

Google のページランクについて

横浜市立大学国際総合科学部 藤井一幸
山形大学名誉教授 大池宏清

概要

このノートで、Google が “ the heart of our software ” と言っているページランク (PageRank) を紹介する。web 上にある全ての homepages を (世界ランクのように) ランキングするのである。ここに Google のヒミツがある。

これが理解できれば、少しだけ鼻が高くなったような気分になれる。

[I] はじめに

Google を知らない大学生はいないであろう。Google を使ったことがない大学性もないであろう。しかし、Google の検索が何をしているのか知っている大学性はほとんどいないであろう。

このノートで、Google が “ the heart of our software ” と言っているページランク (PageRank not Page Rank) を紹介する。web 上にある全ての homepages をランキングして、直線的な関係をつけてしまう。

情報検索により ある homepage がヒットすると、ページランクにあるその homepage 及び (ランキングが) それ以下の homepages がぞろぞろとリストされる仕掛けである。

その手法は、完全に線形代数の問題に帰着される。線形代数をある程度知っていれば、理解することは比較的容易である。もちろん実行することには大変であるが。このような手法を考え出した Google の研究者や技術者には感心する。

さあ、紙と鉛筆を持って ページランクの世界 を探検しよう！

[II] ページランク

web 上にばら撒かれている (全ての?) homepages (以下 webpages と呼ぶ) を考える。それらの個数を N とし、順序づけられていると仮定する。各 webpage から残りの webpages に絡む何らかの量が引き出せれば、 N 次元ベクトルを対応させることが出来る。

$$\text{webpage} \longrightarrow \mathbf{R}^N.$$

従って、webpages には $N \times N$ 行列が対応する。

$$\text{webpages} \longrightarrow M(N; \mathbf{R}).$$

即ち、数学の土俵に乗るのである。

一般に homepage は、他の homepages を引用している（以下リンクと呼ぶ）。例えば、ある研究会（我々の場合では、沼津研究会）の homepage には、会場の情報やホテルの情報等がリンクされているハズである（沼津研究会の場合では、沼津高専の homepage や沼津駅付近のホテルの homepages 等）。

ある homepage が k 個の homepages をリンクしているとする（一般に、 N に比べて k は非常に小さい）。webpages は順序づけられているので、それらの場所を $n_1, n_2, \dots, n_k$ とする。各リンクに対して平等に $\frac{1}{k}$ を対応させることにする¹。もちろん、リンクしていなければ 0 とする。従って各 homepage に対してベクトル

$$\text{webpage} \longrightarrow (\dots 0 \overset{n_1}{\frac{1}{k}} 0 \dots 0 \overset{n_2}{\frac{1}{k}} 0 \dots \dots \dots 0 \overset{n_k}{\frac{1}{k}} 0 \dots)^T \in \mathbf{R}^N$$

を対応させることが出来る。ここに T はベクトルや行列の転置（Transpose）を意味する²。次の章の例をみよ。

以上のことから、webpages に対して Google 行列 H

$$H = (H_{ij}) \in M(N; \mathbf{R}) ; H_{ij} \geq 0, \quad H_{ii} = 0, \quad \sum_{i=1}^N H_{ij} = 1 \quad \text{for } 1 \leq j \leq N \quad (1)$$

を得ることが出来る。我々は self-citation を禁止するので $H_{ii} = 0$ としている。

ノート 全くリンクを出していない homepage で、他の homepages からはリンクされているものがあるだろう。この場合、零ベクトルになるので困るのである。これに対していろいろな解決法があるので、特にコメントしない。即ち、全ての homepages はリンクしていると仮定する。

Google では、だいたい $N = 10^9$ （10億）くらいと言われている。まさに巨大行列である。しかし、その構成から H の成分はほとんど零である。このような行列は疎行列（sparse matrix）と呼ばれている（藤井は、スカスカ行列と呼んでいる）。従って、Google 行列は巨大な疎行列（スカスカ行列）である。

