

量子ゲームの理論入門

横浜市立大学国際総合科学部 藤井一幸

概要

このノートで古典的ゲームの理論の代表的な例である「囚人のジレンマ」を取り上げ、(よく知られている事柄ではあるが) パレート最適 \neq ナッシュ均衡を紹介する。古典的範囲ではどうにも出来ない難問である。

次に量子的ゲームの理論の「量子囚人のジレンマ」を紹介し、この枠組みの中でこの問題が解決されるのを詳しく見てゆく。これが“解決”であるのか否かは意見が分かれるかも知れないが、非常に面白く今後が楽しみな方法である。

最後に、この(古典と量子という)二つの方法の“ジレンマ”を解決するために「囚人のジレンマ」を拡張した「修正囚人のジレンマ」を提出する。

これを理解すれば、大学生として相当に鼻が高くなったような気分になれる。

[1] はじめに

正直に言って(書いて)ゲームの理論の歴史は知らない。私が学生時代に習ったのは、有名な本

Neumann and Morgenstern : Theory of Games and Economic Behavior

をベースにした数学講義であった(と思う)。残念ながら面白いと思わなかったので、ほとんど忘れてしまった。わずかに記憶しているのは、例として出てきた「囚人のジレンマ」くらいである。しかし、これに対しても批判的である(本文を見よ)。

ところで、私の専門は量子情報理論、特に量子計算である。量子力学と(古典)情報理論の融合であり、21世紀の代表的分野に成長するものと思われる。

私は心の中で量子情報理論を自然科学や工学のみならず、社会科学にも応用することを考えていた。あるとき横浜市大の生協で川越敏司氏の本 [1] を見ていると、7章に量子ゲームが載っていたので購入したのである。

読んでみると「囚人のジレンマ」が量子ゲームの理論の中でうまく“解決”するのである。但し、これを解決と言うのに異論のある人も多いであろう。しかし非常に面白い方法で、知っていて損は無い。

従って、このノートで学生のために [1] の7章(正確には、巻末付録)を徹底的にフォローする(また全体的なイメージとして [2] を見よ)。

量子情報理論のイロハを理解するにはそれなりの数学が要求される。特に、ベクトルと行列のテンソル積の知識が不可欠である。それほど難しくはないが、ある程度慣れが必要である。そこをクリア出来れば、内容を理解してもらえると信じている。

[II] 数学的準備

後の議論に必要な数学を、必要最小限で紹介する。ベクトル及び行列のある程度の知識は仮定する。詳しくは [3] を見よ。教科書としては [4], [5] を推薦する（後者は、本格派向け）。

テンソル積

初めにベクトル及び行列のクロネッカー積の定義を与えておこう。2次元複素ベクトル空間 \mathbb{C}^2 の元 a, b を

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

と表すと¹、ベクトルのクロネッカー積 $a \otimes b$ は

$$a \otimes b = \begin{pmatrix} a_0 b \\ a_1 b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 b_0 < 00 \\ a_0 b_1 < 01 \\ a_1 b_0 < 10 \\ a_1 b_1 < 11 \end{pmatrix} \quad (1)$$

と定義される。このように置くと、10進法と2進法が

$$0 \longleftrightarrow 00, \quad 1 \longleftrightarrow 01, \quad 2 \longleftrightarrow 10, \quad 3 \longleftrightarrow 11$$

のようにうまく対応している。クロネッカー積全てを集めて

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \{a \otimes b \mid a \in \mathbb{C}^2, b \in \mathbb{C}^2\}$$

とおく。これは単に集合で、成分達の和やスカラー倍は定義されていない。この集合に、それらを全て加えたものを

$$\mathbb{C}^2 \widehat{\otimes} \mathbb{C}^2 = \left\{ \sum_{j: \text{有限和}} \lambda_j a_j \otimes b_j \mid a_j, b_j \in \mathbb{C}^2, \lambda_j \in \mathbb{C}, j \in \mathbb{N} \right\} \quad (2)$$

