ニュートリノは光速を越えられるか？†

横浜市立大学・国際総合科学部　藤井一幸（FUJII Kazuyuki)
International College of Arts and Sciences
Yokohama City University

２０１１年９月に衝撃的な論文が現れた⋯ OPERA neutrino experiment [1]. CERN から ニュートリノを（イタリアの）Gran Sasso (LNGS) へ打ち込む実験を繰り返し、その速度を測るとなんと真空中の光速より早い（！）というデータが得られたのである。特殊相対性理論を否定する現象であり、本当なら人類史上最高の発見であろう。でも、でも、⋯

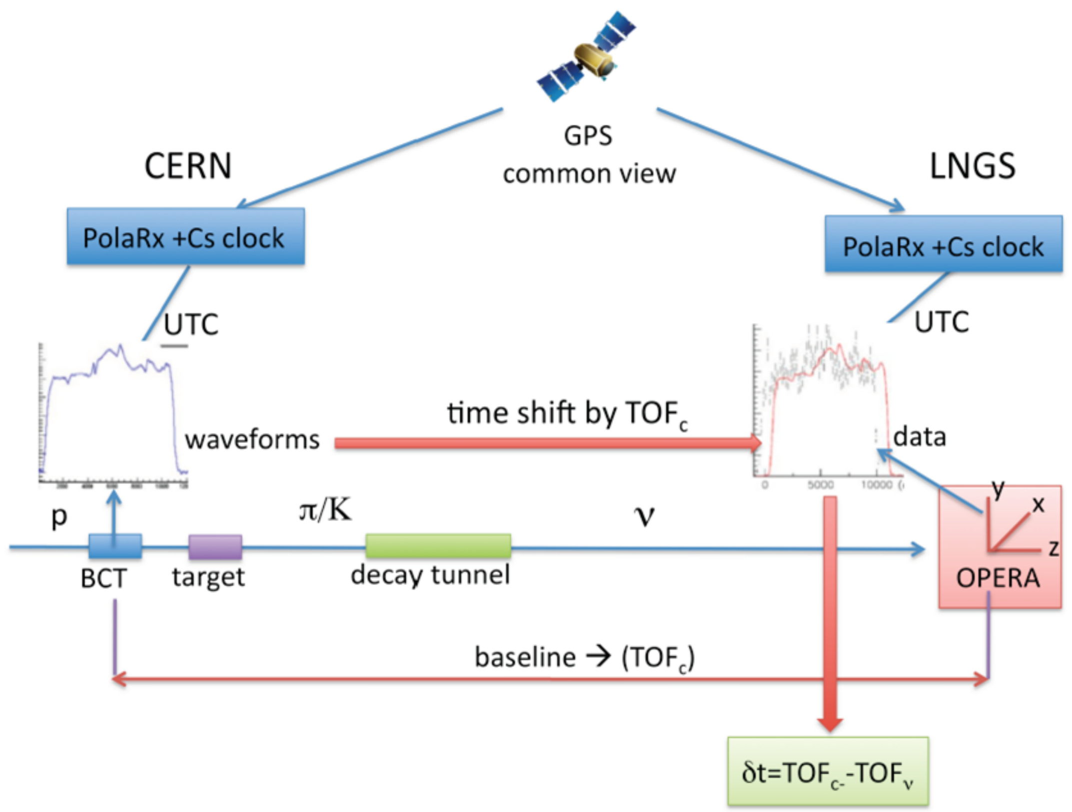

Fig. 5: Schematic of the time of flight measurement.

† 「量子化の幾何学 2011」, 11 月 18 日–19 日, 早稲田大学, での講演原稿（少し修正）

これに対して今のところ（藤井が理解している範囲で）３つの意見がある：

(1) 実験誤差である ··· Negative

(2) dynamical Lorentz symmetry breaking ··· Negative or Positive ?

