Coxeter 群の同型問題の周辺と幾何的な視点の紹介

保坂哲也

2018 年 3 月 7 日

Contents

Coxeter 群とは

Coxeter 群および Coxeter 系は次で定義される.

Coxeter 群の定義

群 W について, W のある有限の生成元の集合 S と, 写像 $m : S \times S \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ で次の条件 (1)–(4) をみたすものが存在するとき, W を<u>Coxeter 群</u>とよぶ.

(1) 各 $s \in S$ について $m(s, s) = 1$

(2) 各 $s, t \in S$ について $m(s, t) = m(t, s)$

(3) 各 $s, t \in S$ について $s \neq t$ のとき $m(s, t) \geq 2$

(4) $W = \langle\, S \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \ (s, t \in S) \,\rangle$ と表せる

また, Coxeter 群 W が上のように表せているときに, 組 (W, S) を<u>Coxeter 系</u>とよぶ.

Coxeter 群の注意

Remark 1

ここでは，Coxeter **群** W **の生成系** S **は常に有限集合とする．**

Remark 2

Coxeter **群** W **が与えられたとき，上のように生成系** S **と写像** m **を用いて** W **は表せるというのが定義なので，**Coxeter **系** (W, S) **の一組は必ず存在する．**

Coxeter 群の注意

Remark 3

Coxeter 系 (W, S) が与えられたとき,

$$m(s,t) := o(st) \quad (s,t \in S)$$

によって写像 $m : S \times S \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を定めると, W は

$$W = \langle\, S \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \ (s,t \in S) \,\rangle$$

と表せる.
したがって, Coxeter 系 (W, S) は上述の定義の情報をすべて持っている.

Coxeter 群の注意

Remark 4

各 $s \in S$ について, $s^2 = ss = 1$. よって特に $s^{-1} = s$ が成り立つ.

(幾何的には $s \in S$ は空間の鏡映変換と対応している.)

Remark 5

$s, t \in S$ について,

$$
\begin{aligned}
m(s,t) = 2 \iff (st)^2 = 1 \iff stst = 1 \\
\iff st = ts
\end{aligned}
$$

Remark 6

$s, t \in S$ について,

$$m(s,t) = \infty \iff (st)^\infty = 1 \iff o(st) = \infty$$

Coxeter 群の注意

Remark 7

$s, t \in S$ $(s \neq t)$ について, $m = m(s,t)$ とおくとき, $(st)^m = 1$ より

(i) $m = 2n$ 偶数のとき

$$stst\cdots st = (st)^n = (ts)^n = tsts\cdots ts$$

(ii) $m = 2n+1$ 奇数のとき

$$stst\cdots sts = (st)^n s = (ts)^n t = tsts\cdots tst$$

Coxeter 群の語の問題

定理 (J.Tits 1960's)

Coxeter 系 (W, S) について，$w \in W$ が

$$w = s_1 s_2 \cdots s_l = t_1 t_2 \cdots t_l \quad (s_i, t_i \in S)$$

と S の最小の長さ $l = l(w)$ のワードで表せているとき，この 2 つのワードは，先ほどの

$s, t \in S$ について，$m := m(s,t)$ とおくとき

(i) $m = 2n$ 偶数のとき

$$stst \cdots st = (st)^n = (ts)^n = tsts \cdots ts$$

(ii) $m = 2n+1$ 奇数のとき

$$stst \cdots sts = (st)^n s = (ts)^n t = tsts \cdots tst$$

という形の有限の変形で移りあえる．

Coxeter 群の標準部分群

定義

Coxeter 系 (W, S) について，$T \subset S$ によって生成される W の部分群を W_T と表す（これを標準部分群という）.

Remark

このとき

$$W_T = \langle\, T \mid (st)^{m|_{T\times T}(s,t)} = 1 \ (s,t \in T)\,\rangle$$

と表すことができる.
すなわち，(W_T, T) は Coxeter 系となり，W_T は Coxeter 群となる.

有限 Coxeter 群について

定理 (H.S.M.Coxeter 1930's)

群 G **が有限鏡映群である必要十分条件は,** G **が有限** Coxeter **群となることである.**

有限 Coxeter **群の分類について**

Coxeter **氏自身によって, 有限** Coxeter **群 (有限鏡映群) の分類は完了している.**

無限 Coxeter 群について

無限 Coxeter 群の分類について

無限 Coxeter 群の分類問題 (同型問題) は現時点でまだ未解決.

