複素多様体のアファイン埋込の超越指数

第10回アファイン代数幾何学研究集会
2012 年9 月6 日（木）　関西学院大学 大阪梅田キャンパス

第20回沼津研究会
2013 年3 月6 日（水）　沼津工業高等専門学校

泉　脩藏
〒577-8502 東大阪市小若江　近畿大学理工学部
量子コンピュータ研究センター

複素多様体のアファイン埋込の超越指数

1．多変数Wronskians

2．正則函数芽のヴェクトル空間と初項空間の双対性

3．初項空間の一般の点におけるD閉性

4．束点に付随したアルチン環

正則函数芽の有限次元ヴェクトル空間に次数アルチン環を対応させる。

5．埋め込まれた多様体のBos-Calviの高階接空間

6．埋め込まれた多様体上でのテイラー展開

$\mathbb{R}^m$の曲線上のほとんどの点でテイラー展開がうまく定義できる。

7．解析集合芽の超越性

8．一般の点における零評価

$\mathbb{R}^m$に埋め込まれた多様体の超越性はほとんどの点で高くはない。

1. 多変数Wronskians

DEF. $Y := (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in (\mathbb{N}_0^n)^m \quad (\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\})$ が次の条件を満たすときヤング・ライクと言う

$$(\nu \in \mathbb{N}_0^n,\ \exists\, \nu_i \in Y:\ \nu \leq \nu_i) \implies \nu \in Y.$$

ここで$\leq$は、$\mathbb{N}_0$ の普通の順序の直積順序である。

例：$Y := \left\{ \begin{array}{ccc} (2,0), & & (1,1), \\ & (1,0), & \\ & & (0,0) \end{array} \right\}$ はヤング・ライクではない。(0,1)を加えればヤング・ライクとなる：$(m = 4,\ n = 2)$

m 個の元から成るヤング・ライクな多重指数$\subset \mathbb{N}_0^n$ の集合全体を$\mathcal{Y}_m$ で表す。

1.1 LEM. $\nu \in Y \in \mathcal{Y}_m \implies \nu \subset \{0, 1, \ldots, m-1\}^n$

多変数Wronskiansの定理を述べる：

1.2 THM. [Walker 2005] $\Omega \subset \mathbb{C}^n$：連結開集合
$\{f_1, \ldots, f_m\}$：Ω上の有理型函数とするとき、

(1) 次の条件は同値：

- $f_1, \ldots, f_m$は1次独立
- $(\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \mathcal{Y}_m$が存在して

$$W(f_1, \ldots, f_m; \nu_1, \ldots, \nu_m) := \begin{vmatrix} f_1^{(\nu_1)} & f_1^{(\nu_2)} & \ldots & f_1^{(\nu_m)} \\ f_2^{(\nu_1)} & f_2^{(\nu_2)} & \ldots & f_2^{(\nu_m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_m^{(\nu_1)} & f_m^{(\nu_2)} & \ldots & f_m^{(\nu_m)} \end{vmatrix}$$

は恒等的に零ではない。

(2) $\mathcal{Y}_m$は一般の$\{f_1, \ldots, f_m\}$に対して、(1)が成り立つ最小の集合である。

すると正則函数の有限次元のヴェクトル空間は有限個の偏微分方程式の解空間として表される：

1.3 Cor. [to Walker's theorem]

開集合U上の正則函数から成る有限次ヴェクトル空間$Z \subset \mathcal{O}_{n,b}(\Omega)$ の基底 $\{f_1, \ldots, f_m\}$をとる。

するとZは次の偏微分方程式系の正則解の空間となっている。

$$W(f_1, \ldots, f_m, y; \nu_1, \ldots, \nu_{m+1}) = 0 \qquad ((\nu_1, \ldots, \nu_{m+1}) \in \mathcal{Y}_{m+1})$$