(3) superluminal group velocity ··· Positive

藤井としては基本的に (1) を支持しているが、最近は (3) に少しばかり絡んでいる (entangled) * ので、今回は論文 [2] の内容を紹介することにする（(2) は守備範囲外なので、例えば [3] を見よ。)。結論は

「特殊相対性理論を壊さず」に可能である

と言うことである。量子力学の EPR (Einstein–Podolsky–Rosen) に似ているが、要するに

"情報"が光速を越えて伝わらなければ良い

のである。

重要な事実を「ていり」（漢字ではない）として記しておく。

「ていり」

講演者は必ずしも講演内容を理解しているとは限らない。

*論文 [2] の ACKNOWLEDGMENTS を見よ

準備

○ **レプトン の世代** [9], [10]：
レプトン (Lepton) の三世代は

$$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

で、左から (電子, 電子ニュートリノ)、(ミュー, ミュー・ニュートリノ)、(タウ, タウ・ニュートリノ) である。更に各々は単独ではなく、微妙に重ね合わさっている。例えば

$$\nu'_\mu = \cos\Theta\ \nu_\mu - \sin\Theta\ \nu_\tau, \quad \nu'_\tau = \sin\Theta\ \nu_\mu + \cos\Theta\ \nu_\tau$$

のように。この Θ を mixing angle と言う（非常に小さい)。従って現実は

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu'_\mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tau \\ \nu'_\tau \end{pmatrix}$$

となっている。

ついでに、mixing 行列

$$R(\Theta) = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

を Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata 行列と呼ぶようだ ([4], [5], [6])。

○ **ニュートリノ振動** [4]：
Neutrino oscillation is a quantum mechanical phenomenon predicted by Bruno Pontecorvo[1] whereby a neutrino created with a specific lepton flavor (electron, muon or tau) can later be measured to have a different flavor. The probability of measuring a particular flavor for a neutrino varies periodically as it propagates. Neutrino oscillation is of theoretical and experimental interest since observation of the phenomenon implies that **the neutrino has a non-zero mass**, which is not part of the original Standard Model of particle physics.

○ **量子力学の公理** [11], [12] ：

(1) 重ね合わせの原理

状態 $|a\rangle$ と状態 $|b\rangle$ が可能な状態であれば、α と β を複素数として、その重ね合わせ $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ も可能な状態である。

(2)　シュレーディンガー方程式

状態の時間発展はシュレーディンガー方程式に従って、ユニタリーな発展をする。即ち、

$$|\psi\rangle \;\longrightarrow\; U(t)|\psi\rangle$$

と状態ベクトル $|\psi\rangle$ は発展し、時間発展の演算子 $U(t)$ はユニタリー演算子である。

(3)　波束の収縮と確率解釈

a, b をある物理量（observable）Q の固有値とし、それらの固有状態をそれぞれ $|a\rangle$, $|b\rangle$ とする。重ね合わせの状態 $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ にあるとき、物理量 Q を観測すると状態は "波束の収縮" と呼ばれる遷移

$$\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle \longrightarrow |a\rangle \quad \text{or} \quad \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle \longrightarrow |b\rangle$$

を起こす。各々の確率は（状態 $|a\rangle$ と $|b\rangle$ が規格化されているとして）$|\alpha|^2$ と $|\beta|^2$ で与えられる（$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$）。

○ ２準位系

２準位系（two level system）を考える。$\mathbf{C}^2 = \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle)$ such that

$$|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\phi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

として、この空間に パウリ作用素等

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad 1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が作用する。

このとき

$$\sigma_x|\phi_1\rangle = |\phi_2\rangle, \quad \sigma_x|\phi_2\rangle = |\phi_1\rangle$$
$$\sigma_z|\phi_1\rangle = |\phi_1\rangle, \quad \sigma_z|\phi_2\rangle = -|\phi_2\rangle$$

に注意せよ（量子計算で重要になる）。

コメント　neutrino oscillation の理論と quantum computation とは相性が良い。例えば [7] を見よ。もっと深い研究が待たれる。

２準位モデルから始めよう [8], [13]（ここでは $c = 1$ にセットされている）。

In the ultra-relativistic limit the Dirac equation for two neutrinos can be reduced to a Schrödinger form written in terms of a two component vector of positive energy probability amplitude.

