ニュートラル計量，ローリング・ボディ そして ケプラー問題

石川 剛郎 (いしかわ・ごうお，Goo Ishikawa)
札幌，日本

第２３回　沼津研究会

— 幾何，数理物理，そして量子論 —

沼津高専，沼津，日本

2016 年（平成 28 年）３月７日〜３月９日

【 沼津研究会での私（石川 剛郎）の講演題目 】

— 量子化条件とラグランジュ特異点の特性類.（第 9 回，2001）.

— トロピカル幾何について.（第 14 回，2007）.

— 接触-錐 ルジャンドル-ヌル双対性における接線曲面の特異性の非対称性.（第 18 回，2011）.

— D_4 幾何における三対性への特異点論の試み（Trial to trialty）（第 20 回，2013）.

— D_4 幾何における三対性への特異点論の試み再び（三対五徳八元旗）（第 21 回，2014）.

— ニュートラル共形計量とヌル曲線にまつわる特異点 (第 22 回，2015).

— ニュートラル計量，ローリング・ボディ，そして ケプラー問題 (第 23 回，2016).

落語で「三題噺」というものがあります．お客から三つのお題をもらって，そのお題を織り込んで噺を作り，落ちをつけます．
それは素人には難しいので，今回は，三つのお題をこちらで勝手に決めて

ニュートラル計量，ローリング・ボディ，ケプラー問題

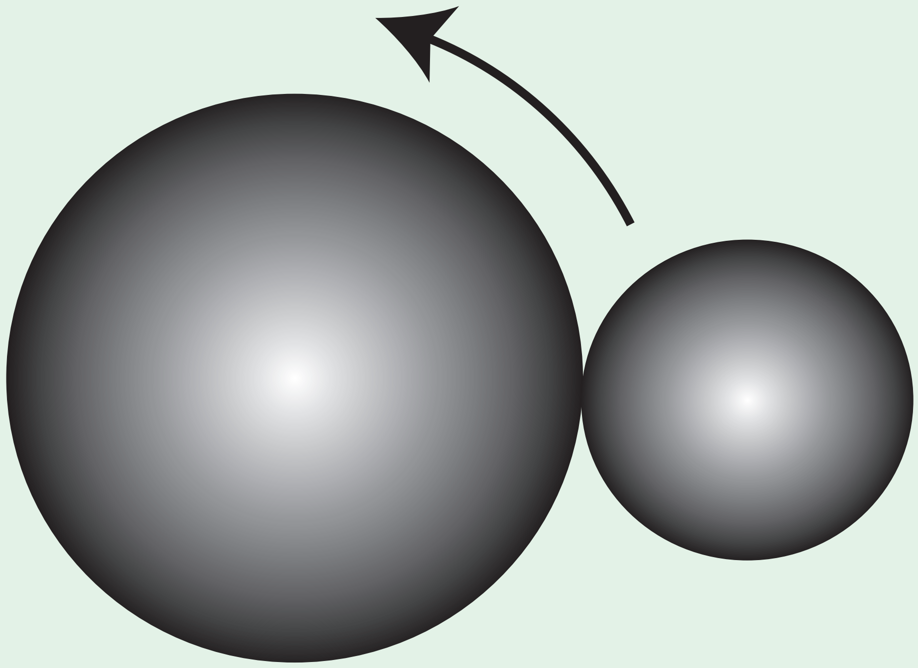
で「三題噺」を作ろうとしました．

それでもなかなか「落ち」がつきませんでした．

その失敗（苦労）の顛末をお話します．

【 Rolling bodies 】

２つの曲面を，くっつけて，すべらさず，ひねらずに，ころがす．



【 Rolling bodies 】

$(\Sigma_1, g_1), (\Sigma_2, g_2)$ を２次元有向 Riemann 多様体とする．

ローリング・ボディの配置空間は,

$$C(\Sigma_1, \Sigma_2) := \{(x, \hat{x}, \Phi) \mid x \in \Sigma_1,\ \hat{x} \in \Sigma_2,$$
$$\Phi : T_x\Sigma_1 \to T_{\hat{x}}\Sigma_2 \ \text{向きを保つ isometry}\ \}$$