この H を解析しよう。ある重要な性質が簡単にわかる。(1) の H ではなく、その転置行列 H^T を考える。ベクトル J を

$$J = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbf{R}^N$$

とおくと、(1) から

$$H^T J = J \quad (2)$$

がわかる。行列式の基本的性質より、固有多項式は

$$0 = |\lambda E - H| = |\lambda E - H^T|$$

¹一般にリンクする homepages のウエイトは違うであろう。しかし、外部からそれらを理解することは難しいので、同じウエイトにしている。物理学の“平均場近似”みたいなものである。

²一般にベクトルは、タテベクトルが標準である。

となるので、 H と H^T の固有値は等しい (線形代数の教科書を見よ)。従って、(2) より 1 は H の固有値なので、その固有ベクトルを I として、方程式

$$HI = I \quad (3)$$

を得る。これを Google 方程式と呼ぼう。少し変形する。

$$H(tI) = (tI)$$

なので、 $t = 1/\{I \text{ の全ての和} \}$ とおくと、ベクトル tI は全ての和が 1 と出来る。これを stochastic と呼ぶ (訳がわからないのでそのままにする)。従って、(3) の I は初めから stochastic と仮定する。この I がページランク (PageRank) で³、Google の中心的役割を果たす。

ここで Google 行列の基本的性質を述べよう。

補題 λ を Google 行列 H の任意の固有値とする。このとき

$$|\lambda| \leq 1 \quad (4)$$

が成り立つ。これより $\lambda = 1$ は、 H の最大固有値であることがわかる。

証明は比較的簡単で、Gerschgorin の定理 [3] より得られる。少し準備をしておく。 H と H^T の固有値は同じなので、以下転置行列 H^T を考える。(1) より、全ての i と j に対して

$$\sum_{j=1}^N (H^T)_{ij} = \sum_{j=1}^N H_{ji} = 1 \quad \text{and} \quad (H^T)_{ii} = H_{ii} = 0 \quad (5)$$

である。

Gerschgorin の定理を述べよう。 $A = (a_{ij})$ を複素 $n \times n$ 行列 (我々の場合は、実行列) とし、全ての i に対して

$$R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

及び

$$D(a_{ii}; R_i) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - a_{ii}| \leq R_i\}$$

とおく。これは a_{ii} を中心、半径 R_i の円盤で、Gerschgorin の円盤と言われている。

定理 (Gerschgorin) A の任意の固有値 λ に対して

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^n D(a_{ii}; R_i) \quad (6)$$

³後でわかるが、 I の各成分は非負で、その和が 1 なので、順序をつけることが出来る。それが PageRank であるが、簡単のため I を PageRank と呼ぶ。

が成り立つ。

証明は簡単である。方程式

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \quad (7)$$

を考え、 $|x_i|$ を

$$|x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} \neq 0$$

とする。もちろん

$$\left|\frac{x_j}{x_i}\right| \leq 1 \quad \text{for } 1 \leq j \leq n$$

である。(7) から

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \lambda x_i \iff \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j = \lambda x_i - a_{ii}x_i = (\lambda - a_{ii})x_i$$

となる。 $x_i \neq 0$ より

$$\lambda - a_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \frac{x_j}{x_i}$$

で、計算すると

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \right| = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \left| \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| = R_i$$

となる。これは $\lambda \in D(a_{ii}; R_i)$ で、且つ i は全ての可能性があるので (6) を得る。

補題の証明をしよう。我々のケースでは、全ての i に対して

$$(H^T)_{ii} = 0, \quad R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N (H^T)_{ij} = \sum_{j=1}^N (H^T)_{ij} = 1$$

なので、結論

$$|\lambda| \leq 1$$

を得る。

コメント 普通は、正値行列のフロベニウスの理論に持ち込んで証明をする。Gerschgorin の定理を用いる我々の手法が既知か否か知らないが (多分知られていない) 簡潔で よりクリアである。

次に、固有ベクトル I (stochastic vector) を求めよう。ここで H の固有値に関して次の仮定をおく。

$$\lambda_1 = 1 > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_N|. \quad (8)$$