Coxeter 群の同型問題

- 与えられた 2 つの Coxeter 群 W_1, W_2 は同型か否か (Coxeter 系をみて) 判定せよ.

Coxeter generating set と reflection set

定義

Coxeter 群 W に対して, (W, S) が Coxeter 系となる $S \subset W$ を Coxeter generating set とよぶ.

定義

Coxeter 系 (W, S) に対して,

$$R_S = \{wsw^{-1} \mid s \in S\ w \in W\}$$

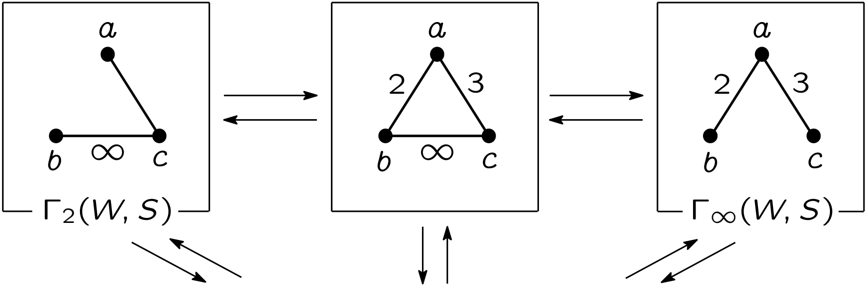
を (W, S) の reflection set とよぶ.

Coxeter 群の同型問題

Coxeter 群の同型問題

- 与えられた 2 つの Coxeter 群 W_1, W_2 は同型か否か (Coxeter 系をみて) 判定せよ.
- 与えられた Coxeter 群 W に対して, W の Coxeter generating set をすべて求めよ.

Coxeter 系と対応するダイアグラム Γ_2 と Γ_∞

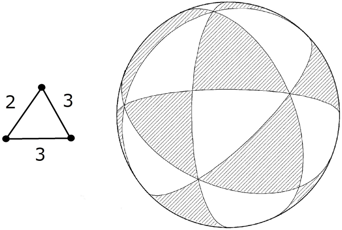


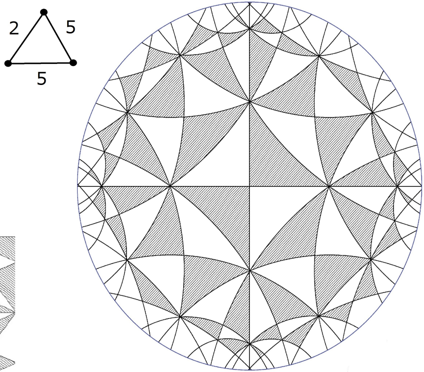
$$W = \left\langle \; a, b, c \;\middle|\; \begin{array}{l} a^2 = b^2 = c^2 = 1 \\ (ab)^2 = (ac)^3 = 1 \;\; (\, (bc)^\infty = 1 \,) \end{array} \right\rangle$$

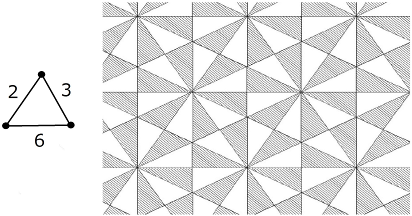
$$S = \{a, b, c\}$$

(W, S)

Coxeter 群の例

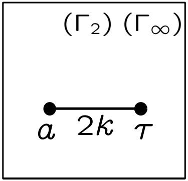






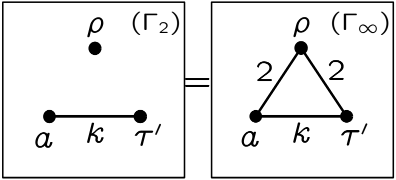
有限 Coxeter 群の異なる Coxeter 系 (type I)

$I_2(2k)$



(W, S)

$I_2(k) \times A_1$



(W', S')

$W \cong W'$

(群として同型)

k は 3 以上の奇数とする.