で与えられる． $\dim C(\Sigma_1, \Sigma_2) = 5.$

【 Rolling bodies 】

$C(\Sigma_1, \Sigma_2)$ 上の曲線 $\gamma(t) = (x(t), \hat{x}(t), \Phi(t))$ が admissible（ローリングの trajectory）である条件は,

$$\Phi(t)(\dot{x}(t)) = \dot{\hat{x}}(t)$$

かつ，$x(t)$ に沿った任意のベクトル場 $V(t)$ について,

$$\nabla_{\dot{x}(t)} V(t) = 0 \Longleftrightarrow \nabla_{\dot{\hat{x}}(t)} \Phi(t)(V(t))$$

$\exists$ distribution $D \subset T(C(\Sigma_1, \Sigma_2))$ of rank 2 on the configulation space $C(\Sigma_1, \Sigma_2)$ such that

$\gamma(t) = (x(t), \hat{x}(t), \Phi(t))$ が admissible

$\Longleftrightarrow \dot{\gamma}(t) \in D_{\gamma(t)}$ (γ が D の積分曲線).

【 Neutral metrics 】

松下泰雄，鎌田博行，中田文憲「４次元微分幾何学への招待，不定計量の存在，ニュートラル計量，複素曲面，ツイスター」SGC ライブラリー 113，サイエンス社 (2014).

【 Neutral metrics 】

(M, g) 不定値 $(2, 2)$ 計量 g をもつ４次元有向多様体とする．

$p \in M,\ T_pM = \mathbb{R}^{2,2}$.

$$Z := \{(p, V_1, V_2) \mid\ p \in M,\ V_1 \subset V_2 \subset T_pM,$$

V_2 は自己双対２次元 null 部分空間 $\}$,

$$X := \{(p, V_2)\}\ \text{“twistor space”}, \quad Y := \{(p, V_1)\},$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & Z^6 & \longleftarrow & (S^1 \times S^1)/\mathbb{Z}_2 & \\
 & & \cong\swarrow & & \searrow & & \\
(S^1 \times S^1)/\mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & Y^6 & & & X^5 & \longleftarrow S^1 \\
 & & & \searrow & \swarrow \pi & & \\
 & & & M^4 & & &
\end{array}$$

【 Neutral metrics 】

$M = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, $g = g_1 \oplus (-g_2)$, $(2,2)$-metric.

$$(C(\Sigma_1, \Sigma_2), D) \cong (X, D')$$

the space of self-dual null tangent planes to $M = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ and the "horizontal" 2-plane field D' ("twistor 分布").

このとき，次が成立（Nurowski, 2014）：

D 可積分 $\Longleftrightarrow$ D' 可積分 $\Longleftrightarrow$ g 共形反自己双対 $\Longleftrightarrow$ $W_+ = 0$.

(W_+: Weyl テンソルのプラス部分.)

【 Neutral metrics 】

さらに，開集合 $U \subset M = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ で W_+ が消えていないとき，$\forall p \in U, \pi^{-1}(p)$ の高々 4 点を除いて，D は growth vector が $(2, 3, 5)$ の分布になる.

さらに，$\exists(2, 3)$ 共形計量 $[\tilde{g}]$ on $\pi^{-1}(U)$ （除外点を除く）such that D が G_2' 分布（$(2, 3, 5)$ 分布のうちで最大の対称性を持つ）$\Longleftrightarrow$ $[\tilde{g}]$ 共形平坦. （Nurowski, 2005, 2014).

An, Nurowski, *Twistor space for rolling bodies*, Commun. Math. Phys. **326** (2014), 393–414.

【 Kepler problem — ２体問題 】

【 Kepler problem — ２体問題 】

ヨハネス・ケプラー (1571–1630),　　アイザック・ニュートン (1642–1727)

【 Kepler problem 】

$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t) \in \mathbb{R}^n$, 運動方程式（質量単位を選んで）

$$\frac{d^2\boldsymbol{q}}{dt^2} = -\frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}|^3}.$$

エネルギー

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{p}|^2 - \frac{1}{|\boldsymbol{q}|}$$

J. Moser, Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold, Comm. Pure Appl. Math., **23** (1970), 609–636.

Fock (1935), Souriau (1974), Belbruno (1977), Iwai (1981), Mladenov (1989), ...

【 Kepler problem 】

Theorem (Moser 1970)：For a negative constant c, the energy surface $H = c$ can be mapped topologically one to one into the unit tangent bundle T_1S^n of S^n. This mapping is onto the unit tangent bundle of S^n punctured at one point (the “north pole” corresponding to the collision states). Furthermore, the flow defined by the Kepler problem is mapped into the geodesic flow on the punctured sphere after a change of the independent variable.