最大固有値 1 が simple root であることに注意せよ。

コメント 1 が H の simple root であるかは、固有多項式 ($f(\lambda) = |\lambda E - H| = 0$) を解かなければわからない。しかし、 $N = 10^9$ の場合に解くことは不可能である。しかしである。例えば、方程式

$$(x - 1)^4 = 0$$

を考えよう。 $x = 1$ は 4 重根であるが、少しの摂動を入れて

$$(x - 1)^4 - \epsilon(x - 1) = 0 \quad (0 < \epsilon)$$

にすると、重複が解けて simple root になる。webpages には、次々に新しい homepages が加わってくるので (摂動項と思う) 仮定 (8) は問題ないと思う (?)。

I を求めるのに、冪乗法 (power method) と呼ばれている簡単な方法がある⁴。ベクトルの数列 $\{I_n\}$ を

$$I_n = H I_{n-1} \quad \text{and} \quad I_0 : \text{初期値} \quad (9)$$

と定義する。初期値 I_0 は通常 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ にとる。後の章で反例を出す。 (9) を書き直すと

$$I_n = H^n I_0 = H^n \mathbf{e}_1$$

となり、まさに冪乗法である。

もし $\{I_n\}$ があるベクトル K に収束すれば、そのとき

$$H K = H \left(\lim_{n \rightarrow \infty} I_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} H I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{n+1} = K$$

より $K = I$ となる。即ち、Google 方程式 (3) を得る。

コメント 仮定 (8) のもとで $\{I_n\}$ の収束の証明は難しくない (線形代数の教科書を見よ)。しかし、 H は巨大行列なので冪乗法は本当に有効なのか? という疑問が出てくる。実は、 H は疎行列 (スカスカ行列) なので、ある程度の冪乗はそれほど問題にならない。本当の問題点は 収束の速さ なのである。これは $|\lambda_2| < 1$ の大きさのに絡んでくる。

問題を出してこの章を閉めよう。

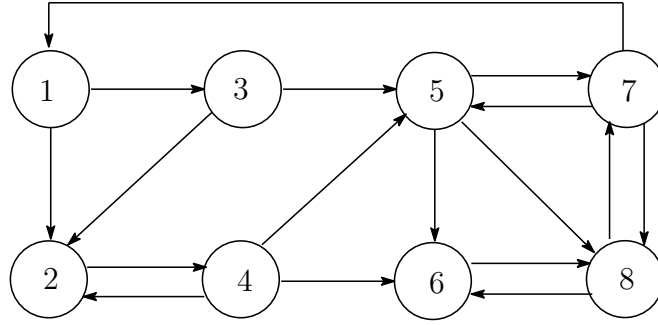
問題 H の固有多項式を求めずに、 $|\lambda_2|$ を求める (近似する) 方法を提出せよ。

[III] 例 1

この章で論文 [1] にある具体例を徹底的に計算する。若い読者には有益であろう。

例: 8 個のリンクのある webpages ($N = 8$) を考える:

⁴—一般論であるが、巨大な対象物には simple な方法がベターである。



この有向グラフに対する Google 行列は

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

で、その転置行列は

$$H^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

である。簡単なのでチェックせよ。

ここで

$$J = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right)^T$$

とおくと (stochastic)

$$H^T J = J \quad (12)$$

である。

これ以降の計算には数式処理の MATHEMATICA を使う (手計算では無理である)。
 H の固有多項式を求めよう。

$$f(\lambda) = |\lambda E - H|$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \lambda & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \lambda & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda(\lambda-1) \left(\lambda^6 + \lambda^5 - \frac{1}{9}\lambda^4 - \frac{1}{6}\lambda^3 + \frac{7}{108}\lambda^2 + \frac{11}{216}\lambda + \frac{1}{72} \right). \quad (13)
\end{aligned}$$

これより固有値が得られる（ H は対称行列ではないので、固有値は一般に複素数である）。厳密解は $\{\lambda_1 = 1, \lambda_8 = 0\}$ で、近似解（約束：少数点以下の 5 桁目を四捨五入する。例えば、 $-0.87021\cdots = -0.8702$ ）は

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= -0.8702, \quad \lambda_3 = -0.5568, \\
\lambda_4 &= 0.4251 - 0.2914i, \quad \lambda_5 = 0.4251 + 0.2914i, \\
\lambda_6 &= -0.2116 - 0.2512i, \quad \lambda_7 = -0.2116 + 0.2512i
\end{aligned}$$

