熊本城の石垣曲線と数学

藤井一幸
横浜市立大学・国際総合科学部・数学教室

概要

日本美の典型的な例である熊本城の石垣（いわゆる「武者返し」）を数学の立場から再考する。美しさの背後には、美しい幾何学が潜んでいるのである。
昔の石垣職人達の中に和算家がいたら、彼（彼女）から「微分」が生まれたのではと思わずにいられない。それほど見事なのである。
石垣職人達の能力に乾杯！と言いたい。

[I] はじめに

日本のお城の石垣は本当に美しいと思う。昔は穴太（アノウ）という石垣構築の専門家がいたのである。但し、その手法は秘密中の秘密であったに違いない。

「石垣秘伝之書」は、中西善助という人が 寛保３年（1743）に、細川藩（熊本）の穴太 北川作兵衛 から聞き取ったものをベースに書いた書物である [1]。このような書物によって門外不出の秘密が細々と後世に残されてゆくのである。次第に難しくなるので skip する[1]。

本論文の目的は、熊本城の石垣曲線の数学を徹底的に解説することである。大学生はもちろん、出来の良い高校生なら理解出来ると信じている。

本論文の展開は、柳井氏の論文 [2] をベースに藤井流に再構成して進む。そして新しい結果（多分）を加える。必要な数学に関しては [3] を参照せよ。

readers のために、熊本城の２様の美しい石垣の写真を載せておく。

Google > 画像 > 熊本城 石垣

より引用。向かって左側が細川藩時代のもので、右側が加藤清正時代のものである。

[1] 正確には、[1] の漢字が読めなくなるので skip せざるを得ない

[II] 構成法

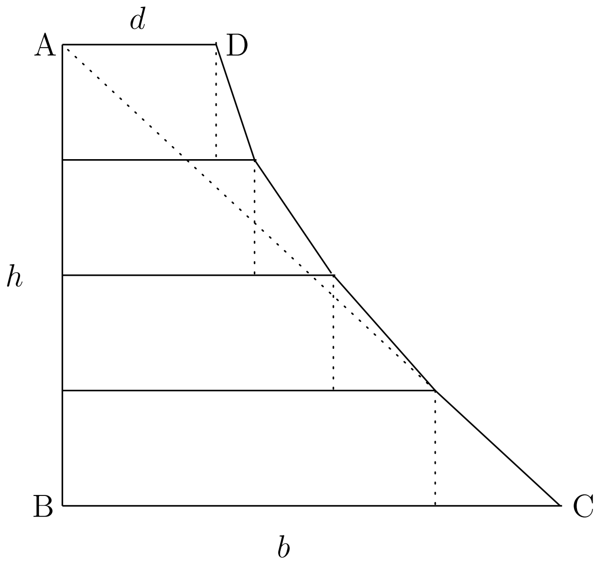
簡単な例で石垣の構成法を見てみよう。石垣の高さを h, 土台の長さを b, 天井の長さを d とする（下図を見よ）。

「石垣秘伝之書」による数値例は

$$h = 10\,\text{間} \approx 18.18\ \mathrm{m}, \quad b = 5\,\text{間} \approx 9.09\ \mathrm{m}, \quad d = 0.6\,\text{間} \approx 1.09\ \mathrm{m}$$

