算してみる:

定理 4 (**Pieri の公式**) 分割 $\boldsymbol{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)}$ に対して

$$\boldsymbol{\Delta_\lambda(\underline{x})\Delta_{(1^i)}(\underline{x}) = \sum_{\mu\in\lambda\otimes(1^i)} \Delta_\mu(\underline{x}), \quad \Delta_\lambda(\underline{x})\Delta_{(i)}(\underline{x}) = \sum_{\mu\in\lambda\otimes(i)} \Delta_\mu(\underline{x}).}$$

ただし, $\boldsymbol{\lambda\otimes(1^i)}$ [または $\boldsymbol{\lambda\otimes(i)}$] は, $\boldsymbol{\lambda}$ に対応するヤング図形に $\boldsymbol{i}$ 個の箱を, 各行 [または 各列] に高々**1**個の箱を付け加えて得られるヤング図形に対応する分割全体のなす集合とする.

分割 $\boldsymbol{\lambda}$ に対して, $\boldsymbol{i}$ 行目に $\boldsymbol{\lambda_i}$ 個の箱 $\ydiagram{1}$ をもつヤング図形を対応させ同一視する. たとえば,

$$\boldsymbol{\lambda = (4,2,1)} = \ydiagram{4,2,1} \quad \overset{\text{共役}}{\longleftrightarrow} \quad \boldsymbol{\widetilde{\lambda} = (3,2,1,1)} = \ydiagram{3,2,1,1}$$

この記法を用いて集合 $\boldsymbol{\lambda\otimes(1)}$ をいくつか書き下してみると,

$$\ydiagram{1} \otimes \boldsymbol{(1)} = \ydiagram{1} \otimes \ydiagram{1} = \left\{ \ydiagram{2}, \ydiagram{1,1} \right\},$$

$$\ydiagram{2} \otimes \boldsymbol{(1)} = \ydiagram{2} \otimes \ydiagram{1} = \left\{ \ydiagram{3}, \ydiagram{2,1} \right\}, \quad \ydiagram{1,1} \otimes \boldsymbol{(1)} = \ydiagram{1,1} \otimes \ydiagram{1} = \left\{ \ydiagram{2,1}, \ydiagram{1,1,1} \right\}, \quad \cdots$$

注意 2行目では, $\ydiagram{1,2}$ という図形は現れない. 対応する $\boldsymbol{(1,2)}$ は分割ではないからである.

実際に計算してみると以下のとおり:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} &= \boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1}}\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1}} = \boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{2}} + \boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1,1}} \\
\boldsymbol{e}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{3}} = \boldsymbol{e}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1}} &= \left(\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{2}} + \boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1,1}}\right)\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1}} = \boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{2}}\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1}} + \boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1,1}}\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1}} \\
&= \left(\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{3}} + \boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{2,1}}\right) + \left(\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{2,1}} + \boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1,1,1}}\right) \\
&= \boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{3}} + \mathbf{2}\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{2,1}} + \boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1,1,1}} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

任意の $\boldsymbol{N} \in \mathbb{N}$ に対して $\boldsymbol{e}_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}}$ は $|\boldsymbol{\lambda}| = \boldsymbol{N}$ となる分割 $\boldsymbol{\lambda}$ に対応するシューア関数 $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の正整数係数一次結合で表される.

では, その係数は如何に計算されるか?

上式 4 行目の $\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{2,1}}$ の係数 $\mathbf{2}$ はどのように得られたか計算を振り返ると, これは当然一つ前の行に $\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{2,1}}$ が二つあるからだが, 個数を数え上げるにはそれらを区別する必要がある.

そのためにはヤング図形の各箱 $\ydiagram{1}$ に, それを付け加えた順番を書き入れるとよい. 実際,

付け加えた順番を $\ydiagram{1}$ に書き入れると以下のとおり:

$$\boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1}}\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1}} = \boldsymbol{\Delta}_{\ytableaushort{12}} + \boldsymbol{\Delta}_{\ytableaushort{1,2}}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1^3 = \boldsymbol{e}_1^2\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1}} &= \left(\boldsymbol{\Delta}_{\ytableaushort{12}} + \boldsymbol{\Delta}_{\ytableaushort{1,2}}\right)\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1}} = \boldsymbol{\Delta}_{\ytableaushort{12}}\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1}} + \boldsymbol{\Delta}_{\ytableaushort{1,2}}\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1}} \\
&= \left(\boldsymbol{\Delta}_{\ytableaushort{123}} + \boldsymbol{\Delta}_{\ytableaushort{12,3}}\right) + \left(\boldsymbol{\Delta}_{\ytableaushort{13,2}} + \boldsymbol{\Delta}_{\ytableaushort{1,2,3}}\right) \\
&= \boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{3}} + \boldsymbol{2}\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{2,1}} + \boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{1,1,1}} \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

$\ydiagram{2,1}$ を得るには, 箱$\ydiagram{1}$の付け加え方が$\boldsymbol{2}$通りなので, $\boldsymbol{\Delta}_{\ydiagram{2,1}}$の係数は $\boldsymbol{2}$ となっている.

一般に, 分割 $\boldsymbol{\lambda}$ に対応するヤング図形に, 各行で左から右へ, 各列で上から下へ, どちらも増加するように $\boldsymbol{\{1, 2, \ldots, |\lambda|\}}$ の元を書き入れたものを, 型 $\boldsymbol{\lambda}$ をもつ**標準ヤング盤**といい, その数を $\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{\lambda}}$ と記す.