ここで$y = y(t) \in \mathcal{O}_n(\Omega)$が未知函数である。

2. 正則函数芽のヴェクトル空間と初項空間の双対性

正則解析的局所環の有限次元部分ヴェクトル空間の双対空間を構成する。

DEF. t: bを中心にしたアファイン座標

$f_b\!\downarrow = f\!\downarrow$: $f \in \mathbb{C}\{t\}$の初項

テイラー展開の零ではない最低次の斉次項

$f_b\!\downarrow$の変数はfの変数に対応するギリシャ文字で書く。$\tau_i := t_i\!\downarrow$など。

$Z \subset \mathcal{O}_{m,b}$を有限次元部分ヴェクトル空間とするとき

$$Z_b\!\downarrow := \mathrm{Span}\,\{f\!\downarrow : f \in Z\} \subset \mathbb{C}[\tau] : \quad b \text{ における初項空間}$$

$$\left(\text{内在的記法} \quad Z_b\!\downarrow := \mathrm{Gr}(Z) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} \frac{Z \cap \mathfrak{m}_b^i}{Z \cap \mathfrak{m}_b^{i+1}} \subset \mathbb{C}[\tau] \right)$$

$\downarrow$: $Z \longrightarrow Z_b\!\downarrow, \quad f \longmapsto f_b\!\downarrow$: 初項作用素 (これは線形ではない。)

(1.5)-線形型式　SESQUILINEAR FORM:

$$\boldsymbol{S_{n,b}} : \mathbb{C}[\tau] \times \mathcal{O}_{n,b} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$S_{n,b}\langle \sum \alpha_\nu \tau^\nu \mid \sum \beta_\mu (t-b)^\mu \rangle = \sum \nu! \alpha_\nu \bar{\beta}_\nu,$$

$$S_{n,b}\langle \tau_1^{\nu_1} \cdots \tau_n^{\nu_n} \mid f \rangle = \frac{\partial^{\nu_1} \cdots \partial^{\nu_n} \overline{f}}{\partial t_1^{\nu_1} \cdots \partial t_n^{\nu_n}}(a) :$$

($\tau_1^{\nu_1} \cdots \tau_n^{\nu_n}$ は、$\mathbb{C}^n$ の高階接ヴェクトル、
いわば「b での Dirac delta」 の符号付き高階微分)

- $S_{n,b}$: **非退化** i.e. $\mathbb{C}[\tau]^\perp = \{0\}$, $\mathcal{O}_{n,b}^\perp = \{0\}$

よって、弱位相に関して $\mathbb{C}[\tau]$ は $\mathcal{O}_{n,b}$ の双対 TVS 空間をなす：

2.1 THM. [de Boor-Ron 1990, 1992]

$Z_b \subset \mathcal{O}_{m,b}$: 有限次元部分ヴェクトル空間

$\Longrightarrow$ 制限 $S_Z : (Z_b{\downarrow} \times Z_b) \longrightarrow \mathbb{C}$ も非退化

3. 初項空間の一般の点における D 閉性

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$: 連結開集合、$f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}_m(\Omega)$ を考える。

$$\mathcal{Y}_m^k := \mathcal{Y}_m \cap \{\nu : |\nu| \leq k\}^n \quad (|\nu| = |(k_1, \ldots, k_m)| := \sum k_i)$$

$$r_k(t) := \max\{\mathrm{rank} W(f_1(t), \ldots, f_m(t); \nu_1, \ldots, \nu_m) : (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \mathcal{Y}_m^k\}$$

と置く。

t の函数としては、$r_k(t)$ は Ω の空ではない解析的開部分集合 U_k 上で最大値をとる。この最大値を r_k とする。

もし $f_1, \ldots, f_m$ が一次独立ならば、Walker の定理により $k \geq m-1$ のとき、$r_k = m$ となる。

3.1 PROP. Ω の空ではない解析的開集合 $U_1 \cap \cdots \cap U_{m-1}$ 上で、$\mathrm{Span}\,(f_1, \ldots, f_m)$ の Z のどの次数のジェットもヴェクトル束 $J^k Z$ をなす。

- $Z^{\mathrm{bdle}} := \{b \in \Omega :\ \forall k$ に対して $J^k Z$ は b の近傍でヴェクトル束$\}$