対応の仕方は

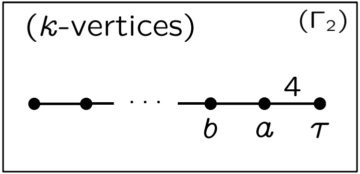
- $\tau' := \tau a \tau$
- $\rho := (a\tau)^k$

(ρ は (W, S) の longest-length の元)

($\rho \in Z(W)$)

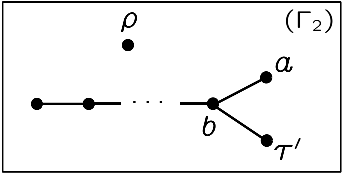
有限 Coxeter 群の異なる Coxeter 系 (type II)

$B_k \ / \ C_k$



(W, S)

$D_k \times A_1$



(W', S')

$W \cong W'$

(群として同型)

<u>k **は** 3 **以上の奇数とする**.</u>

対応の仕方は

- $\tau' := \tau a \tau$
- $\rho :=$[(W, S) **の** longest-length **の元**]

  ($\rho \in Z(W)$ **となる**)

- $S' := S \cup \{\tau', \rho\} - \{\tau\}$

Coxeter 群の異なる Coxeter 系 1

Remark

異なる Coxeter **系を持つ有限** Coxeter **群は，本質的には上で紹介した** (type I) (type II) **の** 2 **つのタイプしかない**.

Remark

無限 Coxeter **群** W **においても，**Coxeter **系** (W, S) **のパーツ** (W_T, T) **がこの** (type I) **または** (type II) **の形で，全体としても整合性が取れてこの変形できるとき，異なる** Coxeter **系** (W, S') **が得られる**. ("elementary reduction" **とよぶ**.)

Remark

(type I) **または** (type II) **の変形を用いて得られる** Coxeter **系** (W, S) **と** (W, S') **の** reflection **の集合は一致しない**. $R_S \neq R_{S'}$.

Coxeter 群の spherical subset について

定義 (spherical subset)

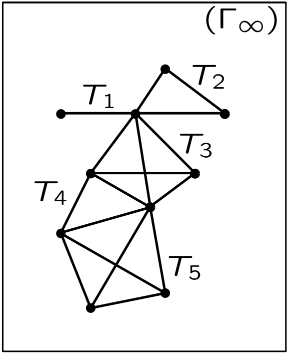
Coxeter 系 (W, S) について，$T \subset S$ で W_T が有限なものを <u>spherical subset</u> とよぶ.

補題 (cf. Brady-McCammond-Mühlherr-Neumann)

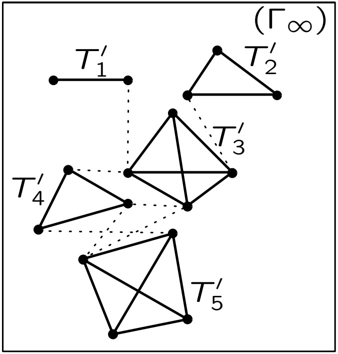
2 つの Coxeter 系 (W, S), (W', S') と同型写像 $\phi : W \to W'$ があるとき，(W, S) の maximal spherical subset $T \subset S$ に対して，(W', S') の maximal spherical subset $T' \subset S'$ で $\phi(W_T) \sim W'_{T'}$ となるものが一意的に存在する.

またここで reflection set が一致するとき ($\phi(R_S) = R_{S'}$) は，$(W_T, T) \cong (W'_{T'}, T')$ が成り立つ.

Coxeter 群の maximal spherical subset について



(W, S)



(W', S')

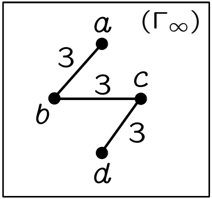
いま $W \cong W'$ のときを考える.

もし対応する reflection set が一致するとき,
対応する maximal spherical subsets T_i と T_i'
は同じ形になる.

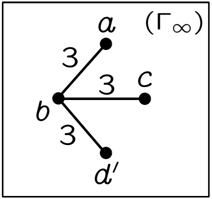
よってあとは，くっつき方だけが問題になる.