The two neutrino flavor can be mapped to a two–level quantum system with distinct energy eigenvalues, $E_i \simeq p + m_i^2/2p$ in the ultra-relativistic limit along with the assumption of equal fixed momenta (or energy).

ハミルトニアンは

$$\mathbf{H} = \left\{ \left(pc + \frac{\epsilon_0}{2} \right) 1_2 + \frac{\epsilon}{2} \{ \sin(2\Theta)\sigma_x - \cos(2\Theta)\sigma_z \} \right\} \otimes \mathbf{1} \equiv H \otimes \mathbf{1} \tag{1}$$

となる。ここに

$$\epsilon_0 = \frac{(m_1^2 + m_2^2)c^4}{2pc}, \quad \epsilon = \frac{(m_2^2 - m_1^2)c^4}{2pc}$$

で、c は光速、m_i はニュートリノの質量、E_i はそのエネルギーで近似値

$$E_i = \sqrt{(cp)^2 + (m_i c^2)^2} \approx cp + \frac{m_i^2 c^3}{2p} = cp + \frac{m_i^2 c^4}{2pc}$$

を用いている。ここで二つの運動量は同じと仮定している（$p_1 = p_2 = p$）。そして Θ は二つのニュートリノの mixing angle in vacuum である。

問題点　この（近似）ハミルトニアンは no problem か？

(1) の H を行列の形で書き直すと

$$H = \begin{pmatrix} pc + \frac{\epsilon_0}{2} - \frac{\epsilon}{2}\cos(2\Theta) & \frac{\epsilon}{2}\sin(2\Theta) \\ \frac{\epsilon}{2}\sin(2\Theta) & pc + \frac{\epsilon_0}{2} + \frac{\epsilon}{2}\cos(2\Theta) \end{pmatrix} \tag{2}$$

となる。H の固有多項式

$$\begin{aligned} 0 &= |\lambda E - H| = \begin{vmatrix} \lambda - (pc + \frac{\epsilon_0}{2}) + \frac{\epsilon}{2}\cos(2\Theta) & -\frac{\epsilon}{2}\sin(2\Theta) \\ -\frac{\epsilon}{2}\sin(2\Theta) & \lambda - (pc + \frac{\epsilon_0}{2}) - \frac{\epsilon}{2}\cos(2\Theta) \end{vmatrix} \\ &= \left\{ \lambda - (pc + \frac{\epsilon_0}{2}) \right\}^2 - \frac{\epsilon^2}{4}\cos^2(2\Theta) - \frac{\epsilon^2}{4}\sin^2(2\Theta) \\ &= \left\{ \lambda - (pc + \frac{\epsilon_0}{2}) \right\}^2 - \frac{\epsilon^2}{4} \end{aligned}$$

より、固有値は

$$E_{\pm} = pc + \frac{\epsilon_0}{2} \pm \frac{\epsilon}{2} \equiv E_0 \pm \frac{\epsilon}{2} \tag{3}$$

となる。これらに対応する固有ベクトルは

$$
\begin{aligned}
|\phi_-\rangle &= \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ -\sin\Theta \end{pmatrix} = \cos\Theta|\phi_1\rangle - \sin\Theta|\phi_2\rangle \\
|\phi_+\rangle &= \begin{pmatrix} \sin\Theta \\ \cos\Theta \end{pmatrix} = \sin\Theta|\phi_1\rangle + \cos\Theta|\phi_2\rangle
\end{aligned}
$$

となる（チェックせよ）。このとき行列

$$(|\phi_-\rangle, |\phi_+\rangle) = R(\Theta)$$

（Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata 行列）のもとで H は対角化出来て

$$H = R(\Theta)\begin{pmatrix} E_0 - \frac{\epsilon}{2} & 0 \\ 0 & E_0 + \frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix} R(\Theta)^\dagger = R(\Theta)\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} R(\Theta)^\dagger$$