$= U_1 \cap \cdots \cap U_{m-1}$ (上述、ユークリッド位相で稠密・開)

この集合の点を束点という。

D-invariant: ヴェクトル空間 $V \subset \mathbb{C}[\tau]$ が

$\tau_i\ (i = 1, ..., m)$ による偏微分で不変であること。

- $Z^{\mathrm{inv}} := \{b \in \Omega :\ Z_b{\downarrow}$ は D-invariant$\}$

3.2 PROP. Z^{bdle}、Z^{inv} はともに局所座標の変換で不変

3.3 THM. [key theorem] $Z^{\mathrm{bdle}} \subset Z^{\mathrm{inv}}$

証明法

森本徹氏に Z を解空間とする微分方程式系 (Walker の定理の系によって具体的な形もわかる) の prolongation を用いればよいことを教示いただいた。

$Z_b \subset \mathcal{O}_{n,b}$: 有限次元部分ヴェクトル空間

$S_{Z,b}: Z_b{\downarrow} \times Z_b \longrightarrow \mathbb{C}$: $S_{n,b}$ から導かれた1.5線形型式

$\iota: Z_b{\downarrow} \longrightarrow \mathcal{O}_{n,b}{\downarrow} = \mathbb{C}[\tau]$: 包含写像

$\kappa: Z_b \longrightarrow \mathcal{O}_{n,b}$: 包含写像

随伴写像: $\mathsf{T}_{Z,b} := {}^{s}\iota : \mathcal{O}_{n,b} \longrightarrow Z_b$ of ι,

${}^{s}\kappa : \mathcal{O}_{n,b}{\downarrow} = \mathbb{C}[\tau] \longrightarrow Z_b{\downarrow}$ of κ.

(ι, κが弱連続故、これらも弱連続)

$$\begin{tikzcd}
Z_b \arrow[r, hook, shift left, "\kappa"] \arrow[d, dash, "S_{Z,b}"'] & \mathcal{O}_{n,b} = \mathbb{C}\{t-b\} \arrow[l, dashed, shift left, "\mathsf{T}_{Z,b}"] \arrow[d, dash, "S_{n,b}"] \\
Z_b{\downarrow} \arrow[r, hook, shift left, "\iota"] & \mathcal{O}_{n,b}{\downarrow} = \mathbb{C}[\tau] \arrow[l, dashed, shift left, "{}^{s}\kappa"]
\end{tikzcd}$$

3.4 PROP. $Z_b \subset \mathcal{O}_{n,b}$: 有限次元部分ヴェクトル空間

(1) $T_{Z,b} : \mathcal{O}_{n,b} \longrightarrow Z_b$ は弱連続

(2) 等式　$\mathrm{Ker}\, T_{Z,b} = (Z_b{\downarrow})^{\perp_n}$,　$(\mathrm{Ker}\, T_{Z,b})^{\perp_n} = Z_b{\downarrow}$が成立する。

ここで$\perp_n$は$S_{n,b}$に関して直交する空間(space of annhilators)

(3) $T_{Z,b}$はレトラクト、つまり $T_{Z,b} \circ \kappa : Z_b \longrightarrow Z_b$ は恒等写像

(4) 随伴写像${}^s\kappa$はレトラクト、つまり ${}^s\kappa \circ \iota : Z_b{\downarrow} \longrightarrow Z_b{\downarrow}$ は恒等写像

3.5 PROP. [Marinari et al., de Boor et al.]

$Z_b \subset \mathcal{O}_{n,b}$:を有限次元部分ヴェクトル空間とすると

$Z_b{\downarrow} \subset \mathbb{C}[\tau]$: D-invariant $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, T_{Z,b}$: 斉次イデアル

この性質を持ったレトラクトは補間法で重要

(Birkhoff: ideal interpolation scheme, “multiplicative”)