とおく。これはベクトル空間で、 \mathbb{C}^2 と \mathbb{C}^2 のテンソル積と言われる。

次に2次元の複素行列 $A, B \in M(2; \mathbb{C})$ を

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{pmatrix}$$

と表すと、行列のクロネッカー積 $A \otimes B$ は

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{00}B & a_{01}B \\ a_{10}B & a_{11}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00}b_{00} & a_{00}b_{01} & a_{01}b_{00} & a_{01}b_{01} \\ a_{00}b_{10} & a_{00}b_{11} & a_{01}b_{10} & a_{01}b_{11} \\ a_{10}b_{00} & a_{10}b_{01} & a_{11}b_{00} & a_{11}b_{01} \\ a_{10}b_{10} & a_{10}b_{11} & a_{11}b_{10} & a_{11}b_{11} \end{pmatrix} \quad (3)$$

¹添え字の0と1は2進法に対応させている

と定義される。ここで、成分の表示は

$$(A \otimes B)_{ij,kl} = A_{ik}B_{jl} = a_{ik}b_{jl}$$

となる (チェックせよ)。

これらの基本関係式は

$$(A \otimes B)(a \otimes b) = (Aa) \otimes (Bb) \quad (4)$$

で与えられ、これより行列の積は

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = A_1A_2 \otimes B_1B_2 \quad (5)$$

となることがわかる。何故なら、任意の $a \otimes b$ に対して 定義より

$$\begin{aligned} \{(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)\}(a \otimes b) &= (A_1 \otimes B_1)((A_2 \otimes B_2)(a \otimes b)) \\ &= (A_1 \otimes B_1)((A_2a) \otimes (B_2b)) \\ &= A_1(A_2a) \otimes B_1(B_2b) \\ &= (A_1A_2)a \otimes (B_1B_2)b \\ &= (A_1A_2 \otimes B_1B_2)(a \otimes b) \end{aligned}$$

だから。もう一つ重要な性質として

$$(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger \quad (6)$$

が成り立つ (各自証明せよ)。

コメント テンソル積は一見難しそうに見えるが簡単な性質である。2変数関数 $f(x, y)$ が

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

と変数分離したことに対応している [6]。

つぎに、 \mathbb{C}^2 の基底をケット・ベクトルを用いて

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

と表す (Dirac の記号)。もちろん

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (a, b \in \mathbb{C})$$

である。従って、 \mathbb{C}^2 を

$$\mathbb{C}^2 = \{a|0\rangle + b|1\rangle \mid a, b \in \mathbb{C}\}$$

と書いてもよい。

$a, b \in \{0, 1\}$ として、簡単のためクロネッカー積を

$$|ab\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$$

とおくと

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

となる (チェックせよ)。これらは明らかに \mathbb{C}^4 の基底なので、従って同型

$$\mathbb{C}^2 \hat{\otimes} \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$$

がわかる。

コメント 用語として

- (1) $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ の元を non-entangled elements
- (2) $\mathbb{C}^2 \hat{\otimes} \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ の元を entangled elements

という (entangled \approx もつれた)。

例として、ベル基底 (の一つ)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle)$$

は entangled であることを示そう。何故なら、これを non-entangled と仮定すると、定義から

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

となる定数 a, b, c, d が存在する。右辺を展開すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) = ac|0\rangle \otimes |0\rangle + ad|0\rangle \otimes |1\rangle + bc|1\rangle \otimes |0\rangle + bd|1\rangle \otimes |1\rangle$$

で、係数比較をすると

$$ac = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad ad = 0, \quad bc = 0, \quad bd = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。明らかに矛盾である。

同様に、行列に対しても

- (1) $M(2; \mathbb{C}) \otimes M(2; \mathbb{C})$ の元を non-entangled elements
 (2) $M(2; \mathbb{C}) \hat{\otimes} M(2; \mathbb{C}) \setminus M(2; \mathbb{C}) \otimes M(2; \mathbb{C})$ の元を entangled elements

という (違和感は無いと思う)。

コメント 何故クロネッカー積 (テンソル積) がそんなに重要なのか と質問を受けるので reply しておく。 $a, b \in \mathbb{C}^2$ とすると、内積は

