リーマンスピン多様体上のラリタ・シュインガー作用素の核について

本間泰史 (早稲田理工)

研究集会　第２６回　沼津改め　静岡研究会
– 幾何，数理物理，そして量子論　–

2019/3/06

1. Spin 1/2 geometry

2. Spin 3/2 geometry

U.Semmelmann 氏（Stuttgart 大学）との共同研究
The paper is published in Communications in Mathematical Physics (まだ，online）

スピン幾何学：舞台設定

(M, g): n 次元スピン多様体.

スピン幾何学：舞台設定

(M, g): n 次元スピン多様体.
$\mathbf{S}_{1/2}$: M 上のスピノール束.
i.e. 各ファイバーがスピノール空間 $W_{1/2} \curvearrowleft \mathrm{Spin}(n)$.
highest weight は $(1/2, \ldots, \pm 1/2)$.

スピン幾何学：舞台設定

(M, g): n 次元スピン多様体.
$\mathbf{S}_{1/2}$: M 上のスピノール束.
i.e. 各ファイバーがスピノール空間 $W_{1/2} \curvearrowleft \mathrm{Spin}(n)$.
highest weight は $(1/2, \dots, \pm 1/2)$.
$\Gamma(M, \mathbf{S}_{1/2})$：スピノール場全体（$\mathbf{S}_{1/2}$ の滑らかな切断の全体）

スピン幾何学：舞台設定

(M, g): n 次元スピン多様体.
$S_{1/2}$: M 上のスピノール束.
i.e. 各ファイバーがスピノール空間 $W_{1/2} \curvearrowleft \mathrm{Spin}(n)$.
highest weight は $(1/2, \ldots, \pm 1/2)$.
$\Gamma(M, S_{1/2})$：スピノール場全体（$S_{1/2}$ の滑らかな切断の全体）

$$\nabla : \Gamma(S_{1/2}) \to \Gamma(S_{1/2} \otimes T^*(M)) \quad (\text{共変微分 from LC 接続})$$

スピン幾何学：舞台設定

(M, g): n 次元スピン多様体.
$S_{1/2}$: M 上のスピノール束.
i.e. 各ファイバーがスピノール空間 $W_{1/2} \curvearrowleft \mathrm{Spin}(n)$.
highest weight は $(1/2, \dots, \pm 1/2)$.
$\Gamma(M, S_{1/2})$：スピノール場全体（$S_{1/2}$ の滑らかな切断の全体）

$$\nabla : \Gamma(S_{1/2}) \to \Gamma(S_{1/2} \otimes T^*(M)) \quad (\text{共変微分 from LC 接続})$$

各ファイバーを $\mathrm{Spin}(n)$ について分解 → ベクトル束としての分解

スピン幾何学：舞台設定

(M, g): n 次元スピン多様体.
$S_{1/2}$: M 上のスピノール束.
i.e. 各ファイバーがスピノール空間 $W_{1/2} \curvearrowleft \mathrm{Spin}(n)$.
highest weight は $(1/2, \ldots, \pm 1/2)$.
$\Gamma(M, S_{1/2})$：スピノール場全体（$S_{1/2}$ の滑らかな切断の全体）

$$\nabla : \Gamma(S_{1/2}) \to \Gamma(S_{1/2} \otimes T^*(M)) \quad (\text{共変微分 from LC 接続})$$

各ファイバーを $\mathrm{Spin}(n)$ について分解 → ベクトル束としての分解

$$S_{1/2} \otimes T^*(M) \cong S_{1/2} \otimes T(M) \cong S_{1/2} \oplus S_{3/2},$$
$$(1/2, \cdots, 1/2) \otimes (1, 0, \cdots, 0) = (1/2, \cdots, 1/2) \oplus (3/2, 1/2, \cdots .1/2)$$

ディラック作用素と特殊スピノール

ディラック作用素とペンローース（ツイスター）作用素

$$D : \Gamma(S_{1/2}) \xrightarrow{\Pi_{1/2}\circ\nabla} \Gamma(M, S_{1/2}), \qquad \Pi_{1/2} : S_{1/2} \otimes T(M) \to S_{1/2}$$

$$\text{where} \qquad \Pi_{1/2}(\phi \otimes v) = v \cdot \phi$$

$$P : \Gamma(S_{1/2}) \xrightarrow{\Pi_{3/2}\circ\nabla} \Gamma(M, S_{3/2}), \qquad \Pi_{3/2} : S_{1/2} \otimes T(M) \to S_{3/2}$$

ディラック作用素と特殊スピノール

ディラック作用素とペンローズ（ツイスター）作用素

$$D : \Gamma(S_{1/2}) \xrightarrow{\Pi_{1/2}\circ\nabla} \Gamma(M, S_{1/2}), \qquad \Pi_{1/2} : S_{1/2} \otimes T(M) \to S_{1/2}$$

$$\text{where} \qquad \Pi_{1/2}(\phi \otimes v) = v \cdot \phi$$

$$P : \Gamma(S_{1/2}) \xrightarrow{\Pi_{3/2}\circ\nabla} \Gamma(M, S_{3/2}), \qquad \Pi_{3/2} : S_{1/2} \otimes T(M) \to S_{3/2}$$

調和スピノール

$D\phi = 0$ となるスピノール場 ϕ.

ディラック作用素と特殊スピノール

ディラック作用素とペンローズ（ツイスター）作用素

$$D : \Gamma(S_{1/2}) \xrightarrow{\Pi_{1/2}\circ\nabla} \Gamma(M, S_{1/2}), \qquad \Pi_{1/2} : S_{1/2} \otimes T(M) \to S_{1/2}$$

$$\text{where} \qquad \Pi_{1/2}(\phi \otimes v) = v \cdot \phi$$

$$P : \Gamma(S_{1/2}) \xrightarrow{\Pi_{3/2}\circ\nabla} \Gamma(M, S_{3/2}), \qquad \Pi_{3/2} : S_{1/2} \otimes T(M) \to S_{3/2}$$

調和スピノール

$D\phi = 0$ となるスピノール場 ϕ.

平行スピノール

$\nabla\phi = 0$ となるスピノール場 ϕ. ($\ker \nabla = \ker D \cap \ker P$)

調和スピノールと消滅定理

リヒネロビッツ公式とアティヤ-シンガー指数定理
(for **dim** M =even)

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}\mathrm{Scal}, \qquad \dim\ker D^+ - \dim\ker D^- = \hat{A}(M)$$

調和スピノールと消滅定理

リヒネロビッツ公式とアティヤ-シンガー指数定理
(for **dim** M =even)

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}\mathrm{Scal}, \qquad \dim\ker D^+ - \dim\ker D^- = \hat{A}(M)$$

消滅定理 **for** D： コンパクトスピン多様体上で,

$$\mathrm{Scal} > 0 \Rightarrow \ker D = \{0\} \Rightarrow \hat{A}(M) = 0$$

調和スピノールと消滅定理

リヒネロビッツ公式とアティヤ-シンガー指数定理
(for **dim** M =even)

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}\mathrm{Scal}, \qquad \dim\ker D^+ - \dim\ker D^- = \hat{A}(M)$$

消滅定理 **for** D： コンパクトスピン多様体上で,

$$\mathrm{Scal} > 0 \Rightarrow \ker D = \{0\} \Rightarrow \hat{A}(M) = 0$$

例：正のアインシュタイン多様体 (例：コンパクト型対称空間, 正四元数ケーラー) なら調和スピノール（$\neq 0$）は存在しない.