4. 束点に付随したアルチン環

$Z_b \subset \mathcal{O}_n(\Omega)$: 有限次元部分ヴェクトル空間

Prop. 4.4によって$b \in Z^{\mathrm{inv}}$では、$Z_b \subset \mathcal{O}_{n,b}$は$\mathcal{O}_{n,b}$の剰余環として次数環の構造を持つ。この環$A_{Z,b} := \mathcal{O}_{n,b}/Z_b{\downarrow}^{\perp}$は有限次元ヴェクトル空間だから局所次数Artin環である。

特に$b \in Z^{\mathrm{bdl}}$とすると:

$f_1, \ldots, f_p \in Z$が存在して、bの近傍U上の各点tで$f_{i,t}{\downarrow}$が$Z_t{\downarrow}$の基底をなす。

よってイデアル$Z_t{\downarrow}^{\perp}$は$S_{n,t}\langle f_{i,t}{\downarrow} \mid g\rangle = 0 \ (i = 1, \ldots, p)$ の解空間となる。

(tの函数としての$f_{i,t}{\downarrow}$)$\in \mathcal{O}_n(U)$であるから、

gの十分高次の項は自由で、残りの有限個の低次斉次項はランクが定数の$\mathcal{O}_n(U)$の元を係数とする同次線形関係で縛られている。

よってさらにUを絞れば$\{A_{Z,t} = \mathcal{O}_{n,t}/Z_{t\downarrow}{}^{\perp} \colon t \in U\}$は, 自由加群$(\mathcal{O}_n|U)^p$（ゆえに平坦)と同型となる。$(p = \dim_{\mathbb{C}} Z)$

次数Artin環の低次からの次元を並べ、零が続くところで打ち切ったものを「型」と言うことにする。これは双対性により$Z_{t\downarrow}$の次数による「型」と対応している。まとめて、

4.1 THM. 任意の有限次元ヴェクトル空間$Z \subset \mathcal{O}_n(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbb{C}^n$： 連結) に対して、$\{A_{Z,t} : t \in Z^{\mathrm{bdle}}\}$は、解析的開集合$Z^{\mathrm{bdl}}$上で、型が一定の局所次数Artin環の変形を与える。

これで有限次元ヴェクトル空間$Z \subset \mathcal{O}_n(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbb{C}^n)$の分類可能。

4.2 THM. (ランク定理) $A_{Z,b}$の型が$(1, p, a_2, a_3, \cdots)$であれば、局所座標を取り替えることにより、$Z \subset \mathcal{O}_p \subset \mathcal{O}_n$となり、$a_i \leq \binom{p}{i}$ $(i \geq 2)$となる。Zの零化PDE系(1.3 THM.)は次の方程式を含む。

$$\frac{\partial^{|\nu|} F}{\partial t^{\nu}} = 0 \quad (\nu = (0, \ldots, 0, k_{p+1}, \ldots, k_n) \in \mathcal{Y}_m, \neq 0)$$

5. 埋め込まれた多様体のBos-Calviの高階接空間 以下「高階」は略す

$V_a \subset \mathbb{C}^m$: 埋め込まれた複素多様体

$\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m) : U_b(\subset \mathbb{C}^n) \longrightarrow V_a \subset \mathbb{C}^m$:

局所パラメトリゼーション（チャートの逆）の芽

$\varphi : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_m$: $f \longmapsto f \circ \Phi$

$P^d(V_a) \subset \mathcal{O}_{V,a}$: V_a上のd次以下の多項式函数のなすヴェクトル空間

$\mathbb{C}[\Phi]^d := \{\varphi(f) := f \circ \Phi : f \in \mathbb{C}[x],\ \deg f \leq d\} \subset \mathbb{C}\{t\}$:

$P^d(V_a)$の引き戻し

前節のヴェクトル空間Zも、定数函数を含めば、

$Z = \mathrm{Span}\,(1, \Phi_1, \ldots, \Phi_m)$と表し、$\mathbb{C}[\Phi]^1$と見なせる。

$\mathbb{C}[\Phi]^d_b\!\downarrow \subset \mathbb{C}[\tau] : \mathbb{C}[\Phi]^d$ の初項空間 .