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \bar{a}_0 b_0 + \bar{a}_1 b_1 \quad (9)$$

で与えられる (成分は複素数であることに注意せよ)。一般の \mathbb{C}^n も全く同様である。このとき、クロネッカー積 $\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1$ と $\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b}_2$ の内積は計算すると

$$\langle \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1 | \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b}_2 \rangle = \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle \langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_2 \rangle \quad (10)$$

となる (チェックせよ)。

要するに、 \mathbf{a} と \mathbf{b} は互いに独立なのである。元達が entangle すると、この独立性が破れるのである。量子力学の要求とピタリと一致する!

スピン行列

ここで量子力学的粒子の スピン を説明する。と言いたいのであるが、それを素人にわかる言葉で説明するのは私の能力を越えている。ice skate の浅田真央選手が得意とするスピンとは全く関係がない (回転というイメージはない)。数学をかなり知っていればリー環 $su(2)$ の表現論で説明することは可能であるが。とにかく、量子力学的粒子の内なる自由度と思っておいて結構である。

最初に重要なパウリ (Pauli) 行列 $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ を導入する (パウリ行列であって、パウリ行列ではない。念のため)。それらは

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

で与えられ、単位行列を

$$\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。以後簡単のため $\mathbf{1} = \mathbf{1}_2$ と書く。

パウリ行列の重要な性質をリストしておく。

性質

- (1) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbf{1}$
 (2) $\sigma_x \sigma_y = i \sigma_z, \sigma_y \sigma_z = i \sigma_x, \sigma_z \sigma_x = i \sigma_y$

- (3) $\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x, \sigma_y \sigma_z = -\sigma_z \sigma_y, \sigma_z \sigma_x = -\sigma_x \sigma_z$
 (4) $\sigma_x^\dagger = \sigma_x, \sigma_y^\dagger = \sigma_y, \sigma_z^\dagger = \sigma_z$
 (5) その他いろいろ

コメント パウリ行列 $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ は、特殊ユニタリー群 $SU(2)$ のリー環 $su(2)$ の生成元である。詳細は [3] を見よ。これの表現論 (representation theory) を用いるとスピンはきちんと定義出来るのである。例えば

$$\tau_x = \frac{1}{2}\sigma_x, \tau_y = \frac{1}{2}\sigma_y, \tau_z = \frac{1}{2}\sigma_z$$

とおくと、定義方程式

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 = \frac{1}{4}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) = \frac{3}{4}\mathbf{1} \equiv s(s+1)\mathbf{1} \quad (s > 0)$$

から $s = \frac{1}{2}$ となり、スピンは $\frac{1}{2}$ なのである。 ??? かも知れないが。

特に σ_x は

$$\sigma_x|0\rangle = |1\rangle, \quad \sigma_x|1\rangle = |0\rangle$$

を満たすので、フリップ (flip) 作用素と呼ばれている。

後のため、ある計算をしておく。(一般の) 正方行列 A に対して指数行列は

$$e^{\lambda A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda A)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} A^n \quad (A^0 = E)$$

で定義される。ただし λ は定数である。ここで $e^{i\lambda\sigma_1}$ を求める (計算する)。

$$\sigma_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

に注意して (今の場合 $E = \mathbf{1}$)

$$\begin{aligned} e^{i\lambda\sigma_1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n \sigma_1^n}{n!}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^{2n}}{(2n)!} \sigma_1^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^{2n+1}}{(2n+1)!} \sigma_1^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n}}{(2n)!} \mathbf{1} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} \sigma_1 \\ &= \cos \lambda \mathbf{1} + i \sin \lambda \sigma_1 \\ &= \begin{pmatrix} \cos \lambda & i \sin \lambda \\ i \sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{12}$$

を得る。ここで有名な公式

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

を使った。

最後に [IV] 章 のため以下のことを示しておく。行列 J を

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + i\sigma_x \otimes \sigma_x) \implies J^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - i\sigma_x \otimes \sigma_x) \quad (13)$$