調和スピノールと消滅定理

リヒネロビッツ公式とアティヤ-シンガー指数定理
(for **dim** M =even)

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}\mathrm{Scal}, \qquad \dim\ker D^+ - \dim\ker D^- = \hat{A}(M)$$

消滅定理 for D： コンパクトスピン多様体上で,

$$\mathrm{Scal} > 0 \Rightarrow \ker D = \{0\} \Rightarrow \hat{A}(M) = 0$$

例：正のアインシュタイン多様体 (例：コンパクト型対称空間, 正四元数ケーラー) なら調和スピノール（$\neq 0$）は存在しない.
Rem：正のスカラー曲率をもつ計量の存在のための位相的な条件.

調和スピノールと消滅定理

リヒネロビッツ公式とアティヤ-シンガー指数定理
(for **dim** M =even)

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}\mathrm{Scal}, \qquad \dim\ker D^+ - \dim\ker D^- = \hat{A}(M)$$

消滅定理 **for** D ： コンパクトスピン多様体上で,

$$\mathrm{Scal} > 0 \Rightarrow \ker D = \{0\} \Rightarrow \hat{A}(M) = 0$$

例：正のアインシュタイン多様体 (例：コンパクト型対称空間, 正四元数ケーラー) なら調和スピノール（$\neq 0$）は存在しない.
Rem：正のスカラー曲率をもつ計量の存在のための位相的な条件.
Rem：$\dim\ker D = \dim\ker D^+ + \dim\ker D^- \geq |\hat{A}(M)|$.

平行スピノールと幾何構造

平行スピノールが存在 $\Rightarrow (M, g)$ はリッチ平坦
ベルジェの分類よりホロノミー群は $\mathrm{SU}(k), \mathrm{Sp}(l), \mathrm{G}_2, \mathrm{Spin}(7)$.

平行スピノールと幾何構造

平行スピノールが存在 $\Rightarrow$ (M,g) はリッチ平坦
ベルジェの分類よりホロノミー群は $\mathrm{SU}(k), \mathrm{Sp}(l), \mathrm{G}_2, \mathrm{Spin}(7)$.

Theorem (分類定理 by Wang1989)

(M,g) を完備単連結既約スピン多様体で平行スピノール場．このとき，(M,g) はリッチ平坦で次のいずれかである：

$\mathcal{N}_{(\pm)} := \dim\{\phi \in \Gamma(S_{1/2}^{(\pm)}) | \nabla\phi = 0\}$

$n = \dim M$	$\mathrm{Hol}(M)$	幾何構造	$\mathcal{N}$ or $(\mathcal{N}_+, \mathcal{N}_-)$
$4k$	$\mathrm{SU}(2k)$	*Calabi-Yau*	$(2,0)$
$4k+2$	$\mathrm{SU}(2k+1)$	*Calabi-Yau*	$(1,1)$
$4k$	$\mathrm{Sp}(k)$	*hyperKähler*	$(k+1,0)$
7	G_2	G_2	1
8	$\mathrm{Spin}(7)$	$\mathrm{Spin}(7)$	$(1,0)$

補足（キリングスピノール場）: $\ker P$ の特別な解 $\nabla_X\phi = cX\cdot\phi$（$\forall X\in TM$, $\exists c\in\mathbb{C}$）
キリングスピノール場 $\Rightarrow (M,g)$Einstein（$c=0$ ならリッチ平坦）
$(M,g)\to$ リーマン錘 $\overline{M}\Rightarrow$ キリング場 $\to$ 平行場.

Theorem (Bär 1993)

(M,g) *as above* かつ実キリングスピノール場をもつなら，次のいずれか：

$n=\dim M$	$Hol(\overline{M})$	幾何構造	(K_+,K_-)
n	$\{1\}$	$M=S^n$	$(2^{[n/2]},2^{[n/2]})$
$4k-1$	$\mathrm{SU}(2k)$	*Sasaki-Einstein*	$(2,0)$
$4k+1$	$\mathrm{SU}(2k+1)$	*Sasaki-Einstein*	$(1,1)$
$4k-1$	$\mathrm{Sp}(k)$	3-*Sasaki*	$(k+1,0)$
6	G_2	*nearly-Kälher*	$(1,1)$
7	$\mathrm{Spin}(7)$	*nearly-*平行 G_2	$(1,0)$
7	$\mathrm{SU}(4)$	*Saaski-Eeinstein*	$(2,0)$
7	$\mathrm{Sp}(2)$	3-*Sasaki*	$(3,0)$

スピン 3/2 へ：ラリタ・シュインガー作用素

(M, g)：n 次元スピン多様体
$W_{3/2}$：$\mathrm{Spin}(n)$ の既約表現空間．h.w は $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \pm\frac{1}{2})$.
$S_{3/2}$：スピン 3/2-スピノール束（ファイバーが $W_{3/2}$).
（局所的に）$\dim M = even$ なら，$S_{3/2} = S^{+}_{3/2} \oplus S^{-}_{3/2}$）.

スピン 3/2 へ：ラリタ・シュインガー作用素

(M, g)：n 次元スピン多様体
$W_{3/2}$：$\mathrm{Spin}(n)$ の既約表現空間．h.w は $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \pm\frac{1}{2})$.
$S_{3/2}$：スピン 3/2-スピノール束（ファイバーが $W_{3/2}$).
（局所的に）$\dim M = even$ なら，$S_{3/2} = S^{+}_{3/2} \oplus S^{-}_{3/2}$）.

スピン 3/2 へ：ラリタ・シュインガー作用素

(M, g)：n 次元スピン多様体
$W_{3/2}$：$\mathrm{Spin}(n)$ の既約表現空間．h.w は $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \pm\frac{1}{2})$.
$S_{3/2}$：スピン 3/2-スピノール束（ファイバーが $W_{3/2}$).
（局所的に）$\dim M = even$ なら，$S_{3/2} = S^{+}_{3/2} \oplus S^{-}_{3/2}$）.
$S_{3/2}$ での 1 階微分作用素（generalized gradients）を定義しよう.

$$\Gamma(S_{3/2}) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(S_{3/2} \otimes T^*(M)) \xrightarrow{\Pi} \Gamma(S_{irr-comp})$$
$$S_{3/2} \otimes T(M) = S_{1/2} \oplus S_{3/2} \oplus S_{3/2,3/2} \oplus S_{5/2}$$

スピン 3/2 へ：ラリタ・シュインガー作用素

定義：ラリタ-シュインガー作用素 (Rarita-Schwinger)

$$Q : \Gamma(S_{3/2}) \xrightarrow{\Pi_{3/2}\circ\nabla} \Gamma(S_{3/2}),$$ ラリタ-シュインガー作用素

$$P^* : \Gamma(S_{3/2}) \xrightarrow{\Pi_{1/2}\circ\nabla} \Gamma(S_{1/2})$$ ペンローズ作用素の随伴