Coxeter 群の異なる Coxeter 系 2 (“twist”)

[Mühlherr (2000)]



(W, S)



(W', S')

$W \cong W'$

(群として同型)

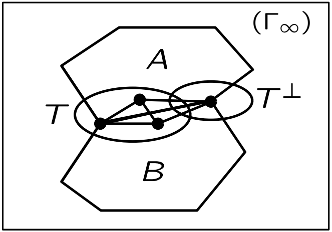
対応の仕方は

- $T := \{b, c\}$ **とおく**
- w_T :=[(W_T, T) **の** longest-length **の元**]
- $d' := w_T d w_T^{-1}$

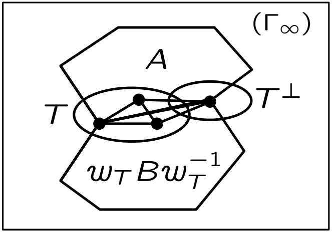
(**ここで** $b = w_T c w_T^{-1}$, $c = w_T b w_T^{-1}$ **となる**)

Coxeter 群の異なる Coxeter 系 2 (“twist”)

[Brady-McCammond-Mühlherr-Neumann (2002)]



(W, S)



(W', S')

$W \cong W'$

(群として同型)

- $T \subset S$ で W_T は有限
- $T^\perp := \{s \in S \mid st = ts \text{ for any } t \in T\}$
- $S - (T \cup T^\perp) = A \cup B$
- w_T :=[(W_T, T) の longest-length の元]
- $S' := A \cup (T \cup T^\perp) \cup w_T B w_T^{-1}$

(ここで $w_T (T \cup T^\perp) w_T^{-1} = T \cup T^\perp$ となる)

Remark

(W, S) から twist によって (W, S') が作られるとき，これらの reflection の集合は一致する．$R_S = R_{S'}$.

Coxeter 群の同型問題の予想 1

予想 1 (Brady-McCammond-Mühlherr-Neumann (2002))

W **の** 2 **つの異なる** Coxeter **系** (W, S) **と** (W, S') **において**，reflection **の集合が一致する** $(R_S = R_{S'})$ **とき**，(W, S) **と** (W, S') **は有限回の** twist **を用いて移りあえるであろう**.

定理 (Howlett-Mühlherr (2004))

この予想が正しければ，Coxeter **群の同型問題は解決する**.

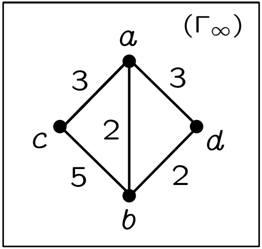
予想 1 の反例

定理 (Ratcliffe-Tschantz (2008))

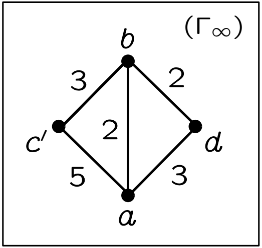
W の異なる Coxeter 系 (W, S) と (W, S') で reflection の集合が一致する ($R_S = R_{S'}$) が twist で移りあえない例 ("chordal") が存在する.

Coxeter 群の異なる Coxeter 系 3 (“chordal”)

[Ratcliffe-Tschantz (2008)]



(W, S)



(W', S')

$W \cong W'$
(**群として同型**)

対応の仕方として

$\beta : W_{\{a,b,c\}} \to W_{\{a,b,c\}}$ automorphism **を**

$\beta(a) = b,\ \beta(b) = a,\ \beta(c) = c'$ **で定める**

ただし $c' := cabcbac \ (= (cab)c(cab)^{-1})$

(**対応する** R_S **と** $R_{S'}$ **は一致する**)

reflection-compatible と angle-compatible

定義 (reflection-compatible)

Coxeter 系 (W, S), (W, S') において, $R_S = R_{S'}$ のとき S と S' は reflection-compatible であるという.

定義 (angle-compatible)

Coxeter 系 (W, S), (W, S') において,

任意の $\{a, b\} \subset S$ $(m(a, b) < \infty)$ に対して,
$\{a', b'\} \subset S'$ が存在して, $\{a, b\} \sim \{a', b'\}$ (in W) となる

が成り立つとき S と S' は angle-compatible であるという.

reflection-compatible と angle-compatible

Remark 1

S と S' が angle-compatible ならば reflection-compatible.

Remark 2

(W, S) と (W, S') が twist で移りあえるのなら, S と S' は angle-compatible.