とおく。 J はユニタリ行列であることを示そう。(5) より

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})(\sigma_x \otimes \sigma_x) &= \sigma_x \otimes \sigma_x = (\sigma_x \otimes \sigma_x)(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}), \\ (\sigma_x \otimes \sigma_x)^2 &= (\sigma_x \otimes \sigma_x)(\sigma_x \otimes \sigma_x) = \sigma_x^2 \otimes \sigma_x^2 = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \end{aligned}$$

に注意すると

$$\begin{aligned} JJ^\dagger &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + i\sigma_x \otimes \sigma_x)(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - i\sigma_x \otimes \sigma_x) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - i\sigma_x \otimes \sigma_x + i\sigma_x \otimes \sigma_x + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \\ &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \end{aligned}$$

である。次に J が entangled であることを示そう。(3) より J は block 行列として

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & i\sigma_x \\ i\sigma_x & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

と表せる。もし J が non-entangled とすると

$$J = X \otimes Y$$

となる $X, Y \in M(2; \mathbb{C})$ が存在する。

$$X = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} \\ x_{10} & x_{11} \end{pmatrix}$$

とおくと、上の方程式は

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & i\sigma_x \\ i\sigma_x & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{00}Y & x_{01}Y \\ x_{10}Y & x_{11}Y \end{pmatrix}$$

となる。比較すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1} = x_{00}Y, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}i\sigma_x = x_{01}Y, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}i\sigma_x = x_{10}Y, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1} = x_{11}Y$$

となり

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

より明らかに矛盾する。[IV] 章では J のことを 量子もつれ行列 と呼んでいる。

[III] 古典ゲームの理論

古典的ゲームの理論の一般論を展開するつもりはないので、例題でその essence を見てゆこう。ゲームの理論の代表的例である「囚人のジレンマ」を必要最小限で説明する。

事態 共謀して（殺人やテロ等の）重大な罪を犯した犯罪者 X と Y が、別の軽微な犯罪で検挙され、互いにコミュニケーションがとれない独房に収監されている。警察はこの2人が重大犯であることを確信しているが、証拠はないので、司法取引をちらつかせて尋問している。彼らには

- (C) 黙秘を続ける
- (D) 罪を自白する

という2つの選択肢があると仮定する²。

利得 これらの選択肢のもとで、彼らの利得を考える（0～4）。

Case 1 2人が共に黙秘を続けるなら、軽い刑罰を受けるだけなので、利得は共に3である。

Case 2 2人が共に自白したなら、重大な犯罪故重い刑罰を受ける。しかし、自白したことで情状酌量される余地があり、利得は共に1である。

Case 3 1人が黙秘しているときに、他方が司法取引に応じて自白すれば、自白した側は無罪となり（利得は4）、黙秘した側は情状酌量される余地がなく重罪に問われる（利得は0）。

これらの結果を利得表で表わそう（左側が X、右側が Y である）。

X \ Y	C (黙秘)	D (自白)
C (黙秘)	3, 3	0, 4
D (自白)	4, 0	1, 1

利得表

²他にもいろいろな選択肢がある。例えば、ウソをつくという選択肢

ここで2つの重要な概念である「ナッシュ均衡」と「パレート最適」を導入しておく。

ナッシュ均衡³ ナッシュ均衡とは、各プレイヤーが自分の利得を最大にした状態である。それ故、プレイヤー間の協調はない。

パレート最適⁴ パレート最適とは、各プレイヤーは他のプレイヤーの利得を下げずに、自分の利得を上げることが出来ない状態で且つ利得の和が最大である状態を意味する。

結論 囚人のジレンマでは、 $(X,Y)=(D,D)$ がナッシュ均衡で、 $(X,Y)=(C,C)$ がパレート最適である。即ち、パレート最適 $>$ ナッシュ均衡 である。

囚人のジレンマ・ゲームは、逮捕され尋問されるというアナログ的な状況に対して、“黙秘する”及び“自白する”というデジタル的な対応しか想定していない。これは問題の設定そのものに問題があると思う。