スピン 3/2 へ：ラリタ・シュインガー作用素

定義：ラリタ-シュインガー作用素 (Rarita-Schwinger)

$$Q : \Gamma(S_{3/2}) \xrightarrow{\Pi_{3/2} \circ \nabla} \Gamma(S_{3/2}),$$ ラリタ-シュインガー作用素

$$P^* : \Gamma(S_{3/2}) \xrightarrow{\Pi_{1/2} \circ \nabla} \Gamma(S_{1/2})$$ ペンローズ作用素の随伴

or （捩れ）ディラック作用素 D_{TM} on $S_{1/2} \otimes TM = S_{1/2} \oplus S_{3/2}$

$$D_{TM} = \begin{pmatrix} \frac{2-n}{n} D & 2P^* \\ \frac{2}{n} P & Q \end{pmatrix} : S_{1/2} \oplus S_{3/2} \to S_{1/2} \oplus S_{3/2}.$$

スピン 3/2 へ：ラリタ・シュインガー作用素

定義：ラリタ-シュインガー作用素 (Rarita-Schwinger)

$$Q : \Gamma(S_{3/2}) \xrightarrow{\Pi_{3/2}\circ\nabla} \Gamma(S_{3/2}),\quad \text{ラリタ-シュインガー作用素}$$

$$P^* : \Gamma(S_{3/2}) \xrightarrow{\Pi_{1/2}\circ\nabla} \Gamma(S_{1/2})\quad \text{ペンローズ作用素の随伴}$$

or （捩れ）ディラック作用素 D_{TM} on $S_{1/2} \otimes TM = S_{1/2} \oplus S_{3/2}$

$$D_{TM} = \begin{pmatrix} \frac{2-n}{n} D & 2P^* \\ \frac{2}{n} P & \underline{Q} \end{pmatrix} : S_{1/2} \oplus S_{3/2} \to S_{1/2} \oplus S_{3/2}.$$

ラリタ-シュインガー場と平行 RS 場

スピン 3/2 のスピノール場 $\phi \in \Gamma(S_{3/2})$ が $\phi \in \ker Q \cap \ker P^*$ となるとき RS 場という． $\phi \in \ker \nabla$ のとき平行 RS 場．

スピン 3/2 へ：ラリタ・シュインガー作用素

定義：ラリタ-シュインガー作用素 (Rarita-Schwinger)

$$Q : \Gamma(S_{3/2}) \xrightarrow{\Pi_{3/2}\circ\nabla} \Gamma(S_{3/2}),$$ ラリタ-シュインガー作用素

$$P^* : \Gamma(S_{3/2}) \xrightarrow{\Pi_{1/2}\circ\nabla} \Gamma(S_{1/2})$$ ペンローズ作用素の随伴

or （捩れ）ディラック作用素 D_{TM} on $S_{1/2} \otimes TM = S_{1/2} \oplus S_{3/2}$

$$D_{TM} = \begin{pmatrix} \frac{2-n}{n} D & 2P^* \\ \frac{2}{n} P & \underline{Q} \end{pmatrix} : S_{1/2} \oplus S_{3/2} \to S_{1/2} \oplus S_{3/2}.$$

ラリタ-シュインガー場と平行 RS 場

スピン 3/2 のスピノール場 $\phi \in \Gamma(S_{3/2})$ が $\phi \in \ker Q \cap \ker P^*$ となるとき RS 場という． $\phi \in \ker \nabla$ のとき平行 RS 場．

Rem: $\ker \nabla = \ker Q \cap \ker P^* \cap \ker \exists D_{3/2,3/2} \cap \ker \exists D_{5/2}$.

RS 場 in 物理学

物理では,

- 1941 年に Rartia と Schwinger により定義される.

RS 場 in 物理学

物理では，

- 1941 年に Rartia と Schwinger により定義される．
- 重力子（重力波を媒介する粒子．スピン２．未発見）の超対称パートナーであるグラビティーノ（未発見）を記述．

RS 場 in 物理学

物理では,

- 1941 年に Rartia と Schwinger により定義される.
- 重力子（重力波を媒介する粒子．スピン２．未発見）の超対称パートナーであるグラビティーノ（未発見）を記述.
- Witten（1985) の重力アノマリー理論：Dirac 作用素や RS 作用素の index が鍵．$Scal > 0$ なら $\mathrm{ind}D = 0$ であるが, $\mathrm{ind}Q = 0$（or $\mathrm{ind}D_{TM} = 0$）とは限らない.

RS 場 in 物理学

物理では，

- 1941 年に Rartia と Schwinger により定義される．
- 重力子（重力波を媒介する粒子．スピン２．未発見）の超対称パートナーであるグラビティーノ（未発見）を記述．
- Witten（1985) の重力アノマリー理論：Dirac 作用素や RS 作用素の index が鍵．$Scal > 0$ なら $\mathrm{ind}D = 0$ であるが，$\mathrm{ind}Q = 0$（or $\mathrm{ind}D_{TM} = 0$）とは限らない．
  楕円種数と量子場理論（1987)：コンパクトスピン等質多様体 M の楕円種数は rigid である．よって，$n \geq 12$ なら $indQ_M = 0$.

RS 場 in 物理学

物理では,

- 1941 年に Rartia と Schwinger により定義される.
- 重力子（重力波を媒介する粒子．スピン２．未発見）の超対称パートナーであるグラビティーノ（未発見）を記述.
- Witten（1985) の重力アノマリー理論：Dirac 作用素や RS 作用素の index が鍵．$Scal > 0$ なら $\mathrm{ind}D = 0$ であるが, $\mathrm{ind}Q = 0$（or $\mathrm{ind}D_{TM} = 0$）とは限らない.
  楕円種数と量子場理論（1987)：コンパクトスピン等質多様体 M の楕円種数は rigid である．よって，$n \geq 12$ なら $indQ_M = 0$.
- Penrose（1992），Mason（1999）：Einstein 方程式をツイスター理論で解く
- その他たくさん

RS 場 in 数学

数学では，

- Wang（1991）：キリングスピノール場の変形（アインシュタイン変形）の記述．その後，リッチ平坦計量の変形理論へ．

RS 場 in 数学

数学では，

- Wang（1991）：キリングスピノール場の変形（アインシュタイン変形）の記述．その後，リッチ平坦計量の変形理論へ．
- Hitchin（2000）,Witt（2008），Salamon (2016)：8 次元の特殊幾何（$\mathbf{PSU(3)}$ 構造，$\mathbf{Sp(1)Sp(2)}$ 構造）で登場

RS 場 in 数学

数学では，

- Wang（1991）：キリングスピノール場の変形（アインシュタイン変形）の記述．その後，リッチ平坦計量の変形理論へ．
- Hitchin（2000）,Witt（2008），Salamon (2016)：8 次元の特殊幾何（$\mathbf{PSU(3)}$ 構造，$\mathbf{Sp(1)Sp(2)}$ 構造）で登場
- クリフォード解析：$\mathbb{R}^n$ 上の調和スピノール多項式解（球面調和関数の一般化）．スピン 3/2 調和スピノール多項式解へ（2000〜by Sommen, Soucek, Eelbode）

RS 場 in 数学

数学では，

- Wang（1991）：キリングスピノール場の変形（アインシュタイン変形）の記述．その後，リッチ平坦計量の変形理論へ．
- Hitchin（2000）,Witt（2008），Salamon (2016)：8 次元の特殊幾何（$\mathbf{PSU(3)}$ 構造，$\mathbf{Sp(1)Sp(2)}$ 構造）で登場
- クリフォード解析：$\mathbb{R}^n$ 上の調和スピノール多項式解（球面調和関数の一般化）．スピン 3/2 調和スピノール多項式解へ（2000〜by Sommen, Soucek, Eelbode）
- 物理で見かける割には，幾何ではあまり見かけない．

Questions (Toward to spin 3/2 geometry)

- ワイゼンベック公式（リヒネロビッツ公式 for スピン 3/2）とラリタシュインガー場に対する消滅定理
- ラリタシュインガー場や平行 RS 場と幾何構造の関係.
- 平行 RS 場をもつスピン多様体の分類など.