となる。スペクトル分解では

$$H = \left(E_0 - \frac{\epsilon}{2}\right)|\phi_-\rangle\langle\phi_-| + \left(E_0 + \frac{\epsilon}{2}\right)|\phi_+\rangle\langle\phi_+| \tag{4}$$

と書ける。

(1) の $\mathbf{H}$ の固有ベクトルを、flavor と momentum の同時固有ベクトル

$$H|\phi_\pm, p\rangle = E_\pm|\phi_\pm, p\rangle, \quad \hat{p}|\phi_\pm, p\rangle = p|\phi_\pm, p\rangle$$

とすると

$$
\begin{aligned}
|\phi_-, p\rangle &= \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ -\sin\Theta \end{pmatrix} \otimes |p\rangle = \cos\Theta|\phi_1, p\rangle - \sin\Theta|\phi_2, p\rangle \\
|\phi_+, p\rangle &= \begin{pmatrix} \sin\Theta \\ \cos\Theta \end{pmatrix} \otimes |p\rangle = \sin\Theta|\phi_1, p\rangle + \cos\Theta|\phi_2, p\rangle
\end{aligned} \tag{5}
$$

で与えられる（チェックせよ）。

次に、このシステムの時間発展を考える。

公式は

$$|\psi_t\rangle = \int dp' e^{-it\mathbf{H}(p')/\hbar}\,|\psi_0\rangle \tag{6}$$

で、(4) を用いて計算すると

$$\begin{aligned}|\psi_t\rangle &= \int dp' \left\{ e^{-it\left(E_0+\frac{\epsilon}{2}\right)/\hbar}|\phi_+,p'\rangle\langle\phi_+,p'|\psi_0\rangle + e^{-it\left(E_0-\frac{\epsilon}{2}\right)/\hbar}|\phi_-,p'\rangle\langle\phi_-,p'|\psi_0\rangle \right\} \\ &= \int dp' e^{-itE_0/\hbar}\left\{ e^{-it\frac{\epsilon}{2\hbar}}\langle\phi_+,p'|\psi_0\rangle|\phi_+,p'\rangle + e^{it\frac{\epsilon}{2\hbar}}\langle\phi_-,p'|\psi_0\rangle|\phi_-,p'\rangle \right\} \qquad (7)\end{aligned}$$

となる（note that $E_0 = E_0(p'),\ \epsilon = \epsilon(p'),\ \epsilon_0 = \epsilon_0(p')$）。

ここで仮定をする。即ち、出発点は one neutrino flavor で、initial amplitude of the neutrino waveform は

$$\langle\phi_2,p|\psi_0\rangle = 0, \quad \langle\phi_1,p|\psi_0\rangle = \langle p|\psi_0\rangle \qquad (8)$$

とする。この仮定のもとで (7) は、(5) を用いて書き直すと

$$\begin{aligned}&|\psi_t\rangle = \int dp' e^{-itE_0/\hbar}\langle p'|\psi_0\rangle \times \\ &\left[e^{-it\frac{\epsilon}{2\hbar}}\left\{\sin^2\Theta|\phi_1,p'\rangle + \sin\Theta\cos\Theta|\phi_2,p'\rangle\right\} + e^{it\frac{\epsilon}{2\hbar}}\left\{\cos^2\Theta|\phi_1,p'\rangle - \sin\Theta\cos\Theta|\phi_2,p'\rangle\right\}\right] \qquad (9)\end{aligned}$$

となる。

いよいよ観測に入る。まず、flavor 1 を検出して、その直後に位置を観測する（大事なことは、連続して検出すること）。

The collapsed state when flavor 1 is detected は

$$|\psi_t\rangle \longrightarrow |\psi_t'\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}}}\int dp'|\phi_1,p'\rangle\langle\phi_1,p'|\psi_t\rangle \qquad (10)$$