$n = 3$. $T_1S^3 = S^2 \times S^3$ is identified with the space of null geodesics on the space of null lines in $\mathbb{R}^{2,4}$, that is the conformal completion of Minkowskii space $\mathbb{R}^{1,3}$.

【 Kepler problem 】

V.W. Guillemin, S. Sternberg, *Variations on a Theme by Kepler*, Colloquium Publications, Amer. Math. Soc., (1990, 2006).

レクチャー・ノート

— Classical brackets and configurational symmetries
— Quantum mechnics and dynamical symmetries
— The conformal groups and hidden symmetiries
— The conformal completion of Minkowski space
— Homogeneous models in general relativity
— Appendix 1. The Grünwald-van Hove Theorem
— Appendix 2. Classical and quantum logics

【 Neutral metrics and Lorentz metrics 】

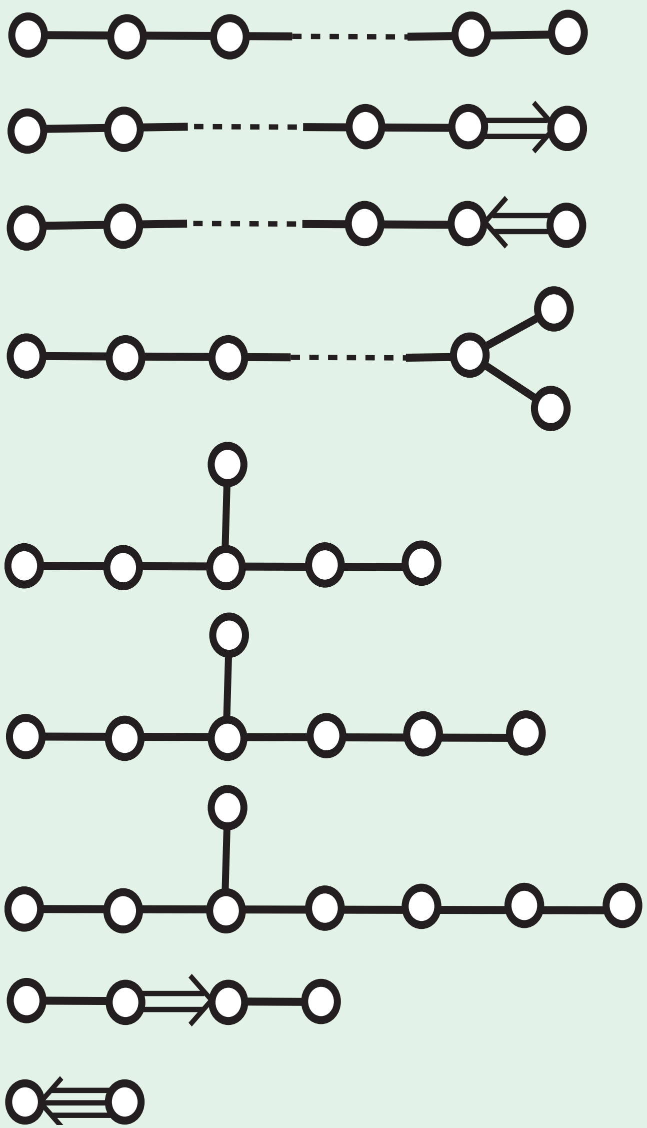
問題：Rolloing bodies が関わる $(2,2)$ 計量 (neutral 計量）と Kepler 問題が関わる $(1,3)$ 計量（Lorentz 計量）はどう結びつくか？

$\mathbb{R}^{2,2}$ ： $(2,2)$ ニュートラル計量をもつ 4 次元実ベクトル空間.
$\wedge^2(\mathbb{R}^{2,2})$: space of 2-forms on $\mathbb{R}^{2,2}$, $\dim(\wedge^2(\mathbb{R}^{2,2})) = 6$.
$\wedge^2(\mathbb{R}^{2,2})$ 上の計量が

$$(e_i \wedge e_j \mid e_k \wedge e_\ell) := \begin{vmatrix} (e_i \mid e_k) & (e_i \mid e_\ell) \\ (e_j \mid e_k) & (e_j \mid e_\ell) \end{vmatrix}$$

により誘導され，$(2,4)$ 計量となる．$\wedge^2(\mathbb{R}^{2,2})$ の null lines の空間は，$(1,3)$ 共形計量を持つ.