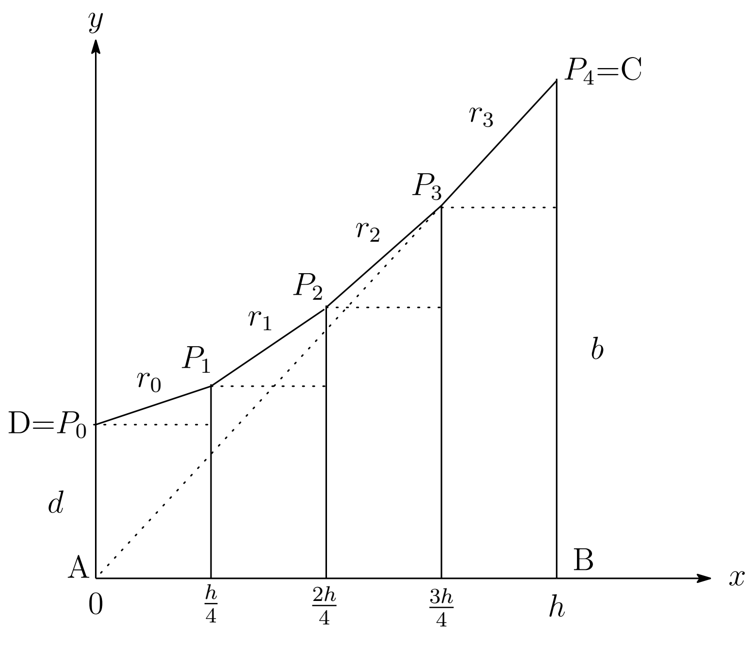
である（1 間 ≈ 1.818 m である）。

高さを 4 等分し、石垣の傾きを少しずつ強くして、整合するように全体を構成する。傾きの構成に美しい数学が隠れているのである。



石垣の作図法

これでは解りにくいので、反時計回りに 90 度回転し、以下のように座標を入れて考える。



石垣の座標系

点 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 の座標を

$$P_0(x_0, y_0),\ P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),\ P_3(x_3, y_3),\ P_4(x_4, y_4)$$

とすると、明らかに

$$(x_0, y_0) = (0, d),\ (x_4, y_4) = (h, b)$$

である。ここで大事なことは、傾きを対象にしていることである。それらを

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ r_3$$

とする。図より

$$\frac{h}{4}(r_0 + r_1 + r_2 + r_3) = b - d \tag{1}$$

がわかる。ここで未知定数 δ を導入し、後で整合性により決定する。まず定義から

$$r_3 = \frac{b}{h}$$

である。次に $r_2,\ r_1,\ r_0$ を

$$\begin{aligned} r_2 &= r_3 - \frac{\delta}{3} = \frac{b}{h} - \frac{\delta}{3} \\ r_1 &= r_2 - \frac{\delta}{2} = \frac{b}{h} - \frac{\delta}{3} - \frac{\delta}{2} \\ r_0 &= r_1 - \delta = \frac{b}{h} - \frac{\delta}{3} - \frac{\delta}{2} - \delta \end{aligned}$$

のように定義するのである。

　このとき、明らかに

$$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = 4\frac{b}{h} - 3\delta \tag{2}$$

が成り立つ。(1) と (2) より

$$(b - d)\frac{4}{h} = 4\frac{b}{h} - 3\delta$$

で、これを解くと

$$\delta = \frac{4d}{3h} \tag{3}$$

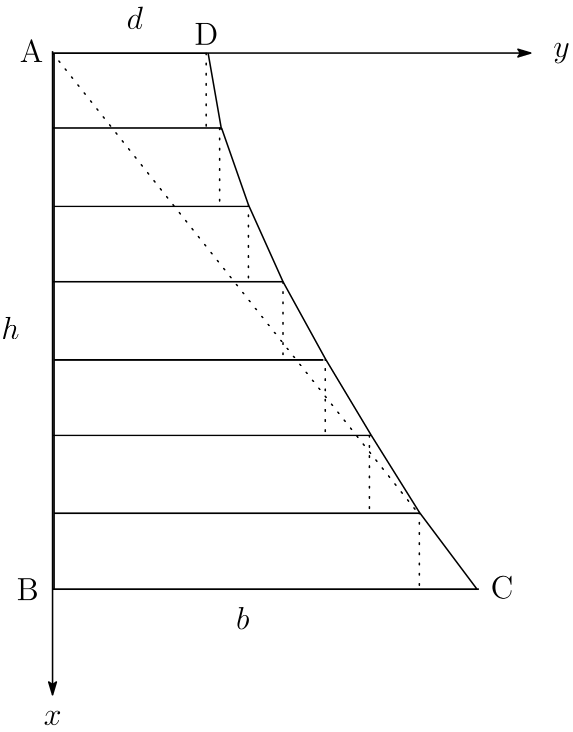
を得る。

　このようにして δ が決まるのである。

[III]　構成法（一般化）

　[II] の簡単な例（$n = 4$）を一般化しよう。高校数学を完全にマスターしていれば、以下の一般化は簡単であろう。

　石垣の高さを n 等分する。構成法は全く同じである。



石垣の作図法 (一般化)