$S^{\varphi,d}_{n,b} : \mathbb{C}[\Phi]^d_b\!\downarrow \times \mathbb{C}[\Phi]^d \longrightarrow \mathbb{C}$:

$S_n : \mathbb{C}[\tau] \times \mathcal{O}_{n,a} \longrightarrow \mathbb{C}$ の制限である非退化1.5線形形式

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathcal{O}_{n,b} \arrow[d, equal, "S_n"'] & \mathcal{O}_{V,a} \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, equal, dashed, "\text{induced by } S_n"', "S^{\varphi}_{V,a}"] & \mathcal{O}_{m,a} \arrow[l] \arrow[ll, bend right, "\varphi"'] \arrow[d, equal, "S_m"] \\
\mathbb{C}[\tau] \arrow[r, "\cong"] \arrow[rr, bend right, "{}^{s}\varphi\ \text{(adjoint of } \varphi)"'] & D^{\varphi}_{V,a} \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{C}[\xi]
\end{tikzcd}
$$

DUALITY as TVS

set of Bos-Calvi tangents

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{n,b} \arrow[dddd, equal, "S_n"'] \arrow[dr, phantom, "\supset" sloped] & & & \mathcal{O}_{V,a} \arrow[lll, "\cong"'] \arrow[dddd, dashed, equal, "S^{\varphi}_{V,a}"] \arrow[dl, phantom, "\supset" sloped] & \mathcal{O}_{m,a} \arrow[l] \arrow[dddd, equal, "S_m"] \arrow[llll, bend right, "\varphi"'] \\
& \mathbb{C}[\Phi]^d \arrow[dd, equal, "S^d_{n,b}"'] & & P^d(V_a) \arrow[ll, "\cong", "\varphi_V"'] \arrow[dd, dashed, equal, "S^{\varphi,d}_{V,a}"'] & \\
& & & & \\
& \mathbb{C}[\Phi]^d{\downarrow} \arrow[rr, "\cong"] & & D^{\varphi,d}_{V,a} & \\
\mathbb{C}[\tau] \arrow[ur, phantom, "\supset" sloped] \arrow[rrr, "\cong"] \arrow[rrrr, bend right, "{}^s\varphi \text{ (adjoint of } \varphi\text{)}"'] & & & D^{\varphi}_{V,a} \arrow[u, phantom, "\supset_{\iota}" sloped] & \mathbb{C}[\xi] \arrow[l, phantom, "\supset"]
\end{tikzcd}
$$

set of Bos-Calvi tangents of dual deg d

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{n,b} \arrow[ddd, equal, "S_n"'] & & & \mathcal{O}_{V,a} \arrow[lll, "\cong"'] \arrow[dl, "T^{\varphi,d}_{V,a}"'] \arrow[ddd, dashed, equal, "S^{\varphi}_{V,a}"] & \mathcal{O}_{m,a} \arrow[l] \arrow[llll, bend right, "\varphi"'] \arrow[ddd, equal, "S_m"] \\
& \mathbb{C}[\Phi]^d \arrow[ul, hook] \arrow[d, equal, "S^d_{n,b}"'] & P^d(V_a) \arrow[l, "\cong", "\varphi_V"'] \arrow[d, dashed, equal, "S^{\varphi,d}_{V,a}"'] & & \\
& \mathbb{C}[\Phi]^d_{b\downarrow} \arrow[r, "\cong"] \arrow[dl, hook] & D^{\varphi,d}_{V,a} \arrow[dr, hook, "\iota"] & & \\
\mathbb{C}[\tau] \arrow[rrr, "\cong"] \arrow[rrrr, bend right, "{}^s\varphi\ \text{(adjoint of } \varphi)"'] & & & D^{\varphi}_{V,a} \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{C}[\xi]
\end{tikzcd}
$$

$\boxed{\text{TAYLOR PROJECTOR (next section)}}$

6. 埋め込まれた多様体上でのテイラー展開

$V \subset \mathbb{C}^m$：埋め込まれた複素多様体

$\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ or φ: a local parametrisation of V at a.