[IV] 量子ゲームの理論

量子ゲームの理論を必要最小限で説明する。量子情報理論の教科書（参考書）としては、[7]を推薦しておくが、読みこなすのは簡単ではない。

量子論とは対応

$$\rho: \text{古典} \longrightarrow \text{量子}$$

のことである。正確には ring homomorphism であるが詳細は省略する。古典では取りうる2つの戦略 { 黙秘, 自白 } があり、戦略の同時変化は

$$\begin{aligned} i_c: \text{黙秘} &\rightarrow \text{黙秘}, \quad \text{自白} \rightarrow \text{自白} \\ r_c: \text{黙秘} &\rightarrow \text{自白}, \quad \text{自白} \rightarrow \text{黙秘} \end{aligned}$$

なので、それらを力学変数と考え（添え字の c は classical）

$$\rho(i_c) = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(r_c) = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と対応させる。1 と σ_x とは交換するので、共通の固有ベクトルを持つ。それは

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

である（チェックせよ）。従って

$$|\text{黙秘}\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\text{自白}\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

³John Nash (1928–2015)

⁴Vilfredo Pareto (1848–1923)

とおくと

$$\begin{aligned} 1|\text{黙秘}\rangle &= |\text{黙秘}\rangle, & 1|\text{自白}\rangle &= |\text{自白}\rangle, \\ \sigma_x|\text{黙秘}\rangle &= |\text{自白}\rangle, & \sigma_x|\text{自白}\rangle &= |\text{黙秘}\rangle \end{aligned}$$

である。

コメント 量子力学では、固有ベクトルのことを固有状態と呼ぶ。従って、以下では状態という用語をもちいる。 σ_x の固有状態は $|\text{黙秘}\rangle$ と $|\text{自白}\rangle$ との重ね合わせである：

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{黙秘}\rangle + |\text{自白}\rangle) \implies \sigma_x|\psi\rangle = |\psi\rangle.$$

従って4つの量子・古典対応がある：

$$|00\rangle \longleftrightarrow (C, C), \quad |01\rangle \longleftrightarrow (C, D), \quad |10\rangle \longleftrightarrow (D, C), \quad |11\rangle \longleftrightarrow (D, D)$$

ここから、古典論と量子論の違いが出てくる。量子戦略 Q は、それがユニタリーであれば全てOKなのである（それ故無限個の戦略がある）。そこで新たに

$$Q = i\sigma_z \tag{14}$$

を加える。係数の i は、後の計算を見やすくするためにのみ置いている。このとき

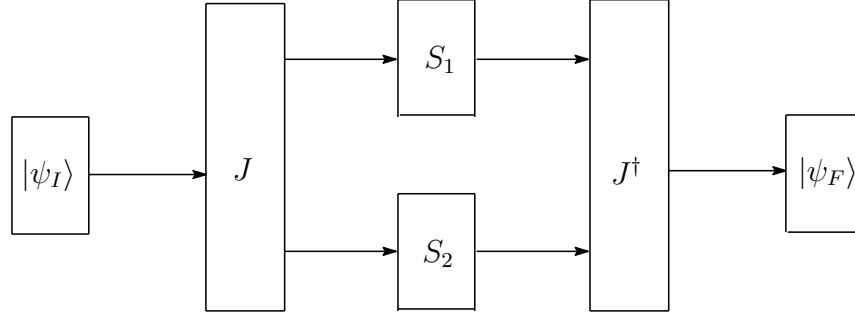
$$\sigma_z|0\rangle = |0\rangle, \quad \sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$$

である。従って、我々の量子戦略は3つの $\{1, \sigma_x, i\sigma_z\}$ となる。

ここで量子ゲームの手続きをリストしておく：

1. 初期状態の設定 ($|\psi_I\rangle$)
2. 量子もつれ行列の設定 (J)
3. 戦略の選択 (S_1, S_2)
4. 量子もつれ行列の解消 (J^\dagger)
5. 観測による最終状態の確認 ($|\psi_F\rangle$)