【 Dynkin 図形 】



A_n	$sl(n+1, \mathbb{C})$
B_n	$o(2n+1, \mathbb{C})$
C_n	$sp(2n, \mathbb{C})$
D_n	$o(2n, \mathbb{C})$
E_6	
E_7	
E_8	
F_4	
G_2	

【 D_3 】

$\mathbb{R}^{2,4}$ を $(2,4)$ 計量をもつベクトル空間，
$Z := \{(V_1, V_2) \mid V_1 \subset V_2 \subset \mathbb{R}^{2,4},\ \text{oriented null subspaces}\}$
$X := \{V_2\}, \quad Y := \{V_1\}$ とおく．

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & Z^6 = S^3 \times S^3 & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
S^1 \times S^3 = Y^4 & & & & X^5 = S^2 \times S^3
\end{array}
$$

There arises the conformal metric of type $(1,3)$ on Y.
Y is the conformal completion of Minkowskii space $\mathbb{R}^{1,3}$ and
X is the space of null geodesics on Y.

V.W. Guillemin, S. Sternberg, *Variations on a Theme by Kepler*, Colloquium Publications, Amer. Math. Soc., (1990).

【 D_3 】

$\mathbb{C}^6$ 上の２次形式 $q(\boldsymbol{z})$ を

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{z}) :=& \quad z_1 z_6 + z_2 z_5 + z_3 z_4 \\ =& \quad \boldsymbol{z}^T \begin{pmatrix} & & & & & \frac{1}{2} \\ & & & & \frac{1}{2} & \\ & & & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{2} & & & & & \end{pmatrix} \boldsymbol{z} \end{aligned}$$

により定める．$(\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)^T \in \mathbb{C}^6)$.

【 D_3 】

$Z := \{(V_1, V_2) \mid V_1 \subset V_2 \subset \mathbb{C}^6, \text{ null complex subspaces}\}$

$X := \{V_2\}, \quad Y := \{V_1\}$ とおく．

$$\begin{array}{ccc} & Z^6 & \\ \swarrow & & \searrow \\ Y^4 & & X^5 \end{array}$$

通常の複素共役 $\tau : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6, \tau(z) = \overline{z}$ を取ると，Z の実部（不動点集合）には $(3,3)$ 計量，Y の実部には $(2,2)$ 計量というニュートラル計量が誘導される．