$\iota : D_{V,a}^{\varphi,d} \longrightarrow D_{V,a}^{\varphi}$: inclusion

$T_{V,a}^{\varphi,d} : \mathcal{O}_{V,a} \longrightarrow P^d(V_a)$: ιの随伴

次数dのテイラー展開と呼ぶ

6.1 LEM. $\mathbb{C}[\Phi]_b^d\!\downarrow$： D-invariant in $\mathbb{C}[\tau]$

$\iff D_{V,a}^{\varphi,d}$： D-invariant in $\mathbb{C}[\xi]$

$\iff T_{V,a}^{\varphi,d}$： 環準同型 （multiplicative）

• $a \in V$：次数dの束点
$\overset{DEF}{\Longleftrightarrow}$ $J^k(\mathbb{C}[\Phi]^d)$がヴェクトル束$(\forall k \in \mathbb{N})$.
$\overset{Walker}{\Longleftrightarrow}$ $J^k(\mathbb{C}[\Phi]^d)$がヴェクトル束$(\forall k \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\Phi]^d - 1)$.

6.2 THM. $a \in V$：次数dの束点$\Longrightarrow$ 任意のパラメトリゼーションφに対して$D^{\varphi,d}_{V,a}$はaでD-invariant (THM. 3.3)

6.3 THM. あるパラメトリゼーションφに対して$D^{\varphi,d}_{V,a}$がaでD-invariantとすると、
Artin 環 $P^d_{V,a} = \mathcal{O}_{m,a}/(D^{\varphi,d}_{V,a})^{\perp m}$ は全て同型、つまりV_aとdで決定される。.

このArtin環ををVのD-invariant point aにおける次数dのテイラー代数 という。

とくに$\dim V = 1$すなわち曲線の時は次のことが言える。

6.4 THM. $V \subset \mathbb{C}^m$: 複素多様体、$\dim V = 1$、$a \in V$ に対して
次の条件は同値

- $D_{V,a}^{\varphi,d}$: あるφに対してD-invariant
- $D_{V,a}^{\varphi,d}$ すべてのφに対してD-invariant
- $T_{V,a}^{\varphi,d}$: φに依存しない

結局Vの離散的な点を除いてテイラー展開が well-defined
(平面代数曲線の時は Bos-Calvi 2008. が示した)

7. 解析集合芽の超越性: $\mathfrak{a} \subset \mathbb{C}\{X_1, ..., X_m\}$: 素イデアル、

$A = \mathbb{C}\{X_1, ..., X_m\}/\mathfrak{a}$: 剰余環（整域）

$V_{\mathfrak{a}}$: $\mathfrak{a}$の元の共通零点として表される既約な解析集合芽$\subset \mathbb{C}^m$

$x_i = X_i|V_{\mathfrak{a}}$:　座標函数（極大イデアル$\mathfrak{m}$の生成系）

$(A, \mathfrak{m})$: $V_{\mathfrak{a}}$の解析的局所環と言う。

$x :=(x_1, \dots, x_m)$:　$\mathfrak{m}$の生成系

DEF. $\theta_x(k) := \max\{\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}\, p(x) : \ p \in \mathbb{C}[x],\ \deg p = k,\ p(x) \neq 0\}$

zero-estimate function

例： $A := \mathbb{C}\{X_1, X_2\}/(X_1^2 - X_2^3)$

$\theta_{(x_1,x_2)}(k) := \max\{\mathrm{ord}\, p(x_1, x_2) : \ \deg p = k,\ p(x_1, x_2) \neq 0\} = [\frac{3}{2}k]$

例： $A := \mathbb{C}\{X_1, X_2\}/(X_2 - e^{X_1} + 1)$

$\theta_{(x_1,x_2)}(k) = \max\{\mathrm{ord}\, p(x_1, x_2) : \deg p = k\} = (k + 1)^2$

（証明は常微分方程式の初歩による）

簡単のため$\theta_x(k)$のkに関する次数だけに注目する。

DEF. $\alpha(A,x) := \limsup_{k\to\infty} \log_k \theta_x(k)$:

局所環Aの極大イデアルの生成系x

あるいは特異点のアファイン埋込$V_a \subset \mathbb{C}^m$

の超越指数 transcendensy index

実際次のことが成立する。

7.1 THM. [Iz 1998] （解析集合の代数性の条件）

(A,Φ) or 特異点のアファイン埋込$V \subset \mathbb{C}^m$に対して次の条件は同値

(1) $\alpha(A,x) = 1$

(2) $\exists a,\ \exists b:\ \theta_x(k) \le ak + b$ (Remember Bezout)

(3) $V \subset \mathbb{C}^m$は代数的集合の解析的既約成分

例：レムニスケートの原点における1分枝

以下多様体のアファイン空間への埋込に話を限定する。

8. 一般の点における零評価

$V_a \subset \mathbb{C}^m$： 埋め込まれた多様体、$A := \mathcal{O}_{V,a}$

$\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m) : (\mathbb{C}^n, b) \longrightarrow (\mathbb{C}^m, a)$: local parametrisation

超越指数α は次式で定義された。

$$\theta_{A,\mathfrak{m}_a}(d) = \theta_{\mathcal{O}_{n,b},\{\Phi_1,\ldots,\Phi_m\}}(d)$$
$$:= \sup\{\operatorname{ord} f : f \in \mathbb{C}[\Phi]^d \setminus \{0\}\}$$
$$= \max\{\deg p : p \in D^{\varphi,d}_{V,a}\}.$$

$$\alpha(\Phi) = \alpha(V_a)$$
$$:= \limsup_{d\to\infty} \log_d \theta_{\mathcal{O}_{V,a},\{X_1|V,\ldots,X_m|V\}}(d).$$

これ等は$V_a \subset \mathbb{C}^m$ だけで定まり、パラメトリゼーションΦ には依らない。

$\alpha(V_a) = \infty$ となることもある：

8.1 EXAMPLE 上田哲生[Iz$_1$]

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{i!})!} x^{2^{i!}} : \quad \text{a gap series}$$

$$V := \{(x, y) : y = f(x)\}$$

$$\Longrightarrow \alpha = \infty \text{ for } V_{(0,0)}.$$

これは Liouville のギャップ数列による超越数の構成の類似である。

$$\mathrm{Hilb}_{\overline{V}_a}(d) := \dim_{\mathbb{C}} P^d(V_a) - \dim_{\mathbb{C}} P^{d-1}(V_a)$$
$$= \dim_{\mathbb{C}} D^{\varphi,d}_{V,a} - \dim_{\mathbb{C}} D^{\varphi,d-1}_{V,a}:$$

$\overline{V}_a$のヒルベルト函数(dの函数)

($\overline{V}_a$：V_aの小近傍における(代数的)なザリスキ閉包)

p.3のLemma 1.1により

8.2 THM.

$\Phi : \mathbb{C}^n_0 \longrightarrow \mathbb{C}^m_a$: V_aの局所パラメトリゼーション

$a \in V$: D-invariant

$\Longrightarrow$

$$\binom{n+d}{n} + \theta_{\mathcal{O}_{n,0,\{x_1,\dots,x_m\}}}(d) - d \le \sum_{i=0}^{d} \mathrm{Hilb}_{\overline{V}_a}(i) \le \binom{m+d}{m},$$

$$\alpha(\Phi) = \alpha(V_a) \le \dim \overline{V}_a \le m.$$

8.3 COR. $\alpha(V_a) > \dim \overline{V}_a$ となる点の全体は、V でベールの第一類集合、ルベーグ測度ゼロの集合をなす。

Noetherian **函数**: アファイン空間の開集合の函数でアファイン座標を含む有限個の函数で生成され D-invariant な環 (Tougeron and Khovanskii) :——

$x := (x_1, \ldots, x_n)$: アファイン座標系

$\Phi := \{\Phi_1, \ldots, \Phi_m\}$ が位数 m のネター鎖であるとは：

$$\exists P_{ij} : \ \partial\Phi_i/\partial x_j = P_{ij}(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_m)$$
$$(i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n)$$

$\Psi := \{x, \ \Phi\} \subset \mathcal{O}_{n,b}$ の多項式をネタリアン函数という。

Gabrielov [Ga]**：ネタリアンなヴェクトル場の積分曲線上でネタリアンな函数の零評価を与えた。** (see [GK] also). **この結果から評価**

8.4 COR. $\alpha(\Psi) \leq 2(m+n)$

が出る。 (cf. [Iz$_4$], Corollary 12).