これを図示すると以下ようになる。



量子ゲームの手続き

量子ゲームの手続き を具体的に示す：

1. $|\psi_I\rangle = |00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$
2. $J = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + i\sigma_x \otimes \sigma_x)$
3. $S_1 \otimes S_2$ for $S_1, S_2 \in \{\mathbf{1}, \sigma_x, i\sigma_z\}$
4. $J^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - i\sigma_x \otimes \sigma_x)$ ($J^\dagger J = J J^\dagger = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$)
5. $|\psi_F\rangle = J^\dagger(S_1 \otimes S_2)J(|00\rangle)$ の係数を 1 にしたもの

計算結果：

1. $J^\dagger(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})J = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$
2. $J^\dagger(\mathbf{1} \otimes \sigma_x)J = \mathbf{1} \otimes \sigma_x$
3. $J^\dagger(\sigma_x \otimes \mathbf{1})J = \sigma_x \otimes \mathbf{1}$
4. $J^\dagger(\sigma_x \otimes \sigma_x)J = \sigma_x \otimes \sigma_x$
5. $J^\dagger(\mathbf{1} \otimes i\sigma_z)J = \sigma_x \otimes (-i\sigma_y)$
6. $J^\dagger(i\sigma_z \otimes \mathbf{1})J = (-i\sigma_y) \otimes \sigma_x$
7. $J^\dagger(i\sigma_z \otimes \sigma_x)J = (-i\sigma_y) \otimes \mathbf{1}$
8. $J^\dagger(\sigma_x \otimes i\sigma_z)J = \mathbf{1} \otimes (-i\sigma_y)$
9. $J^\dagger(i\sigma_z \otimes i\sigma_z)J = -\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$

(15)

結果：

1. $J^\dagger(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})J(|00\rangle) = |00\rangle \implies |\psi_F\rangle = |00\rangle \longleftrightarrow (C, C)$

2. $J^\dagger(\mathbf{1} \otimes \sigma_x)J(|00\rangle) = |01\rangle \implies |\psi_F\rangle = |01\rangle \longleftrightarrow (C, D)$
3. $J^\dagger(\sigma_x \otimes \mathbf{1})J(|00\rangle) = |10\rangle \implies |\psi_F\rangle = |10\rangle \longleftrightarrow (D, C)$
4. $J^\dagger(\sigma_x \otimes \sigma_x)J(|00\rangle) = |11\rangle \implies |\psi_F\rangle = |11\rangle \longleftrightarrow (D, D)$
5. $J^\dagger(\mathbf{1} \otimes i\sigma_z)J(|00\rangle) = |11\rangle \implies |\psi_F\rangle = |11\rangle \longleftrightarrow (D, D)$ (16)
6. $J^\dagger(i\sigma_z \otimes \mathbf{1})J(|00\rangle) = |11\rangle \implies |\psi_F\rangle = |11\rangle \longleftrightarrow (D, D)$
7. $J^\dagger(i\sigma_z \otimes \sigma_x)J(|00\rangle) = |10\rangle \implies |\psi_F\rangle = |10\rangle \longleftrightarrow (D, C)$
8. $J^\dagger(\sigma_x \otimes i\sigma_z)J(|00\rangle) = |01\rangle \implies |\psi_F\rangle = |01\rangle \longleftrightarrow (C, D)$
9. $J^\dagger(i\sigma_z \otimes i\sigma_z)J(|00\rangle) = -|00\rangle \implies |\psi_F\rangle = |00\rangle \longleftrightarrow (C, C)$

これらの結果を利得表で表わそう（左側が X、右側が Y である）。

X \ Y	C	D	Q
C	3, 3	0, 4	1, 1
D	4, 0	1, 1	0, 4
Q	1, 1	4, 0	3, 3

利得表

結論 量子囚人のジレンマでは、 $(X,Y)=(Q,Q)$ がナッシュ均衡で、パレート最適と同じ値である。即ち、パレート最適 = ナッシュ均衡 である。

めでたし めでたしであるが、これが古典的囚人のジレンマの解決（の一つ）であることに違和感を持つ人もいるに違いない。取りうる状態を広げており、特に Q に対応する古典的戦略が何か、さっぱりわからないのである。しかし、[III] 章にも書いたように囚人のジレンマは、アナログ的な状況 に対して デジタル的な対応 しか想定していない。これは問題の設定そのものに問題があり、次の章で再考・修正しよう。