たとえば, $\boldsymbol{e}_1^3$ の計算においては,

$$\boldsymbol{f}^{\ydiagram{3}} = \boldsymbol{f}^{\ydiagram{1,1,1}} = \boldsymbol{1}, \quad \boldsymbol{f}^{\ydiagram{2,1}} = \boldsymbol{2}$$

である.

一般に $\boldsymbol{e}_1^N$ における $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の係数は $\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{\lambda}}$ となることがわかる. $\square$

3 証明

相対プリュッカー埋め込みの定義より $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ の $\mathbb{G}_X(d,\mathcal{E})$ への引き戻しは $\det \mathcal{Q}$ となる:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)_{\mathbb{G}_X(d,\mathcal{E})} = \det \mathcal{Q}.$$

$\theta := c_1(\det \mathcal{Q}) = c_1(\mathcal{Q}) \in A^1(X)$ とおき，$N := \dim \mathbb{G}_X(d,\mathcal{E}) = n + d(r-d)$ とおくと，

$$\deg \mathbb{G}_X(d,\mathcal{E}) = \int_{\mathbb{G}_X(d,\mathcal{E})} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)_{\mathbb{G}_X(d,\mathcal{E})})^N = \int_{\mathbb{G}_X(d,\mathcal{E})} \theta^N = \int_X \pi_*(\theta^N)$$

となる．ここで，$\underline{\alpha} = \{\alpha_1,\dots,\alpha_d\}$ を $\mathcal{Q}$ のチャーン根とすれば，

$$\theta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d = e_1(\underline{\alpha})$$

となる．よって，**補題 2**，**補題 1** を用いると

$$\theta^N = e_1(\underline{\alpha})^N = \sum_{|\mu|=N} f^\mu \Delta_\mu(\underline{\alpha}) = \sum_{|\mu|=N} f^\mu \Delta_\mu(s(\mathcal{Q}))$$

となる．下記の Józefiak-Lascoux-Pragacz **の押し出し公式**を用いると，

$$\pi_*(\theta^N) = \sum_{|\mu|=N} f^\mu \pi_* \Delta_\mu(s(\mathcal{Q})) = \sum_{|\mu|=N} f^\mu \Delta_{\mu-\varepsilon}(s(\mathcal{E})) = \sum_{|\lambda|=n} f^{\lambda+\varepsilon} \Delta_\lambda(s(\mathcal{E})).$$

定理 5 (Józefiak-Lascoux-Pragacz **の押し出し公式**)

$$\pi_*(\Delta_\mu(\mathcal{Q})\Delta_\nu(\mathcal{S})) = \Delta_{\mu-\varepsilon,\nu}(s(\mathcal{E})).$$

ただし，$\mathcal{S}$ は $\mathbb{G}_X(d,\mathcal{E})$ の階数 $r-d$ の普遍部分束，$\mu = (\mu_1,\dots,\mu_d)$，$\nu = (\nu_{d+1},\dots,\nu_r)$ は分割，$(\mu-\varepsilon,\nu) := (\mu_1-(r-d),\dots,\mu_d-(r-d),\nu_{d+1},\dots,\nu_r)$ である．なお，$(\mu-\varepsilon,\nu)$ が分割とならないときは，$\Delta_{\mu-\varepsilon,\nu}(s(\mathcal{E})) := 0$ とする．

実際, 以下を示した:

定理 (**K-Terasoma**) 非特異準射影多様体 $\boldsymbol{X}$ と階数 $\boldsymbol{r}$ のベクトル束 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ に対して

$$\boldsymbol{\pi_*(\theta^N) = \sum_{|\lambda|=N-d(r-d)} f^{\lambda+\varepsilon}\pi_*\Delta_\lambda(s(\mathcal{E}))} \quad \boldsymbol{(N \geq d(r-d)).}$$

注意 $\boldsymbol{X}$ の射影性や $\wedge^d\boldsymbol{\mathcal{E}}$ が非常に豊富であるという仮定は用いていない. $\boldsymbol{X}$ の非特異性はチャウ環を定義するために仮定している.

ご静聴ありがとうございました.

References

[1] W. Fulton: Intersection theory. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), **2**. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[2] W. Fulton: Young tableaux. With applications to representation theory and geometry. London Mathematical Society Student Texts, **35**. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[3] W. Fulton, J. Harris: Representation Theory—A First Course—. Graduate Text in Math. **129**, Springer, 1991.

With applications to representation theory and geometry. London Mathematical Society Student Texts, **35**. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[4] T. Józefiak, A. Lascoux, P. Pragacz: Classes of determinantal varieties associated with symmetric and skew-symmetric matrices. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **45** (1981), no. 3, 662–673.

[5] H. Kaji: Higher Gauss Maps of Veronese Varieties—A Generalization of Boole]s Formula—, arXiv:1509.04935.

[6] H. Kaji, T. Terasoma: Degree formula for Grassmann bundle, Journal of Pure and Applied Algebra **219** (2015), 5426–5428. arXiv:1504.03400.

[7] H. Kaji, T. Terasoma: Degree formula for Grassmann bundles II, arXiv:1508.01663.

[8] I. G. Macdonald: Symmetric functions and Hall polynomials. Second edition. With contributions by A. Zelevinsky. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

Department of Mathematics
School of Science and Engineering
Waseda University

KAJI, Hajime
kaji@waseda.jp