我々の 8.2 THM. **は、ネタリアンの仮定なしに、よりシャープな評価**

$$\alpha(\Psi) \le \dim \overline{V}_a \le m+n$$

を導くが、これは V **の一般的な点でしか成立しない。**
上田の例8.1**によれば**, **この種の評価がすべての点で成立することはあり得ないのである。**

TRANSCENDENCE INDEX

	category of V	place	tr. index $\alpha(\Psi)$
Gabrielov	graph of Noetherian mapping	all points	$\le 2(m+n)$
COR. 4.2	complex manifold	generic point	$\le \dim \overline{V}_a \le m+n$

9 *

REFERENCES

[Bi] G. Birkhoff, The algebra of multivariate interpolation, in: Constructive approaches to mathematical models (ed. C. V. Coffman et al.), Academic Press (New York), 345-363 (1979)

[Bo$_1$] N. Bourbaki, Èlements de matématique: Algèbre Chapt. 9, Hermann, Paris (1959)

[Bo$_2$] N. Bourbaki, Èlements de matématique: Espaces vectoriels topologiques Chapt. 1,2,3,4, Hermann, Paris (1966)

[BC$_1$] L. Bos, J.-P. Calvi: Multipoint Taylor interpolation, Calcolo **45**, 35-51 (2008)

[BC$_2$] L. Bos, J.-P. Calvi: Taylorian points of an algebraic curve and bivariate Hermitian interpolation. Ann. Scuola Nor. Sup. Pisa Cl. Sci. (5), **VII**, 545-577 (2008)

[BR$_1$] C. de Boor, A. Ron: On multivariate polynomial interpolation, Constructive Approximation **6**, 287-302 (1990)

[BR$_2$] C. de Boor, A. Ron: The least solution for polynomial interpolation problem, Math. Z. **210**, 347-378 (1992)

[Ga] M. Gabrielov: Multiplicity of a zero of an analytic function on a trajectory of a vector field, in: The Arnoldfest (ed E.Bierstone et al.), Fields Inst. Communications v.24, AMS, 1997, 191-200

[GK] M. Gabrielov, A. Khovanskii: Multiplicity of a Noetherian intersection, Amer. Math. Soc. Transl. (2), **186** (1998)

[GR] H. Grauert, R. Remmert: Analytische Stellenalgebren, GMWE **176**, Springer, Berlin (1971)

[Iz$_1$] S. Izumi: A criterion for algebraicity of analytic set germs, Proc. Japan Acad. **68** Ser.A 307-309 (1992)

[Iz$_2$] S. Izumi: Transcendence measures for subsets of local algebras, in: Real analytic and algebraic singularities (ed. T. Fukuda et al.) Pitman Res. Notes Math. **381**, Longman, Edinburgh Gate 1998, 189-206

[Iz$_3$] S. Izumi: Introduction to algebraic theory of multivariate interpolation: in Real and complex singularities, Proceedings of Australian-Japanese Workshop (ed. L. Paunescu et al.), World Scientific 2007, 85-108

[Iz$_4$] S. Izumi: Local zero estimate, in: Several topics in singularity theory, Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku **1328**, 159–164 (2003)

[Wa] R. A. Walker: Linear dependence of quotients of analytic functions of several variables with the least sub-collection of generalized Wronskians, Linear Algebra Appl. **408**, 151–160 (2005)

19 April, 2012,

revised: 9 March, 2013 (the birthday of S. I.)