で与えられる。ここに $\mathcal{D}$ は normalization factor で

$$\mathcal{D} = \int dp'\langle\psi_t|\phi_1,p'\rangle\langle\phi_1,p'|\psi_t\rangle \qquad (11)$$

である ($\langle\psi_t'|\psi_t'\rangle = 1$)。

ノート operator

$$\int dp'|\phi_1,p'\rangle\langle\phi_1,p'|$$

は projection operator (: $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P},\ \mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}$) である。

flavor 1 を検出してその直後に位置を観測するのであるが、実際には難しいので（ニュートリノ達の）到達した位置の平均で置き換える。

問題点 この置き換えはとくに問題があるとは思わない。

従って the position measurement on the collapsed state $|\psi_t'\rangle$ は

$$\langle x_t\rangle = \int dp'\langle\psi_t'|p'\rangle\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\right)\langle p'|\psi_t'\rangle$$

で与えられる（置き換える）。

ノート operator

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$$

は **位置を表す演算子** である。何故なら

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\langle p|x\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}e^{-ixp/\hbar} = xe^{-ixp/\hbar} = x\langle p|x\rangle$$

であるから。

これを (10) を用いて書き直すと

$$\langle x_t\rangle = \frac{1}{\mathcal{D}}\int dp'\langle\psi_t|\phi_1, p'\rangle\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\right)\langle\phi_1, p'|\psi_t\rangle \equiv \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}} \tag{12}$$

となる。

次に、$\langle\phi_1, p'|\psi_t\rangle$ を計算しよう。(9) より

$$\langle\phi_1, p'|\psi_t\rangle = \langle p'|\psi_0\rangle F(p') \tag{13}$$

and

$$F(p') = e^{-itE_0/\hbar}\left(\sin^2\Theta e^{-it\epsilon/2\hbar} + \cos^2\Theta e^{it\epsilon/2\hbar}\right) \tag{14}$$

を得る。これを用いると normalization factor $\mathcal{D}$ は

$$\mathcal{D} = \int dp'|\langle p'|\psi_0\rangle|^2|F(p')|^2$$

と表せる。ここで仮定をおく。

The initial distribution of the neutrino momentum $|\langle p'|\psi_0\rangle|^2$ is narrow with respect to $F(p')$, and centered on $p' = p$ (p is fixed). Namely,

$$|\langle p'|\psi_0\rangle|^2 \approx \delta(p' - p).$$

問題点 （初期分布に関する）この仮定は特に問題があるとは思わない。

それ故

$$\mathcal{D} \approx |F(p)|^2 \tag{15}$$

を得る。後のため $|F(p)|^2$ を計算しておく。

公式 $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ として

$$|\alpha e^{-i\theta} + \beta e^{i\theta}|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\sin^2\theta$$

(チェックせよ)。

(14) にこの公式を適応すると

$$\begin{aligned}
|F(p)|^2 &= |\sin^2\Theta e^{-it\epsilon/2\hbar} + \cos^2\Theta e^{it\epsilon/2\hbar}|^2 \\
&= \left(\sin^2\Theta + \cos^2\Theta\right)^2 - 4\sin^2\Theta\cos^2\Theta\sin^2\left(\frac{t\epsilon}{2\hbar}\right) \\
&= 1 - (2\sin\Theta\cos\Theta)^2\sin^2\left(\frac{t\epsilon}{2\hbar}\right) \\
&= 1 - \sin^2(2\Theta)\sin^2\left(\frac{t\epsilon}{2\hbar}\right) \qquad (16)
\end{aligned}$$

を得る (note that $\epsilon = \epsilon(p)$) 。

(12) 式の $\mathcal{N}$ に、関係式 (13) を代入すると

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} &= \int dp' \langle\psi_t|\phi_1, p'\rangle \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\right)\langle\phi_1, p'|\psi_t\rangle \\
&= \int dp' \bar{F}(p')\langle\psi_0|p'\rangle \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\right)\{\langle p'|\psi_0\rangle F(p')\} \\
&= \int dp' |F(p')|^2\langle\psi_0|p'\rangle \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\right)\langle p'|\psi_0\rangle + \int dp' |\langle p'|\psi_0\rangle|^2 \bar{F}(p')\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\right)F(p') \\
&\equiv \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2
\end{aligned}$$