ワイゼンベック公式

ワイゼンベック公式（Wang 1991，Homma 2016）

$$Q^2 + \frac{4}{n}PP^* = \Delta_{3/2} + \frac{1}{8}\mathrm{Scal} - \mathrm{Ric}^{3/2} : \Gamma(S_{3/2}) \to \Gamma(S_{3/2})$$
$$QP - \frac{n-2}{n}PD = (\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{Scal}}{n}g) : \Gamma(S_{1/2}) \to \Gamma(S_{3/2})$$
$$P^*Q - \frac{n-2}{n}DP^* = (\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{Scal}}{n}g)^* : \Gamma(S_{3/2}) \to \Gamma(S_{1/2})$$

Key: 標準ラプラシアン（Semmelmann-Weingart 2018） (Not consider $\nabla^*\nabla$）

$$\Delta_{3/2} := \nabla^*\nabla + q(R) \qquad (q(R) \text{ 曲率変換})$$

Rem: 対称空間上なら $\Delta_{3/2}$ はカシミール作用素.

ワイゼンベック公式の証明

D_{TM} の二乗を考える！ on $S_{1/2} \otimes TM = S_{1/2} \oplus S_{3/2}$

$$(D_{TM})^2 = \Delta + \frac{1}{8}\mathrm{Scal} - \frac{1}{2}\mathrm{id}\otimes\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} \Delta + \frac{n-8}{8n}\mathrm{Scal} & (Ric - \frac{\mathrm{Scal}}{n}g)^* \\ Ric - \frac{\mathrm{Scal}}{n}g & \Delta + \frac{\mathrm{Scal}}{8} - Ric^{3/2} \end{pmatrix}$$

Recall

$$D_{TM} = \begin{pmatrix} \frac{2-n}{n}D & 2P^* \\ \frac{2}{n}P & Q \end{pmatrix}$$

$\mathbf{2 \times 2}$ 行列で書いて対角成分を見ると,

2×2 行列で書いて対角成分を見ると,

$$\frac{(2-n)^2}{n^2}D^2 + \frac{4}{n}P^*P = \Delta_{1/2} + \frac{n-8}{8n}\mathrm{Scal}$$
$$Q^2 + \frac{4}{n}PP^* = \Delta_{3/2} + \frac{1}{8}\mathrm{Scal} - \mathrm{Ric}^{3/2}$$

非対角成分を見ると，他のワイゼンベック公式.

$$QP - \frac{n-2}{n}PD = (\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{Scal}}{n}g), \quad P^*Q - \frac{n-2}{n}DP^* = (\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{Scal}}{n}g)^*$$

2 × 2 行列で書いて対角成分を見ると，

$$\frac{(2-n)^2}{n^2}D^2 + \frac{4}{n}P^*P = \Delta_{1/2} + \frac{n-8}{8n}\mathrm{Scal}$$

$$Q^2 + \frac{4}{n}PP^* = \Delta_{3/2} + \frac{1}{8}\mathrm{Scal} - \mathrm{Ric}^{3/2}$$

非対角成分を見ると，他のワイゼンベック公式.

$$QP - \frac{n-2}{n}PD = (\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{Scal}}{n}g), \quad P^*Q - \frac{n-2}{n}DP^* = (\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{Scal}}{n}g)^*$$

さらに D_{TM} の３乗を考える！

2×2 行列で書いて対角成分を見ると,

$$\frac{(2-n)^2}{n^2} D^2 + \frac{4}{n} P^* P = \Delta_{1/2} + \frac{n-8}{8n} \mathrm{Scal}$$

$$Q^2 + \frac{4}{n} PP^* = \Delta_{3/2} + \frac{1}{8} \mathrm{Scal} - \mathrm{Ric}^{3/2}$$

非対角成分を見ると，他のワイゼンベック公式.

$$QP - \frac{n-2}{n} PD = (\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{Scal}}{n} g), \quad P^* Q - \frac{n-2}{n} DP^* = (\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{Scal}}{n} g)^*$$

さらに D_{TM} の３乗を考える！$(D_{TM})^2 D_{TM} = D_{TM}(D_{TM})^2$ より,
$\nabla \mathrm{Ric} = 0$ なら,

$$Q\Delta_{3/2} = \Delta_{3/2} Q, \quad P\Delta_{1/2} = \Delta_{3/2} P, \quad P^* \Delta_{3/2} = \Delta_{3/2} P^*$$

（一般論：Y.Homma (2016))

アインシュタイン多様体上での RS 場

Proposition (系：H-S 2018)

(M, g)：コンパクトなアインシュタイン・スピン多様体上で

- $\Gamma(S_{3/2}) = \ker P^* \oplus \mathrm{Im} P$ *(by* P^*P が楕円型），

アインシュタイン多様体上での RS 場

Proposition (系：H-S 2018)

(M, g)：コンパクトなアインシュタイン・スピン多様体上で

- $\Gamma(S_{3/2}) = \ker P^* \oplus \mathrm{Im} P$ (by $P^* P$ が楕円型)，
- $\Delta_{3/2} P = P \Delta_{1/2}$，$P^* \Delta_{3/2} = \Delta_{3/2} P^*$，$Q \Delta_{3/2} = \Delta_{3/2} Q$

アインシュタイン多様体上での RS 場

Proposition (系：H-S 2018)

(M, g)：コンパクトなアインシュタイン・スピン多様体上で

- $\Gamma(S_{3/2}) = \ker P^* \oplus \mathrm{Im} P$ (by $P^* P$ が楕円型)，
- $\Delta_{3/2} P = P \Delta_{1/2}$，$P^* \Delta_{3/2} = \Delta_{3/2} P^*$，$Q \Delta_{3/2} = \Delta_{3/2} Q$
- $$Q^2 = \begin{cases} \Delta_{3/2} + \frac{n-8}{8n}\mathrm{Scal} & \ker P^* \to \ker P^* \\ \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 \left(\Delta_{3/2} + \frac{1}{8}\mathrm{Scal}\right) & ImP \to ImP \end{cases}$$

アインシュタイン多様体上での RS 場

Proposition (系：H-S 2018)

(M, g)：コンパクトなアインシュタイン・スピン多様体上で

- $\Gamma(S_{3/2}) = \ker P^* \oplus \mathrm{Im} P$ (by P^*P が楕円型)，
- $\Delta_{3/2} P = P \Delta_{1/2}$，$P^* \Delta_{3/2} = \Delta_{3/2} P^*$，$Q \Delta_{3/2} = \Delta_{3/2} Q$
- $$Q^2 = \begin{cases} \Delta_{3/2} + \frac{n-8}{8n} \mathrm{Scal} & \ker P^* \to \ker P^* \\ (\frac{n-2}{n})^2 (\Delta_{3/2} + \frac{1}{8} \mathrm{Scal}) & ImP \to ImP \end{cases}$$
- $\mathrm{Scal} \geq 0 \Rightarrow \ker Q = \ker Q \cap \ker P^* = \{RS \text{ 場}\}$.