座標系を入れる（上の図を反時計回りに 90 度回転する）。点 P_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ の座標を

$$P_i(x_i, y_i)$$

とおくと、明らかに

$$(x_0, y_0) = (0, d), \quad (x_n, y_n) = (h, b)$$

である。

点 P_i と P_{i+1} の傾きを r_i とおくと、その構成法は以下のようになる。δ を後で決める定数として

$$\begin{aligned}
r_{n-1} &= \frac{b}{h}, \\
r_{n-2} &= \frac{b}{h} - \frac{\delta}{n-1}, \\
r_{n-3} &= \frac{b}{h} - \frac{\delta}{n-1} - \frac{\delta}{n-2}, \\
&\vdots \\
r_1 &= \frac{b}{h} - \frac{\delta}{n-1} - \frac{\delta}{n-2} - \cdots - \frac{\delta}{2} \\
r_0 &= \frac{b}{h} - \frac{\delta}{n-1} - \frac{\delta}{n-2} - \cdots - \frac{\delta}{2} - \delta
\end{aligned}$$

となる。構成法より

$$\frac{h}{n}(r_0 + r_1 + \cdots + r_n) = b - d \tag{4}$$

で、他方その和は

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_n = n\frac{b}{h} - (n-1)\delta \tag{5}$$

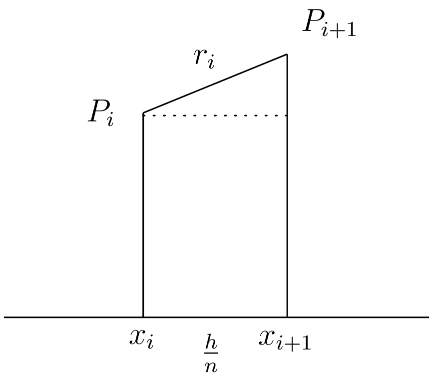
となる。

(4) と (5) より

$$\delta = \frac{nd}{(n-1)h} = \frac{n}{n-1}\frac{d}{h} \tag{6}$$

を得る。

座標系を書き下そう（下図を見よ)。



$P_i(x_i, y_i)$

$P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$

ここで

$$x_i = i\frac{h}{n} \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

に注意して、漸化式

$$\begin{aligned} x_{i+1} - x_i &= \frac{h}{n}, \\ y_{i+1} - y_i &= r_i\frac{h}{n}, \\ r_{i+1} - r_i &= \frac{\delta}{i+1} = \frac{1}{i+1}\frac{n}{n-1}\frac{d}{h} \end{aligned} \tag{7}$$

を得る。

[IV] 連続極限

(7) の極限を取るのは当然のことである（意味がよりハッキリする)。

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y = y_{i+1} - y_i, \quad \Delta r = r_{i+1} - r_i$$

とおくと、(7) より

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = r_i$$

及び

$$\frac{\Delta r}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{i+1}\delta}{\frac{h}{n}} = \frac{1}{(i+1)\frac{h}{n}}\frac{n}{n-1}\frac{d}{h} = \frac{n}{n-1}\frac{d}{h}\frac{1}{x_{i+1}}$$

を得る。

$n \longrightarrow \infty$ のとき $x_i \longrightarrow x$ 及び $r_i \longrightarrow r$ とすると、微分方程式系

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = r \\[2ex] \dfrac{dr}{dx} = \dfrac{d}{h}\dfrac{1}{x} \end{cases} \tag{8}$$

を得る。一つの形にまとめると

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{h}\frac{1}{x} \tag{9}$$

となる。これが求める微分方程式である。

初期条件は

$$\begin{array}{c} y(0) = d, \quad y(h) = b \\ \text{又は} \\ y(h) = b, \quad y'(h) = \dfrac{b}{h} \end{array} \tag{10}$$