となる⁵。これらより

$$\lambda_1 = 1 > |\lambda_2| > |\lambda_3| > |\lambda_4| = |\lambda_5| > |\lambda_6| = |\lambda_7| > \lambda_8 = 0 \quad (14)$$

がわかる。確かに、固有値の仮定 (8) は満たしている。

次に $\lambda_1 = 1$ に対する固有ベクトルを求める。嬉しいことに厳密な固有ベクトルが求まるのである。

$$\hat{I} = (24, 27, 12, 27, 39, 81, 72, 118)^T.$$

練習問題として $H\hat{I} = \hat{I}$ を示せ（手計算で出来る）。 $\hat{I}$ の総和は 400 なので、ページランクは

$$I = \begin{pmatrix} \frac{24}{400} \\ \frac{27}{400} \\ \frac{12}{400} \\ \frac{27}{400} \\ \frac{39}{400} \\ \frac{81}{400} \\ \frac{72}{400} \\ \frac{118}{400} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.06 \\ 0.0675 \\ 0.03 \\ 0.0675 \\ 0.0975 \\ 0.2025 \\ 0.18 \\ 0.295 \end{pmatrix} \quad (15)$$

となる。

⁵このような計算は、MATHEMATICA や MAPLE 等の数式処理ソフトなしでは無理である。

以上のことより、webpages のランキングは

$$\text{page 8} > \text{page 6} > \text{page 7} > \text{page 5} > \text{page 2} = \text{page 4} > \text{page 1} > \text{page 3} \quad (16)$$

となる。もう一度グラフを見よ。

(10) の H に対して冪乗法を適用してみよう。数列 $\{I_n\}$ は

$$I_n = H^n I_0 \quad \text{and} \quad I_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

だった。また $|\lambda_2| \approx 0.87$ なので、 $\{I_n\}$ は収束する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I.$$

我々の計算をリストしよう：

$$I_{40} = \begin{pmatrix} 0.0601 \\ 0.0675 \\ 0.0299 \\ 0.0676 \\ 0.0976 \\ 0.2022 \\ 0.1797 \\ 0.2954 \end{pmatrix}, \quad I_{45} = \begin{pmatrix} 0.0600 \\ 0.0675 \\ 0.0300 \\ 0.0675 \\ 0.0975 \\ 0.2024 \\ 0.1800 \\ 0.2951 \end{pmatrix}, \quad I_{50} = \begin{pmatrix} 0.0600 \\ 0.0675 \\ 0.0300 \\ 0.0675 \\ 0.0975 \\ 0.2024 \\ 0.1799 \\ 0.2951 \end{pmatrix}, \quad I_{55} = \begin{pmatrix} 0.0600 \\ 0.0675 \\ 0.0300 \\ 0.0675 \\ 0.0975 \\ 0.2025 \\ 0.1800 \\ 0.2950 \end{pmatrix} \equiv I. \quad (17)$$

(15) と比較すると、55 乗で一致する（もちろん、40 乗くらいで十分）。この結果は $|\lambda_2| \approx 0.87$ の冪乗

$$(0.87)^{40} = 0.0038, \quad (0.87)^{45} = 0.0019, \quad (0.87)^{50} = 0.0009, \quad (0.87)^{55} = 0.0005 \quad (18)$$

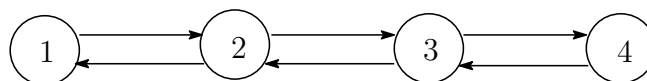
で決まっているハズである。最後に、これを問題として提出する。

問題 I_n と $(0.87)^n$ の関係を明らかにせよ。

[IV] 例 2

この章で、仮定 (8) を満たさない H に対して冪乗法を用いると、初期条件 e_1 のもとでは収束しない例を出す（ページランクは得られない）。それを改良するために別の初期条件を提出する。

例：4 個のリンクのある webpages ($N = 4$) を考える：



この有向グラフに対する Google 行列は

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

となる。

H の固有多項式は

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |\lambda E - H| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^4 - \frac{5}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4} \\ &= (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - \frac{1}{4}) \end{aligned} \quad (20)$$