アインシュタイン多様体上での RS 場

Proposition (系：H-S 2018)

(M, g)：コンパクトなアインシュタイン・スピン多様体上で

- $\Gamma(S_{3/2}) = \ker P^* \oplus \mathrm{Im} P$ (by $P^* P$ が楕円型)，
- $\Delta_{3/2} P = P \Delta_{1/2}$，$P^* \Delta_{3/2} = \Delta_{3/2} P^*$，$Q \Delta_{3/2} = \Delta_{3/2} Q$
- $$Q^2 = \begin{cases} \Delta_{3/2} + \frac{n-8}{8n}\mathrm{Scal} & \ker P^* \to \ker P^* \\ (\frac{n-2}{n})^2 (\Delta_{3/2} + \frac{1}{8}\mathrm{Scal}) & ImP \to ImP \end{cases}$$
- $\mathrm{Scal} \geq 0 \Rightarrow \ker Q = \ker Q \cap \ker P^* = \{RS\text{ 場}\}$.
- コンパクトを仮定しなくても，

$$(Q^2 - (\frac{n-2}{n})^2 (\Delta_{3/2} + \frac{1}{8}\mathrm{Scal}))(Q^2 - (\Delta_{3/2} + \frac{n-8}{8n}\mathrm{Scal})) = 0$$

（Q は $(\Delta_{3/2})^2$ の根である．$\mathbb{R}^n$ 上では知られていた）

RS 場の消滅定理・幾何構造との関係

(M, g)：アインシュタインスピン多様体 with $Scal \geq 0$ とする．

$$Q^2 = \Delta_{3/2} + \frac{n-8}{8n}\mathrm{Scal} \quad \text{on } \ker P^*, \qquad (\ker Q \cap Im\ P = \{0\})$$

- $\Delta_{3/2} = \nabla^*\nabla + q(R) \geq 0$ は言えない！（反例：あるケーラー・アインシュタイン多様体）．よって，スピン 1/2 幾何と違い，$n > 8$ かつ $\mathrm{Scal} > 0$ としても消滅定理は不成立！（Ref:Witten 1985）

RS 場の消滅定理・幾何構造との関係

(M, g)：アインシュタインスピン多様体 with $Scal \geq 0$ とする．

$$Q^2 = \Delta_{3/2} + \frac{n-8}{8n}\mathrm{Scal} \quad \text{on } \ker P^*, \qquad (\ker Q \cap Im\ P = \{0\})$$

- $\Delta_{3/2} = \nabla^*\nabla + q(R) \geq 0$ は言えない！（反例：あるケーラー・アインシュタイン多様体）．よって，スピン 1/2 幾何と違い，$n > 8$ かつ $\mathrm{Scal} > 0$ としても消滅定理は不成立！（Ref:Witten 1985）
- (M, g) に幾何構造を仮定して（対称空間，四元数ケーラー，カラビ-ヤウ，超ケーラー，$\mathrm{Spin}(7)$．G_2），RS 場の次元をもとめよう！
- 平行 RS 場もつ多様体も分類できる．

指数定理と応用

指数定理を用いて，消滅定理に対する反例を作ろう.

Proposition (指数定理)

$$\mathrm{ind}Q = \hat{A}(M) + \int_M \hat{\mathbb{A}}(M)ch(TM^c), \quad (\dim M = 4k)$$

低い次元なら $\hat{A}(M)$ と $\sigma(M)$ で書ける.

$$19\sigma(M)/8 \ (n=4), \quad \hat{A}(M) - \sigma(M) \ (n=8)$$
$$5\hat{A}(M) + \sigma(M)/8 \ (n=12)$$

指数定理と応用

指数定理を用いて，消滅定理に対する反例を作ろう．

Proposition (指数定理)

$$\mathrm{ind}Q = \hat{A}(M) + \int_M \hat{\mathbb{A}}(M)ch(TM^c), \quad (\dim M = 4k)$$

低い次元なら $\hat{A}(M)$ と $\sigma(M)$ で書ける．

$$19\sigma(M)/8 \ (n = 4), \quad \hat{A}(M) - \sigma(M) \ (n = 8)$$
$$5\hat{A}(M) + \sigma(M)/8 \ (n = 12)$$

proof

$$S^{\pm}_{1/2} \otimes TM = S^{\pm}_{3/2} \oplus S^{\mp}_{1/2} \to \mathrm{ind}D_{TM} = \mathrm{ind}Q - \mathrm{ind}D$$

$$\mathrm{ind}D_{TM} = \int_M \hat{\mathbb{A}}(M)ch(TM^c)$$

指数定理と応用

$X_m(d) \subset \mathbb{C}P^{m+1}$：$d$ 次斉次多項式の超曲面（フェルマー曲面）

応用

$X_6(4)$, $X_6(6)$ ($\underline{\dim M = 12}$)：ケーラー-アインシュタイン計量 with $\mathrm{Scal} > 0$ が入る（by Tian,1987）.

指数定理と応用

$X_m(d) \subset \mathbb{C}P^{m+1}$：$d$ 次斉次多項式の超曲面（フェルマー曲面）

応用

$X_6(4)$, $X_6(6)$ ($\underline{\dim M = 12}$)：ケーラー-アインシュタイン計量 with $\mathrm{Scal} > 0$ が入る（by Tian,1987）.

$\hat{A}(M) = 0$ かつ $\sigma(M) \neq 0$（by ヒルツェブルフ「代数幾何における位相的方法」）.

指数定理と応用

$X_m(d) \subset \mathbb{C}P^{m+1}$：$d$ 次斉次多項式の超曲面（フェルマー曲面）

応用

$X_6(4)$, $X_6(6)$ ($\underline{\dim M = 12}$)：ケーラー-アインシュタイン計量 with $\mathrm{Scal} > 0$ が入る（by Tian,1987）.

$\hat{A}(M) = 0$ かつ $\sigma(M) \neq 0$（by ヒルツェブルフ「代数幾何における位相的方法」）.

特に，$\dim RS \geq |\mathrm{ind}\, Q| > 0$．よって一般には消滅定理は不成立!

指数定理と応用

$X_m(d) \subset \mathbb{C}P^{m+1}$：$d$ 次斉次多項式の超曲面（フェルマー曲面）

応用

$X_6(4)$, $X_6(6)$ ($\underline{\dim M = 12}$)：ケーラー-アインシュタイン計量 with $\mathrm{Scal} > 0$ が入る（by Tian,1987）.

$\hat{A}(M) = 0$ かつ $\sigma(M) \neq 0$（by ヒルツェブルフ「代数幾何における位相的方法」）.

特に，$\dim RS \geq |\mathrm{ind}\, Q| > 0$．よって一般には消滅定理は不成立!

Rem：負のケーラーアインシュタイン多様体上でも，同様の手法で $\dim RS \neq 0$ となる例を構成できる.

指数定理と応用

$X_m(d) \subset \mathbb{C}P^{m+1}$：$d$ 次斉次多項式の超曲面（フェルマー曲面）

応用

$X_6(4)$, $X_6(6)$ ($\underline{\dim M = 12}$)：ケーラー-アインシュタイン計量 with $\mathrm{Scal} > 0$ が入る（by Tian,1987）.

$\hat{A}(M) = 0$ かつ $\sigma(M) \neq 0$（by ヒルツェブルフ「代数幾何における位相的方法」）.

特に，$\dim RS \geq |\mathrm{ind}\, Q| > 0$. よって一般には消滅定理は不成立!