【 D_3 】

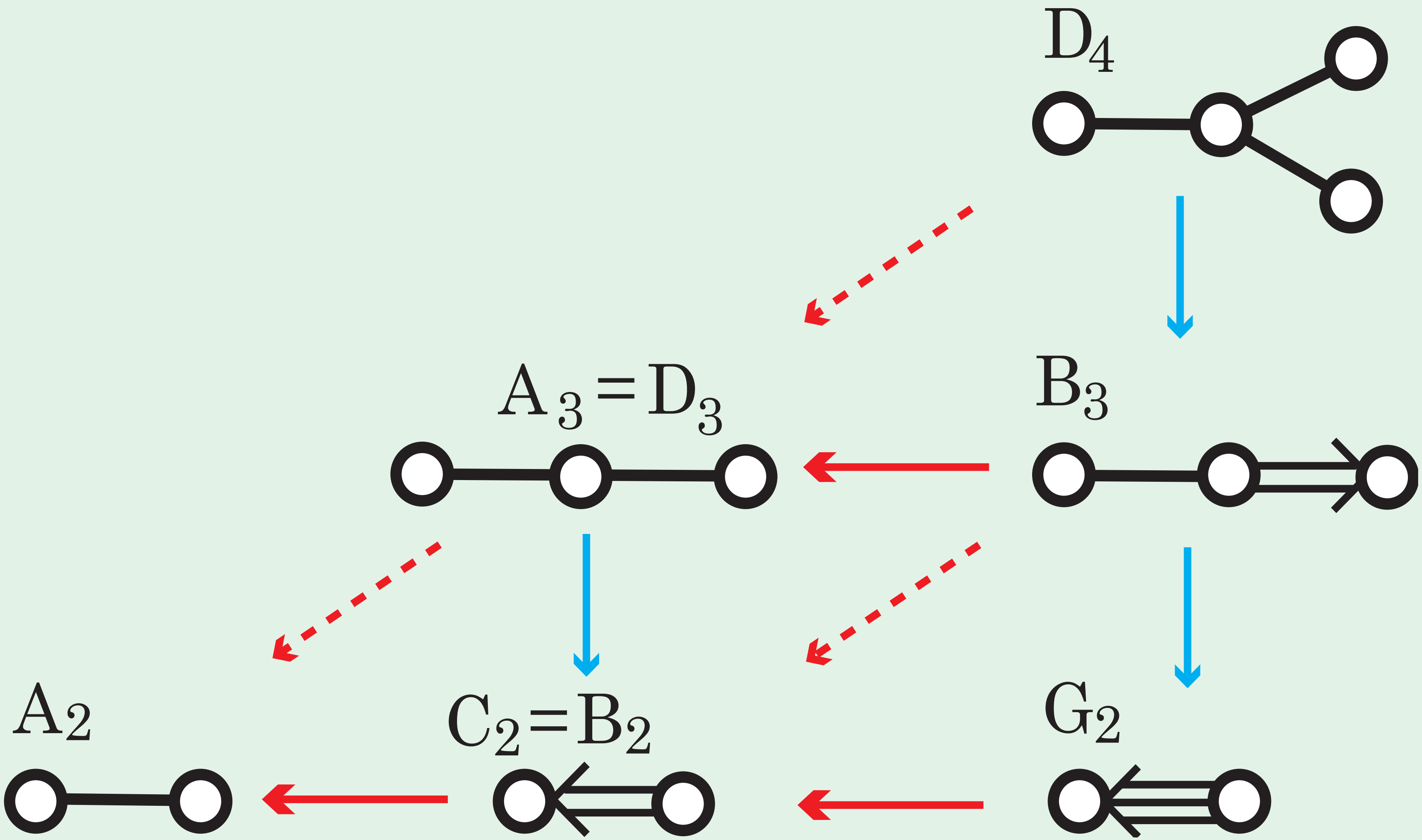
別の複素共役 (anti-linear involution) として，$\tau' : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$,

$$\tau'(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) := (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_4}, \overline{z_3}, \overline{z_5}, \overline{z_6})$$

を取れば，Z の実部には $(2, 4)$ 計量，Y の実部には $(1, 3)$ 計量が誘導される．

Lie 環の同型 $\mathfrak{su}(2, 2) \cong \mathfrak{so}(2, 4)$ と関係し，ケプラー問題と結びつく．

【 D_4-ヒエラルキー 】



【 D_4 】

$\mathbb{C}^8$ 上の２次形式 $q(\boldsymbol{z})$ を

$$
\begin{aligned}
q(\boldsymbol{z}) :=& \quad z_1 z_8 + z_2 z_7 + z_3 z_6 + z_4 z_5 \\
=& \quad \boldsymbol{z}^T \begin{pmatrix} & & & & & & & \frac{1}{2} \\ & & & & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & & \frac{1}{2} & & \\ & & & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & & & \\ & & \frac{1}{2} & & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & & & & \\ \frac{1}{2} & & & & & & & \end{pmatrix} \boldsymbol{z}
\end{aligned}
$$

により定める．$(\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8)^T \in \mathbb{C}^6)$.

【 D_4 】

G. Ishikawa, Y. Machida, M. Takahashi, *Geometry of D_4 conformal triality and singularities of tangent surfaces,* in Proc. of Singularities in Geometry andAppl. III, Edinburgh, Scotland, 2013, Journal of Singularities, **12** (2015), 27–52.

【 D_4-triality あるいは Triple D_3】

$\mathbb{C}^8$ の null 部分空間から作られる旗

$$V_1 \subset V_2 \subset V_3 \begin{array}{ccc} & V_4^+ & \\ \subset & & \subset \\ & & \\ \subset & & \subset \\ & V_4^- & \end{array} V_3^\perp \subset V_2^\perp \subset V_1^\perp \subset \mathbb{C}^8.$$

の全体 $Z = Z(D_4)$ は 12 次元多様体,

$Q_0 = \{V_1\}$，$Q_+ = \{V_4^+\}$，$Q_- = \{V_4^-\}$ は，すべて 6 次元多様体であり，共形 D_3 構造をもち，図式

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ Q_0 & & Q_+ & & Q_- \end{array}$$

は３対性をもち，それぞれが三題噺と結びつく. . . おしまい.

Thank you for your attention.