で、解は

$$\lambda = \pm 1, \quad \pm \frac{1}{2} \quad (21)$$

となる。簡単なのでチェックせよ。 $\lambda = -1$ のため、仮定 (8) を満たさない。

ページランクは

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} \\ \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0.1667 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \\ 0.1667 \end{pmatrix} \quad (22)$$

である（少数点以下 5 桁目を四捨五入している）。簡単なのでチェックせよ。

このページランクは、初期条件

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

のもとでは得られないことを示そう。(19) より計算すると

$$I_{2n} = H^{2n} I_0 = \begin{pmatrix} a_n \\ 0 \\ c_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad I_{2n+1} = H^{2n+1} I_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_n \\ 0 \\ d_n \end{pmatrix} \quad (24)$$

となる。 a_n, b_n, c_n, d_n の値は必要ないので書かない。即ち、 $\{I_n\}$ は収束しない。

ここで別の初期条件を用いてみよう。

$$J_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \implies J_n = H^n J_0 \quad (25)$$

とおく。その理由は $H^T J_0 = J_0$ だったから。我々の計算をリストしよう：

$$J_{10} = \begin{pmatrix} 0.1667 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \\ 0.1667 \end{pmatrix}, \quad J_{11} = \begin{pmatrix} 0.1666 \\ 0.3334 \\ 0.3334 \\ 0.1666 \end{pmatrix}, \quad J_{12} = \begin{pmatrix} 0.1667 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \\ 0.1667 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

これより $n = 10$ で十分である。

この例では、明らかに J_0 が I_0 よりベターである。これは一般的に言えることなのかどうか分からない。問題を提出してこの章を閉じる。

問題 初期条件として

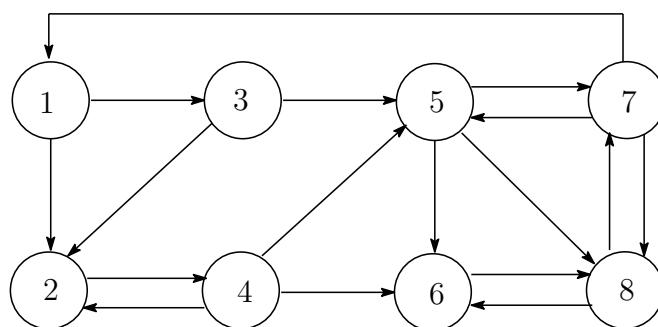
$$J_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N} \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad I_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

の場合、 J_0 は I_0 より優位か？

[V] おわりに

もう一度 [III] 章のグラフとランキングをリストする。

グラフ：



ランキング：

page 8 > page 6 > page 7 > page 5 > page 2 = page 4 > page 1 > page 3

ある情報検索で page 8 がヒットしたとする。このとき上のランキング通りに homepages がリストされる。page 5 は上から 4 番目であるが、グラフを見ると page 8 からリンクされていない（その逆はされているが）。つまり、あまり関係がないのである。

Google で情報検索すると意味不明の homepages がゾロゾロ出てくるのは、このことと関係しているハズである。

最後に、ページランクの世界の探検はいかがでしたか？ もう少し先に行きたくなることを希望して、ペンじゃなく、パソコンを閉じよう。

参考文献

- [1] David Austin : How Google Finds Your Needle in the Web's Haystack, Feature Column, monthly essays on mathematical topics, <http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-pagerank>.
- [2] Kazuyuki Fujii and Hiroshi Oike : A Superintroduction to Google Matrices for Undergraduates, to appear in Far East Journal of Mathematical Education, arXiv:1501.03467 [cs.SI].
- [3] Semyon Gerschgorin : Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix, Izv. Akad. Nauk. USSR Otd. Fiz.-Mat. Nauk 6 (1931), 749-754.
- [4] 藤井一幸・大池宏清：情報検索のベクトル空間モデルについて，横浜市立大学講義録, 2014.
- [5] 佐武一郎：線形代数学，裳華房, 1974.
- [6] 笠原皓司：線形代数学（サイエンス・ライブラリ 25），サイエンス社.
- [7] 横田一郎, 佐倉直男, 味木博：ベクトルと行列，現代数学社.
- [8] 藤井一幸：線形代数への誘い，横浜市立大学講義録, 2014.