Rem：負のケーラーアインシュタイン多様体上でも，同様の手法で $\dim RS \neq 0$ となる例を構成できる.

Rem: $M = T^2 \times N^6$（N^6 は nilmanifold）は，**non Einstein** な調和 $\mathrm{Sp}(1)\mathrm{Sp}(2)$ 構造をもつ（by Salamon 2000）. $\mathrm{ind}\, Q = 0$ であるが，$\dim RS \neq 0$ の例. (Non Einsterin-case は難）

コンパクト対称空間上の RS 場

(M, g)：コンパクト型対称空間（よってアインシュタイン）

コンパクト対称空間上の RS 場

(M, g)：コンパクト型対称空間（よってアインシュタイン）
$\Delta_{3/2}$ はカシミール作用素となる．特に，$\Delta_{3/2} \geq 0$.

コンパクト対称空間上の RS 場

(M, g)：コンパクト型対称空間（よってアインシュタイン）
$\Delta_{3/2}$ はカシミール作用素となる．特に，$\Delta_{3/2} \geq 0$.
消滅定理：$\dim M > 8$ なら $\ker Q = \{0\}$（by $Q^2 = \Delta + \frac{n-8}{8}\mathrm{Scal}$）
$\dim M \leq 8$ なら，$\ker Q$ を直接計算（by 分規則など）.

コンパクト対称空間上の RS 場

(M, g)：コンパクト型対称空間（よってアインシュタイン）
$\Delta_{3/2}$ はカシミール作用素となる．特に，$\Delta_{3/2} \geq 0$.
消滅定理：$\dim M > 8$ なら $\ker Q = \{0\}$（by $Q^2 = \Delta + \frac{n-8}{8}\mathrm{Scal}$）
$\dim M \leq 8$ なら，$\ker Q$ を直接計算（by 分規則など）.

Theorem (HS2018)

コンパクト型既約対称空間で *RS* 場（$\neq 0$）をもつなら，次のいずれかである

- $Gr_2(\mathbb{C}^4)$, $\mathbb{H}P^2$, $\mathrm{G}_2/\mathrm{SO}(4)$ *(四元数ケーラー構造)*
- $\mathrm{SU}(3)$ *($PSU(3)$ 構造)*
- $Q_4 = \frac{\mathrm{SO}(6)}{\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(4)}$ *(KE 構造．複素 2 次超曲面 $\subset \mathbb{C}P^5$).*

また，*RS* 場はすべて平行 *RS* 場（$S_{3/2}$ に自明部分束がある）.

Rem：$\mathrm{Scal} > 0$ なので，$\ker D = \{0\}$．しかし，$\dim \ker Q$ は M の構造に依存.

四元数ケーラー多様体上の RS 場

(M^{4m}, g)：正四元数ケーラー多様体（$Hol(M) = \mathrm{Sp}(1)\mathrm{Sp}(n)$．アインシュタイン）.

四元数ケーラー多様体上の RS 場

(M^{4m}, g)：正四元数ケーラー多様体（$Hol(M) = \mathrm{Sp}(1)\mathrm{Sp}(n)$．アインシュタイン）．$H, E$：$\mathrm{Sp}(1), \mathrm{Sp}(n)$ の自然表現束として，

$$S_{3/2} = S_{1/2} \otimes TM - S_{1/2} = (\oplus_{k=0}^{m} S^{m-k} H \hat{\otimes} \Lambda_0^k E) \otimes (H \hat{\otimes} E) - S_{1/2}$$

$$= \oplus_{d,a,b\,\text{（ある条件）}} S^d H \hat{\otimes} \Lambda_0^{a,b} E$$

ここで，$\Lambda_0^{a,b} E \subset \Lambda_0^a E \otimes \Lambda_0^b E$ はカルタン 直和因子．

四元数ケーラー多様体上の RS 場

(M^{4m}, g)：正四元数ケーラー多様体（$Hol(M) = \mathrm{Sp}(1)\mathrm{Sp}(n)$．アインシュタイン）．$H, E$: $\mathrm{Sp}(1), \mathrm{Sp}(n)$ の自然表現束として，

$$S_{3/2} = S_{1/2} \otimes TM - S_{1/2} = (\oplus_{k=0}^{m} S^{m-k} H \hat{\otimes} \Lambda_0^k E) \otimes (H \hat{\otimes} E) - S_{1/2}$$

$$= \oplus_{d,a,b\,(\text{ある条件})} S^d H \hat{\otimes} \Lambda_0^{a,b} E$$

ここで，$\Lambda_0^{a,b} E \subset \Lambda_0^a E \otimes \Lambda_0^b E$ はカルタン 直和因子．
標準ラプラシアン $\Delta_{3/2}$ の固有値評価（H 2006, S-Weingart 2002),

$$\Delta \geq \frac{\mathrm{Scal}}{8m(m+2)}(d+a-b)(d-a-b+2m+2)$$

（よって，$m = 2$（$Q^2 = \Delta$）かつ $d = 0, a = b$ のとき，
$\ker Q^2 = \ker \Delta$ は非自明かも．

四元数ケーラー多様体上の RS 場

(M^{4m}, g)：正四元数ケーラー多様体（$Hol(M) = \mathrm{Sp}(1)\mathrm{Sp}(n)$．アインシュタイン）．$H, E$: $\mathrm{Sp}(1), \mathrm{Sp}(n)$ の自然表現束として，

$$S_{3/2} = S_{1/2} \otimes TM - S_{1/2} = (\oplus_{k=0}^{m} S^{m-k} H \hat{\otimes} \Lambda_0^k E) \otimes (H \hat{\otimes} E) - S_{1/2}$$

$$= \oplus_{d,a,b\ (\text{ある条件})} S^d H \hat{\otimes} \Lambda_0^{a,b} E$$

ここで，$\Lambda_0^{a,b} E \subset \Lambda_0^a E \otimes \Lambda_0^b E$ はカルタン 直和因子．
標準ラプラシアン $\Delta_{3/2}$ の固有値評価（H 2006, S-Weingart 2002),

$$\Delta \geq \frac{\mathrm{Scal}}{8m(m+2)}(d+a-b)(d-a-b+2m+2)$$

（よって，$m = 2$（$Q^2 = \Delta$）かつ $d = 0, a = b$ のとき，
$\ker Q^2 = \ker \Delta$ は非自明かも．

Theorem (HS2018)

正四元数ケーラー多様体が RS 場をもつのなら，
M は 8 次元であり $Gr_2(\mathbb{C}^4), \mathbb{H}P^2, \mathrm{G}_2/\mathrm{SO}(4)$ のいずれか．

リッチ平坦な場合

ベルジェの分類：(M, g)：単連結既約リーマン多様体なら，M は
対称空間または

$$\mathit{Hol}(M) = \mathrm{SO}(n), \quad U(n), \quad \underline{\mathrm{Sp}(1)\mathrm{Sp}(n)},$$
$$\underline{\mathrm{SU}(n)}, \quad \underline{\mathrm{Sp}(n)}, \quad \underline{\mathrm{G}_2}, \quad \underline{\mathrm{Spin}(7)}$$

以下，リッチ平坦な $\mathrm{G} = \mathrm{SU}(n), \mathrm{Sp}(n), \mathrm{G}_2, \mathrm{Spin}(7)$ を考える．