となる。

2 階の微分方程式 (9) の一般解は

$$y(x) = \frac{d}{h}x\log x + \left(c_1 - \frac{d}{h}\right)x + c_2$$

となり、初期条件 (10) より

$$y(x) = d + \frac{1}{h}\left\{(b-d)x + dx\log\frac{x}{h}\right\} \tag{11}$$

となる。このとき

$$\lim_{x\to 0} x\log x = 0$$

を使った。

練習問題 チェックせよ。

かなり smart な解 (11) が得られた。これが熊本城のいわゆる「武者返し」の数学的表現である[2]。相当に面白いと思う。

[2]NHK の特集番組で、この曲線のことが出ていたそうである（残念ながら見ていない）

[V] 解の更なる考察

柳井氏の論文に新しい（？）結果を付け加えよう[3]。

[A] 形状について

解 (11) には、少し奇妙なところがある。そのために (11) の微分をしてみよう。

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{h}\left\{(b-d)+d\log\frac{x}{h}+d\right\} \\ &= \frac{1}{h}\left(b+d\log\frac{x}{h}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

より

$$y'(x)=0 \implies x\equiv x_0 = he^{-\frac{b}{d}} \tag{13}$$

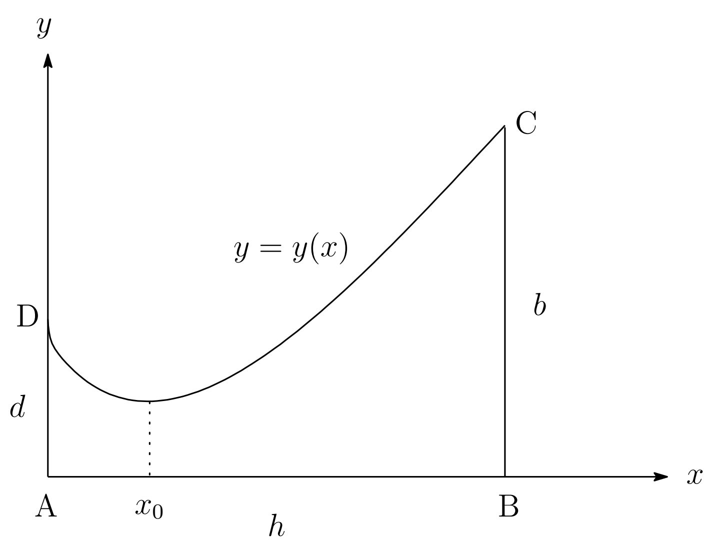
を得る。更に

$$y''(x)=\frac{d}{h}\frac{1}{x}>0$$

より x_0 は最小値である。その値は

$$\begin{aligned} y(x_0) &= d+\frac{1}{h}\left\{(b-d)x_0+dx_0\log\frac{x_0}{h}\right\} \\ &= d+\frac{1}{h}\left\{(b-d)he^{-\frac{b}{d}}+dhe^{-\frac{b}{d}}\left(-\frac{b}{d}\right)\right\} \\ &= d+\{(b-d)e^{-\frac{b}{d}}-be^{-\frac{b}{d}}\} \\ &= d(1-e^{-\frac{b}{d}})<d \end{aligned}$$

となる。以下にグラフを描いておく ($y'(0)=-\infty$ であることに注意せよ)。



[3] 柳井氏の論文の解説だけではみっともないから

現実の熊本城の石垣はこんな形をしていない。少しだけ悩んでいたのであるが、現実の石垣の数値例で見てみよう。

「石垣秘伝之書」の数値例は

$$h = 10\,\text{間} \approx 18.18\ \mathrm{m}, \quad b = 5\,\text{間} \approx 9.09\ \mathrm{m}, \quad d = 0.6\,\text{間} \approx 1.09\ \mathrm{m}$$

であった。これを x_0 に代入すると

$$x_0 = he^{-\frac{b}{d}} \approx 18.18 \times 10^3 \times e^{-8.34}\ [mm] \approx 4.34\ [mm]$$

となる。これでは問題にならない（ヤレヤレ）。

しかし このことは記録されなければならない問題点である。

[B] 側面積について

石垣の側面積を求めてみよう。解 (11)

$$y(x) = d + \frac{1}{h}\{(b-d)x + dx\log x - dx\log h\}$$

より積分を実行すると

$$\begin{aligned}
\int_0^h y(x)dx &= dh + \frac{1}{h}(b-d)\frac{h^2}{2} + \frac{d}{h}\int_0^h x\log x dx - \frac{d}{h}\frac{h^2}{2}\log h \\
&= dh + \frac{(b-d)h}{2} - \frac{dh}{2}\log h + \frac{d}{h}\int_0^h x\log x dx \\
&= dh + \frac{(b-d)h}{2} - \frac{dh}{2}\log h + \frac{d}{h}\left(\frac{h^2}{2}\log h - \frac{h^2}{4}\right) \\
&= \frac{2b+d}{4}h
\end{aligned}$$