[V] 修正囚人のジレンマ

何度も書いているように囚人のジレンマは問題の設定そのものに問題がある。この章で量子囚人のジレンマの結果をベースに囚人のジレンマ問題を修正する。それを修正囚人のジレンマと呼ぼう⁵。

⁵適切な名前があれば教えていただきたい

[III] 章の問題設定を少し拡張する：

事態 共謀して（殺人やテロ等の）重大な罪を犯した犯罪者 X と Y が、別の軽微な犯罪で検挙され、互いにコミュニケーションがとれない独房に収監されている。警察はこの2人が重大犯であることを確信しているが、証拠はないので、司法取引をちらつかせて尋問している。彼らには

- (C) 黙秘を続ける
- (D) 罪を自白する
- (L) ウソをつく

という3つの選択肢があると仮定する。ここでウソをつくとは、“相棒が単独でやったことで、俺は何もしていない”ということ⁶。現実的で不自然さはないと思う。逆に、これを加えないことこそ不自然である。

利得 これらの選択肢のもとで、彼らの利得を考える（0～4）。

Case 1 2人が共に黙秘を続けるなら、軽い刑罰を受けるだけなので、利得は共に3である。

Case 2 2人が共に自白したなら、重大な犯罪故重い刑罰を受ける。しかし、自白したことで情状酌量される余地があり、利得は共に1である。

Case 3 1人が黙秘しているときに、他方が司法取引に応じて自白すれば、自白した側は無罪となり（利得は4）、黙秘した側は情状酌量される余地がなく重罪に問われる（利得は0）。

Case 4 1人がウソをついているときに、他方が黙秘を続けるなら、ウソをついた側も黙秘した側も重大犯である印象を一層深める。しかし、完全な確証はないので、利得は共に1である。

Case 5 1人がウソをついているときに、他方が自白をしたら、ウソをついた側は無罪となり（利得は4）、自白した側は重罪に問われる（利得は0）。この場合司法取引はない。

Case 6 2人が共にウソをついたなら、重大犯を確定できないので、裁判は維持できない。従って、軽い刑罰を受けるだけなので、利得は共に3である。

コメント Case 1～Case 6 の解釈に異論のある人がいるかも知れない。

これらの結果を利得表で表わそう（左側が X、右側が Y である）。

⁶ウソをつく にはいろいろなスペクトルがあるが、ここではこのように定義しておく

X \ Y	C	D	L
C	3, 3	0, 4	1, 1
D	4, 0	1, 1	0, 4
L	1, 1	4, 0	3, 3

利得表

上の表の (L,L) は、各囚人が利己的に行動しているのに、結果として重罪犯を特定させないという“協調行動”をしたことになっている（その意味で、パレート最適！）。従って、量子囚人のジレンマの戦略 Q は、修正囚人のジレンマの“ウソをつく”という選択肢 L に対応していると思う。

コメント 囚人にとって選択肢

(C) 黙秘を続ける (D) 罪を自白する (L) ウソをつく

の中で、どれが一番心理的ポテンシャルが低いのであろうか？ 私考えでは L である。

[VI] おわりに

付章 量子力学

A. 量子力学とは何か

量子力学とは、簡単に準備出来る状態 (non-entangled state) を初期値とし、シュレーディンガー方程式によって時間発展させ、複雑な状態 (entangled state) を作る力学系のことである。

ここまでは“高天ヶ原の世界”の出来事であって、これを地上の世界に引き戻すのが観測である。しかし、観測行為はミクロとマクロの相互作用を引き起こし、波束の収縮等やっかいな問題を提出する。

B. 量子力学の公理

量子力学の公理系をおさらいする [7]。

1. 重ね合わせの原理 (superposition principle)