となる。$\mathcal{N}_1$ と $\mathcal{N}_2$ とを計算しよう。

まず

$$\mathcal{N}_1 = \mathrm{Re}\mathcal{N}_1 + i\mathrm{Im}\mathcal{N}_1$$

より

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\mathcal{N}_1 &= \frac{1}{2i}\left(\mathcal{N}_1 - \bar{\mathcal{N}}_1\right) \\
&= \frac{\hbar}{2}\int dp' |F(p')|^2 \left\{\langle\psi_0|p'\rangle\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\psi_0\rangle + \langle p'|\psi_0\rangle\frac{\partial}{\partial p'}\langle\psi_0|p'\rangle\right\} \\
&= \frac{\hbar}{2}\int dp' |F(p')|^2 \frac{\partial}{\partial p'}\{\langle p'|\psi_0\rangle\langle\psi_0|p'\rangle\} \\
&= \frac{\hbar}{2}\int dp' |F(p')|^2 \frac{\partial}{\partial p'}|\langle p'|\psi_0\rangle|^2 \\
&\quad \text{(部分積分より)} \\
&= -\frac{\hbar}{2}\int dp' |\langle p'|\psi_0\rangle|^2 \frac{\partial}{\partial p'}|F(p')|^2 \qquad (17)
\end{aligned}$$

となる。ここで仮定 $|\langle p'|\psi_0\rangle|^2 \approx \delta(p'-p)$ を用いて

$$\mathrm{Im}\mathcal{N}_1 \approx -\frac{\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}|F(p)|^2$$

を得る。同様にして

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\mathcal{N}_1 &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{N}_1+\bar{\mathcal{N}_1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\int dp'|F(p')|^2\left\{\langle\psi_0|p'\rangle\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\right)\langle p'|\psi_0\rangle-\langle p'|\psi_0\rangle\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\right)\langle\psi_0|p'\rangle\right\} \quad (18)\end{aligned}$$

となる。残念ながらこれ以上変形できない（ようだ）。ここで再び仮定 $|\langle p'|\psi_0\rangle|^2\approx\delta(p'-p)$ より、積分範囲は十分に狭いので

$$\mathrm{Re}\mathcal{N}_1\approx|F(p)|^2\ \frac{1}{2}\int dp'\left\{\langle\psi_0|p'\rangle\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\right)\langle p'|\psi_0\rangle-\langle p'|\psi_0\rangle\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\right)\langle\psi_0|p'\rangle\right\}$$

と近似する。そして部分積分を用いて

$$\mathrm{Re}\mathcal{N}_1\approx|F(p)|^2\int dp'\left\{\langle\psi_0|p'\rangle\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\right)\langle p'|\psi_0\rangle\right\}=|F(p)|^2\ \langle x_0\rangle$$

となる。

問題点　この近似は no problem か？

以上のことから近似値

$$\mathcal{N}_1\approx|F(p)|^2\langle x_0\rangle-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}|F(p)|^2 \quad (19)$$

を得る。

$\mathcal{N}_2$ に対しても仮定 $|\langle p'|\psi_0\rangle|^2\approx\delta(p'-p)$ を用いて

$$\mathcal{N}_2\approx\bar{F}(p)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)F(p)=i\hbar\bar{F}(p)\frac{\partial}{\partial p}F(p) \quad (20)$$