となる。ここで公式

$$\int x\log x dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}$$

を使った。少し書き直すと

$$\int_0^h y(x)dx = \frac{b+\frac{d}{2}}{2}h \tag{14}$$

である。

練習問題 チェックせよ。

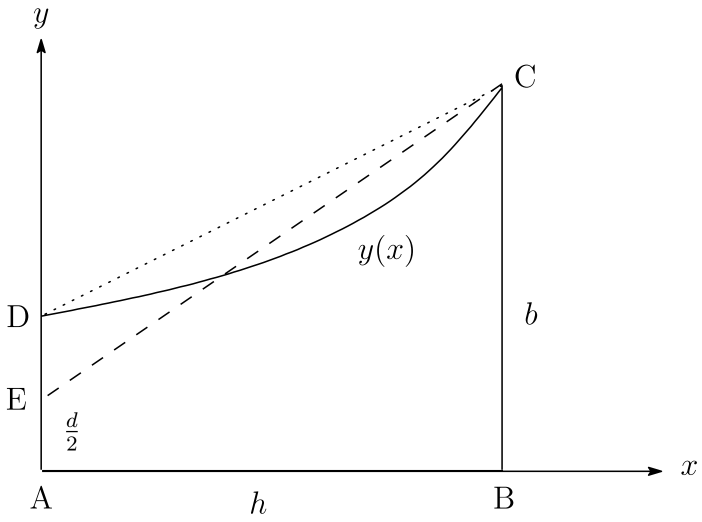
意味を考えてみよう。台形 ABCD の面積は

$$\frac{b+d}{2}h$$

である。2点 A, D の中点を E とすると、台形 ABCE の面積は

$$\frac{b+\frac{d}{2}}{2}h$$

となり、(14) と一致する。



台形

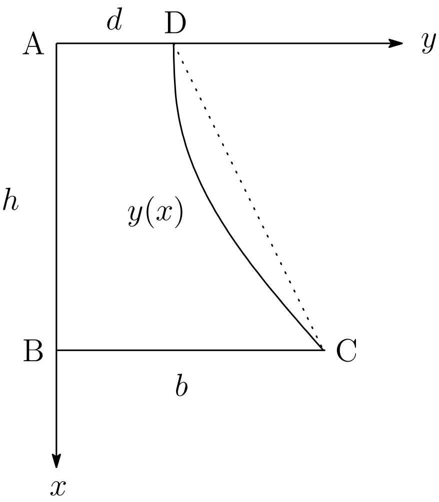
石垣は直線として良いのでその長さを l とすると、石垣の体積 V は

$$V=\frac{b+\frac{d}{2}}{2}hl \tag{15}$$

となる。

[C] 曲線の長さについて

最後に、曲線 $y=y(x)$ の長さを評価しよう（下図）。



　少し準備をする。石垣の数値例より

$$\alpha = \left(\frac{b-d}{h}\right)^2 < \frac{1}{4} = 0.25 \quad (\Longleftarrow \ b = h/2)$$

なので、α は十分に小さいと仮定してよい。従って、以下公式

$$\sqrt{1+\alpha} = (1+\alpha)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha \tag{16}$$

を用いる（ニュートン展開の higher order terms は無視)。

　直線 CD の長さは

$$\overline{\mathrm{CD}} = \sqrt{h^2 + (b-d)^2}$$

であるから

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{CD}} &= h\sqrt{1 + \left(\frac{b-d}{h}\right)^2} \\ &\approx h\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b-d}{h}\right)^2\right\} \\ &= \frac{2h^2 + (b-d)^2}{2h} \end{aligned} \tag{17}$$