リッチ平坦な場合

ベルジェの分類：(M, g)：単連結既約リーマン多様体なら，M は対称空間または

$$Hol(M) = \mathrm{SO}(n), \quad U(n), \quad \mathrm{Sp}(1)\mathrm{Sp}(n),$$
$$\mathrm{SU}(n), \quad \mathrm{Sp}(n), \quad \mathrm{G}_2, \quad \mathrm{Spin}(7)$$

以下，リッチ平坦な $\mathrm{G} = \mathrm{SU}(n), \mathrm{Sp}(n), \mathrm{G}_2, \mathrm{Spin}(7)$ を考える．

考察

- $S_{3/2}$ を $Hol(M) = \mathrm{G}$ に関して既約分解すると，各既約成分は $\Lambda^k(M)$ の適当な既約成分に同型．
- 標準ラプラシアン $\Delta_{3/2} = Q^2 + 4PP^*/n$ はホッジ-ラプラス作用素 $\Delta_{3/2} = \Delta = dd^* + d^*d$ に一致
- RS 場は調和微分形式で書ける．

カラビ-ヤウ多様体上の RS 場

(M^{2n}, g)：カラビ-ヤウ多様体（$Hol(M) = \mathrm{SU}(n)$）.

カラビ-ヤウ多様体上の RS 場

(M^{2n}, g)：カラビ-ヤウ多様体（$Hol(M) = \mathrm{SU}(n)$）.

$$S_{1/2} = \oplus_{0\le p\le n}\Lambda^{0,p}, \quad \Lambda^{0,p} = \Lambda^{0,p}(M)$$

$$S_{3/2} = \oplus_{0\le p\le n}(\Lambda^{1,p} \oplus \Lambda^{n-p,1}) - \oplus_{0\le p\le n}\Lambda^{0,p}$$

カラビ-ヤウ多様体上の RS 場

(M^{2n}, g)：カラビ-ヤウ多様体（$Hol(M) = \mathrm{SU}(n)$）.

$$S_{1/2} = \oplus_{0\le p\le n}\Lambda^{0,p}, \quad \Lambda^{0,p} = \Lambda^{0,p}(M)$$

$$\mathrm{S}_{3/2} = \oplus_{0\le p\le n}(\Lambda^{1,p} \oplus \Lambda^{n-p,1}) - \oplus_{0\le p\le n}\Lambda^{0,p}$$

$h^{p,q} := \dim\ker \Delta_{\Lambda^{p,q}}$（ホッジ数）． $h^{q,p} = h^{p,q}$（$U(n)$），
$h^{0,0} = h^{0,n} = 1$（$\mathrm{SU}(n)$）.

カラビ-ヤウ多様体上の RS 場

(M^{2n}, g)：カラビ-ヤウ多様体（$Hol(M) = \mathrm{SU}(n)$）.

$$S_{1/2} = \oplus_{0 \le p \le n} \Lambda^{0,p}, \quad \Lambda^{0,p} = \Lambda^{0,p}(M)$$

$$S_{3/2} = \oplus_{0 \le p \le n}(\Lambda^{1,p} \oplus \Lambda^{n-p,1}) - \oplus_{0 \le p \le n} \Lambda^{0,p}$$

$h^{p,q} := \dim \ker \Delta_{\Lambda^{p,q}}$（ホッジ数）. $h^{q,p} = h^{p,q}$（$U(n)$）,
$h^{0,0} = h^{0,n} = 1$（$\mathrm{SU}(n)$）.

Theorem (HS2018)

(M^{2n}, g) をコンパクトカラビ-ヤウ多様体とすれば,

$$\dim \ker Q = -2 + 2 \sum_{1 \le p \le n-1} h^{1,p}, \quad \mathrm{ind} Q = 2 + 2 \sum_{1 \le p \le n-1} (-1)^p h^{1,p}$$

例：$n = 2$. $K3$ 曲面では $\dim \ker Q = -2 + 2h^{1,1} = 38 \neq 0$.
例：$n = 3$.
$\dim \ker Q = 2(h^{1,1} + h^{1,2}) - 2 = 2b_2(M) + b_3(M) - 4$.
例えば $X_3(5)$ なら，$\mathrm{ind} Q = 202 \neq 0$.

超ケーラー多様体上の RS 場

(M^{4n}, g)：超ケーラー多様体（$Hol(M) = \mathrm{Sp}(n)$）.

超ケーラー多様体上の RS 場

(M^{4n}, g)：超ケーラー多様体（$Hol(M) = \mathrm{Sp}(n)$）.
ホッジ数は，$h^{q,p} = h^{p,q} = h^{2n-p,q}$，$h^{2q+1,0} = 0$（$\forall q$），
$h^{2q,0} = 1$（$0 \leq q \leq n$）.
$S_{3/2}$ は $(n+1)$ 次元自明束を含む（→ 平行 RS 場）.

超ケーラー多様体上の RS 場

(M^{4n}, g)：超ケーラー多様体（$Hol(M) = \mathrm{Sp}(n)$）．
ホッジ数は，$h^{q,p} = h^{p,q} = h^{2n-p,q}$，$h^{2q+1,0} = 0$（$\forall q$），
$h^{2q,0} = 1$（$0 \leq q \leq n$）．
$S_{3/2}$ は $(n+1)$ 次元自明束を含む（→ 平行 RS 場）．

Theorem (HS2018)

(M^{4n}, g) をコンパクト超ケーラー多様体とすると，

$$\dim \ker Q = -(n+1) + 2h^{n,1} + 4 \sum_{1 \leq p \leq n-1} h^{k,1},$$

$$\mathrm{ind} Q = (n+1) + (-1)^n 2h^{n,1} + 4 \sum_{1 \leq p \leq n-1} (-1)^k h^{k,1}$$

$$\dim \text{平行 } RS \text{ 場} = n+1$$

Spin(7) 多様体上の RS 場

(M^8, g) : Spin(7) 多様体（$Hol(M) = \mathrm{Spin}(7)$）

Spin(7) 多様体上の RS 場

(M^8, g)：Spin(7) 多様体（$Hol(M) = \mathrm{Spin}(7)$）

$$\Lambda^2 = \Lambda^2_7 \oplus \Lambda^2_{21}, \quad \Lambda^3 = \Lambda^3_8 \oplus \Lambda^3_{48}, \quad \Lambda^4_+ = \mathbb{C} \oplus \Lambda^4_7 \oplus \Lambda^4_{27}, \quad \Lambda^4_- = \Lambda^4_{35}$$

$$S_{1/2} = (\mathbb{C} \oplus \Lambda^2_7) \oplus \Lambda^1, \quad S_{3/2} = (\Lambda^1 \oplus \Lambda^3_{48}) \oplus (\Lambda^4_{35} \oplus \Lambda^2_{21})$$

Spin(7) 多様体上の RS 場

(M^8, g) : Spin(7) 多様体（$Hol(M) = \mathrm{Spin}(7)$）

$$\Lambda^2 = \Lambda^2_7 \oplus \Lambda^2_{21}, \quad \Lambda^3 = \Lambda^3_8 \oplus \Lambda^3_{48}, \quad \Lambda^4_+ = \mathbb{C} \oplus \Lambda^4_7 \oplus \Lambda^4_{27}, \quad \Lambda^4_- = \Lambda^4_{35}$$
$$S_{1/2} = (\mathbb{C} \oplus \Lambda^2_7) \oplus \Lambda^1, \quad S_{3/2} = (\Lambda^1 \oplus \Lambda^3_{48}) \oplus (\Lambda^4_{35} \oplus \Lambda^2_{21})$$