状態 $|a\rangle$ と状態 $|b\rangle$ とが可能な状態であれば、 α と β を複素数として、その重ね合わせ $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ も可能な状態である。

2. シュレーディンガー方程式 (Schrödinger equation)

状態の時間発展はシュレーディンガー方程式に従って、ユニタリーな発展をする。即ち、

$$|\Psi\rangle \longrightarrow U(t)|\Psi\rangle$$

のように状態ベクトル $|\Psi\rangle$ は発展し、時間発展の演算子 U はユニタリー演算子 ($U^\dagger U = U U^\dagger = 1$) である。

3. 波束の収縮と確率解釈 (Copenhagen interpretation)

a 、 b をある物理量 (observable) Q の固有値とし、それらに対応する固有状態を $|a\rangle$ 、 $|b\rangle$ とする。重ね合わせの状態 $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ にあるとき物理量 Q を観測すると、状態は“波束の収縮”と呼ばれる遷移

$$\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle \rightarrow |a\rangle \quad \text{又は} \quad \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle \rightarrow |b\rangle$$

を起こす。各々の確率は、状態 $|a\rangle$ と状態 $|b\rangle$ とが規格化されているとして、 $|\alpha|^2$ と $|\beta|^2$ で与えられる ($|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$)。

4. 多粒子状態とテンソル積 (many particle state and tensor product)

多粒子の状態は、1粒子の状態の直積の重ね合わせ、即ちテンソル積になる。例えば、2粒子の状態として

$$\alpha|a\rangle \otimes |a\rangle + \beta|b\rangle \otimes |b\rangle \equiv \alpha|a\rangle|a\rangle + \beta|b\rangle|b\rangle$$

が可能である。

この公理系は、もちろん数学の意味での「公理系」ではない。特に、3が“難解”である。

C. 量子力学に対する不満

量子力学は、量子力学的粒子そのものを対象にはしていない。それらの“影”である波動関数を対象にしているのである。従って、我々がわかるのは、波動関数から得られる量子力学的粒子の存在確率のみである (コペンハーゲン解釈)。

このことは、アインシュタインやシュレーディンガーにとって受け入れがたい屈辱であった。とくに、アインシュタインは、「神はサイコロを振らない」と言って死ぬまでこの解釈を認めなかった (サイコロ = 確率)。

しかし、現代の実験技術の進歩は、ますますコペンハーゲン解釈の正しさを示しているようだ [8]。アインシュタイン 破れたり！ですね。

参考文献

- [1] 川越敏司：はじめてのゲームの理論, ブルーバックス B-1782, 講談社, 2012.
- [2] 筒井泉：量子で囚人を解き放つ, 日経サイエンス, 03 (2013), 40–47.
- [3] 藤井一幸 (兼編集)：数理の玉手箱, 遊星社, 2010.
- [4] 横田一郎, 佐倉直男, 味木博：ベクトルと行列, 現代数学社.
- [5] 佐武一郎：線形代数学, 裳華房, 1974.
- [6] 藤井一幸：量子計算とマジック行列, 数理科学 “代数的物理観”, 7 (2007), 30–35, サイエンス社.
- [7] 細谷暁夫：量子コンピュータの基礎, SGC ライブラリ 4, サイエンス社, 1999.
- [8] 外村彰：(目で見る美しい)量子力学, サイエンス社, 2010.
- [9] 藤井一幸：線形代数への誘い, 横浜市立大学講義録, 2014.
- [10] 藤井一幸：解析学の散歩道, 横浜市立大学講義録, 2014.
- [11] 笠原皓司：微分積分学 (サイエンス・ライブラリ 12), サイエンス社, 2000.
- [12] 笠原皓司：線形代数学 (サイエンス・ライブラリ 25), サイエンス社, 2000.
- [13] デービッド・アトキンソン：イギリス人アナリスト日本の国宝を守る, 講談社+ α 新書, 2014.
- [14] デービッド・アトキンソン：イギリス人アナリストだからわかった日本の「強み」「弱み」, 講談社+ α 新書, 2015.