となる。

　曲線 $y = y(x)$ の長さ L を求めよう。その公式は

$$L = \int_0^h \sqrt{1 + \{y'(x)\}^2}dx$$

である。(12) より

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left(b + d\log\frac{x}{h}\right)$$

を用いて

$$L = \int_0^h \sqrt{1 + \left(\frac{b + d\log\frac{x}{h}}{h}\right)^2}dx$$

を計算する。ここで変数変換を行う（これが重要)。

$$\log\frac{x}{h} = -t \iff x = he^{-t} \implies dx = (-he^{-t})dt$$

とおくと　$x \to 0 \iff t \to \infty$　なので、計算を続けると

$$L = \int_\infty^0 \sqrt{1 + \left(\frac{b-dt}{h}\right)^2}\left(-he^{-t}dt\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= h\int_0^\infty e^{-t}\sqrt{1+\left(\frac{b-dt}{h}\right)^2}dt \\
&\approx h\int_0^\infty e^{-t}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b-dt}{h}\right)^2\right\}dt \\
&= h\int_0^\infty e^{-t}\left(1+\frac{b^2-2bdt+d^2t^2}{2h^2}\right)dt \\
&= h\int_0^\infty \left(\frac{2h^2+b^2}{2h^2}e^{-t}-\frac{2bd}{2h^2}e^{-t}t+\frac{d^2}{2h^2}e^{-t}t^2\right)dt \\
&= h\left\{\frac{2h^2+b^2}{2h^2}\int_0^\infty e^{-t}dt-\frac{2bd}{2h^2}\int_0^\infty e^{-t}tdt+\frac{d^2}{2h^2}\int_0^\infty e^{-t}t^2dt\right\} \\
&= h\left\{\frac{2h^2+b^2}{2h^2}\Gamma(1)-\frac{2bd}{2h^2}\Gamma(2)+\frac{d^2}{2h^2}\Gamma(3)\right\} \\
&= \frac{2h^2+b^2}{2h}-\frac{2bd}{2h}+\frac{d^2}{2h}\times 2 \\
&= \frac{2h^2+b^2-2bd+2d^2}{2h} \\
&= \frac{2h^2+(b-d)^2+d^2}{2h} \qquad (18)
\end{aligned}
$$

となる。ここでガンマ関数の公式 [3]

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt=(n-1)!$$

より

$$\Gamma(1)=0!=1,\ \Gamma(2)=1,\ \Gamma(3)=2!=2$$

を使った。

練習問題 チェックせよ。

長さ (17) と (18) とを比較すると、近似 (16) のもとで $\frac{d^2}{2h}$ だけ長くなる。

[VI] おわりに

このノートので、熊本城の石垣の構築の "秘伝" を解説し、若干の新しい結果を付け加えた。美しい構築物の背後には美しい数学があるのは事実である。

石垣職人の main target は、石垣の傾きを決定することであった。$n=10,20,30,\cdots$ としてゆくのは、まさに **微分の世界への入り口** にいることを意味する。残念ながら彼らに極限 $n\longrightarrow\infty$ を取ることは無理であったと思う。

ところで、当時の日本には和算家がいたのである。私の結論は、石垣職人達と和算家が“相互作用”していれば日本から 微分 が生まれた可能性がある、と言うことである。当然ニュートンよりも早く。

最後に、熊本地震と石垣の安定性について少し書いておく。熊本地震（2 回）の最大震度は 7 であるが、熊本城のある熊本中央区の震度は 5 強であった。熊本城全体としては石垣にも相当の被害があった。例えば

Google > 画像 > 熊本城の石垣 現状

で見てほしい。修復には相当な時間が必要である（もちろん お金も）。しかし、2 ページの 2 様の石垣 の被害は軽微であった [4]。

地震と石垣の安定性について、数学的には石垣の構造安定性の問題に帰着するが、よく理解出来ていないので今回は省略する。

参考文献

[1] 北垣 總一郎： **石垣普請**, 法政大学出版局, 1987.

[2] 柳井 浩： 石垣の曲線–様式の数理–, オペレーションズ・リサーチ, **33**, 281-286, 1988.

[3] 藤井一幸（兼編集）et al： **数理の玉手箱**, 遊星社, 2010.

[4] 藤井一幸： 熊本城の石垣（補足）.