Remark 3

(W, S) と (W, S') が chordal で変形しているのなら, S と S' は angle-compatible ではない.

Coxeter 群の同型問題の最近の状況

Problem (Marquis-Mühlherr (2008))

W の Coxeter 系 (W, R) が与えられたとき，(W, R) と angle-compatible な (W, S) をすべて求めよ．

定理 (Marquis-Mühlherr (2008))

この問題が解決すれば，Coxeter 群の同型問題は解決する．

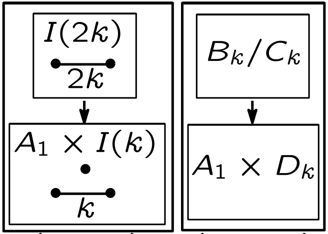
アイデア [Howlett-Mühlherr (2004)]

W : Coxeter 群 (固定)

(W, R) : Coxeter 系 (固定)

$R = R_1 \to R_2 \to R_3 \to \cdots \to R_n = R'$: reduced

$(n \leq |R|)$ (elementary reduction)



(type I) or (type II)

(W, S) : Coxeter 系 (任意)

$S = S_1 \to S_2 \to \cdots \to S_l = S'$: reduced

$(l \leq |S|)$ (elementary reduction)

アイデア [Howlett-Mühlherr (2004)]

定理 (Howlett-Mühlherr (2004))

Coxeter 系 (W, R') について，R' が reduced であるとき，
W の有限自己同型群 $\Sigma\,(\subset \mathrm{Aut}(W))$ が存在して，
W の任意の reduced Coxeter generating set S' に対して，
ある $\alpha \in \Sigma$ が存在して
$\alpha(S')$ と R' は reflection-compatible になる．

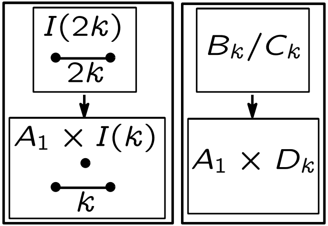
アイデア [Howlett-Mühlherr (2004)]

W : Coxeter 群 (固定)

(W, R) : Coxeter 系 (固定)

$R = R_1 \to R_2 \to R_3 \to \cdots \to R_n = R'$: reduced

$(n \leq |R|)$ (elementary reduction)



(type I) or (type II)

(W, S) : Coxeter 系 (任意)

$S = S_1 \to S_2 \to \cdots \to S_l = S'$: reduced

$(l \leq |S|)$ (elementary reduction)

$^\exists \alpha \in {}^\exists \Sigma \subset \mathrm{Aut}(W)$
(有限)

$S' \xrightarrow[\cong]{\alpha} \alpha(S') \sim R'$

(reflection-compatible)

アイデア [Marquis-Mühlherr (2008)]

(W, S) : Coxeter 系（任意）

$S = S_1 \to S_2 \to \cdots \to S_l = S'$: reduced　(elementary reduction)

$(l \leq |S|)$

$\cdots \to R_n = R'$: reduced

$^{\exists}\alpha \in {}^{\exists}\Sigma \subset \mathrm{Aut}(W)$
（有限）

$S' \xrightarrow[\cong]{\alpha} \alpha(S') \sim R'$
(reflection-compatible)

$\alpha(S') \to S'_2 \to \cdots \to S'_t = S'' \sim R'$
(angle-compatible)

$\boxed{\begin{array}{c} J_i\text{-deformation} \\ \text{(angle-compatible でない edge の変形)} \end{array}}$

$(t \leq |\alpha(S')| = |S'|)$

Coxeter 群の同型問題の最近の状況

Problem (Marquis-Mühlherr (2008))

W の Coxeter 系 (W, R) が与えられたとき，(W, R) と angle-compatible な (W, S) をすべて求めよ.

定理 (Marquis-Mühlherr (2008))

この問題が解決すれば，Coxeter 群の同型問題は解決する.

定理 (Caprace-Przytycki (2010))

W の 2 つの angle-compatible な Coxeter 系 (W, S) と (W, S') において，もしも (W, S) に twist がないのなら，$S = wS'w^{-1}$ $(w \in W)$ と表せる.（すなわち (W, S) と (W, S') は同型.）