Theorem (Wang1991, HS2018)

(M^8, g) をコンパクト Spin(7) 多様体（$Hol(M) = \mathrm{Spin}(7)$），

$$\dim\ker Q = b^2_{21} + b^3_{48} + b^4_{35} = b_2(M) + b_3(M) + b^-_4(M),$$
$$indQ = b^3_{48} - b^4_{35} - b^2_{21}$$

よって，RS 場をもつ Spin(7) 多様体はたくさんあることがわかる（by Joyce の本にある例）

G_2 多様体上の RS 場

(M^7, g)：G_2 多様体（$Hol(M) = \mathrm{G}_2$）

G_2 多様体上の RS 場

(M^7, g) : G_2 多様体（$Hol(M) = \mathrm{G}_2$）

$$\Lambda^2 = \Lambda^1 \oplus \Lambda^2_{14}, \quad \Lambda^3 = \mathbb{C} \oplus \Lambda^1 \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda^3_{48},$$
$$S_{1/2} = \mathbb{C} \oplus \Lambda^1, \quad S_{3/2} = \Lambda^1 \oplus \Lambda^3_{27} \Lambda^2_{14}$$

G_2 多様体上の RS 場

(M^7, g) : G_2 多様体（$Hol(M) = \mathrm{G}_2$）

$$\Lambda^2 = \Lambda^1 \oplus \Lambda^2_{14}, \quad \Lambda^3 = \mathbb{C} \oplus \Lambda^1 \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda^3_{48},$$
$$S_{1/2} = \mathbb{C} \oplus \Lambda^1, \quad S_{3/2} = \Lambda^1 \oplus \Lambda^3_{27} \Lambda^2_{14}$$

Theorem (Wang1991, HS2018)

(M^7, g) を G_2 多様体（$Hol(M) = \mathrm{G}_2$）,

$$\dim \ker Q = b^3_{27} + b^2_{14} = b_2(M) + b_3(M) - 1$$

RS 場をもつ G_2 多様体はたくさんある.

平行 RS 場

$S_{3/2}$ が（$Hol(M)$ に対し）自明束をもつ $\Longleftrightarrow$ 平行 RS 場が存在

平行 RS 場

$S_{3/2}$ が（$Hol(M)$ に対し）自明束をもつ $\Longleftrightarrow$ 平行 RS 場が存在

Theorem (平行 RS 場の分類定理)

(M, g) をコンパクト既約スピン多様体とする．平行 RS 場をもつなら，M は（局所的に）超ケーラー多様体であるか，次の 8 次元対称空間のいずれか

$$Gr_2(\mathbb{C}^4),\ \mathbb{H}P^2,\ \mathrm{G}_2/\mathrm{SO}(4),\ \mathrm{SU}(3),\ Q_4 = \frac{\mathrm{SO}(6)}{\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(4)}.$$

平行 RS 場

$S_{3/2}$ が（$Hol(M)$ に対し）自明束をもつ $\Longleftrightarrow$ 平行 RS 場が存在

Theorem (平行 RS 場の分類定理)

(M, g) をコンパクト既約スピン多様体とする．平行 *RS* 場をもつなら，M は（局所的に）超ケーラー多様体であるか，次の 8 次元対称空間のいずれか

$Gr_2(\mathbb{C}^4)$, $\mathbb{H}P^2$, $\mathrm{G}_2/\mathrm{SO}(4)$, $\mathrm{SU}(3)$, $Q_4 = \frac{\mathrm{SO}(6)}{\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(4)}$.

Proof: (M, g)：コンパクト既約スピン多様体とする．

平行 RS 場

$S_{3/2}$ が（$Hol(M)$ に対し）自明束をもつ $\Longleftrightarrow$ 平行 RS 場が存在

Theorem (平行 RS 場の分類定理)

(M, g) をコンパクト既約スピン多様体とする．平行 *RS* 場をもつなら，M は（局所的に）超ケーラー多様体であるか，次の 8 次元対称空間のいずれか
$Gr_2(\mathbb{C}^4)$, $\mathbb{H}P^2$, $G_2/SO(4)$, $SU(3)$, $Q_4 = \frac{SO(6)}{SO(2)\times SO(4)}$.

Proof: (M, g)：コンパクト既約スピン多様体とする．
M は対称空間または（局所的に）$Hol(M)$ がベルジェのリスト．

平行 RS 場

$S_{3/2}$ が（$Hol(M)$ に対し）自明束をもつ $\Longleftrightarrow$ 平行 RS 場が存在

Theorem (平行 RS 場の分類定理)

(M, g) をコンパクト既約スピン多様体とする．平行 RS 場をもつなら，M は（局所的に）超ケーラー多様体であるか，次の 8 次元対称空間のいずれか

$$Gr_2(\mathbb{C}^4),\ \mathbb{H}P^2,\ \mathrm{G}_2/\mathrm{SO}(4),\ \mathrm{SU}(3),\ Q_4 = \frac{\mathrm{SO}(6)}{\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(4)}.$$

Proof: (M, g)：コンパクト既約スピン多様体とする．
M は対称空間または（局所的に）$Hol(M)$ がベルジェのリスト．
$Hol(M) = \mathrm{SO}(n).\mathrm{U}(n)$ の場合は，$S_{3/2}$ は自明束をもたない．その他の場合もすでに見た．

ご清聴ありがとうございました.

補足：$\boldsymbol{M \times N}$ と既約でない場合の平行 RS 場は？

補足：$M \times N$ と既約でない場合の平行 RS 場は？

$$S_{3/2}^{M\times N} = S_{1/2}^{M}\hat{\otimes}S_{1/2}^{N} \oplus S_{1/2}^{M}\hat{\otimes}S_{3/2}^{N} \oplus S_{3/2}^{M}\hat{\otimes}S_{1/2}^{N}$$

を利用すればよい.

補足：$M \times N$ と既約でない場合の平行 RS 場は？

$$S_{3/2}^{M\times N} = S_{1/2}^{M}\hat{\otimes}S_{1/2}^{N} \oplus S_{1/2}^{M}\hat{\otimes}S_{3/2}^{N} \oplus S_{3/2}^{M}\hat{\otimes}S_{1/2}^{N}$$

を利用すればよい.
指数定理についても,

$$\mathrm{ind}Q^{M\times N} = \mathrm{ind}Q^{M}\mathrm{ind}D^{N} + \mathrm{ind}D^{M}\mathrm{ind}Q^{N} - \mathrm{ind}D^{M}\mathrm{ind}D^{N}$$

特に，$\mathrm{Scal}_M, \mathrm{Scal}_N > 0$ なら，$\mathrm{ind}Q^{M\times N} = 0$ が成立.

Questions:

1. Are there Rarita-Schwinger fields on manifolds with Killing spinors? E.g. are there Rarita-Schwinger fields on nearly Kähler manifolds?
2. Are there examples of Rarita-Schwinger fields on $\mathbf{4}$-dimensional Einstein spin manifolds of positive scalar curvature?
3. How about non-Einstein case?
4. Is there a $\mathbf{Spin}^c$ version of Rarita-Schwinger fields?
5. Given a parallel Rarita-Schwinger field, is it possible to construct explicitly a corresponding hyperkähler structure?