を得る。

(19) と (20) とを合わせると

$$\begin{aligned}\mathcal{N}=\mathcal{N}_1+\mathcal{N}_2 &= |F(p)|^2\langle x_0\rangle-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}|F(p)|^2+i\hbar\bar{F}(p)\frac{\partial}{\partial p}F(p)\\ &= |F(p)|^2\langle x_0\rangle+\frac{i\hbar}{2}\left\{\bar{F}(p)\frac{\partial}{\partial p}F(p)-\frac{\partial}{\partial p}\bar{F}(p)F(p)\right\} \quad (21)\end{aligned}$$

で、(12) 及び (15) より

$$\langle x_t\rangle=\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}=\frac{\mathcal{N}}{|F(p)|^2}=\langle x_0\rangle+\frac{i\hbar}{2}\frac{\bar{F}(p)\frac{\partial}{\partial p}F(p)-\frac{\partial}{\partial p}\bar{F}(p)F(p)}{|F(p)|^2} \quad (22)$$

を得る。

(14) 式

$$F(p) = e^{-itE_0/\hbar}\left(\sin^2\Theta e^{-it\epsilon/2\hbar} + \cos^2\Theta e^{it\epsilon/2\hbar}\right)$$

を用いて、(22) を計算しよう。$E_0 = E_0(p)$ 及び $\epsilon = \epsilon(p)$ に注意して

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p}F(p) &= -i\frac{t}{\hbar}\frac{\partial E_0}{\partial p}F(p) + e^{-itE_0/\hbar}\left\{\sin^2\Theta e^{-it\epsilon/2\hbar}\left(-i\frac{t}{2\hbar}\frac{\partial\epsilon}{\partial p}\right) + \cos^2\Theta e^{it\epsilon/2\hbar}\left(i\frac{t}{2\hbar}\frac{\partial\epsilon}{\partial p}\right)\right\} \\
&= -i\frac{t}{\hbar}\frac{\partial E_0}{\partial p}F(p) - i\frac{t}{2\hbar}\frac{\partial\epsilon}{\partial p}e^{-itE_0/\hbar}\left(\sin^2\Theta e^{-it\epsilon/2\hbar} - \cos^2\Theta e^{it\epsilon/2\hbar}\right)
\end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned}
\bar{F}(p)\frac{\partial}{\partial p}F(p) &= -i\frac{t}{\hbar}\frac{\partial E_0}{\partial p}|F(p)|^2 \\
&\quad -i\frac{t}{2\hbar}\frac{\partial\epsilon}{\partial p}\left(\sin^2\Theta e^{-it\epsilon/2\hbar} - \cos^2\Theta e^{it\epsilon/2\hbar}\right)\left(\sin^2\Theta e^{it\epsilon/2\hbar} + \cos^2\Theta e^{-it\epsilon/2\hbar}\right) \\
&= -i\frac{t}{\hbar}\frac{\partial E_0}{\partial p}|F(p)|^2 - i\frac{t}{2\hbar}\frac{\partial\epsilon}{\partial p}\left(\sin^4\Theta - \cos^4\Theta + **\right) \\
&= -i\frac{t}{\hbar}\frac{\partial E_0}{\partial p}|F(p)|^2 - i\frac{t}{2\hbar}\frac{\partial\epsilon}{\partial p}\left(\sin^2\Theta - \cos^2\Theta + **\right)
\end{aligned}$$

より（ $**$ は後になくなる terms）

$$\begin{aligned}
\frac{i\hbar}{2}\left(\bar{F}(p)\frac{\partial}{\partial p}F(p) - \text{c.c.}\right) &= t\frac{\partial E_0}{\partial p}|F(p)|^2 + \frac{t}{2}\frac{\partial\epsilon}{\partial p}\left(\sin^2\Theta - \cos^2\Theta\right) \\
&= t\frac{\partial E_0}{\partial p}|F(p)|^2 - \frac{t}{2}\frac{\partial\epsilon}{\partial p}\cos(2\Theta)
\end{aligned}$$

となる。従って平均値 $\langle x_t\rangle$ は (22) より

$$\langle x_t\rangle = \langle x_0\rangle + t\frac{\partial E_0}{\partial p} - \frac{t}{2}\frac{\cos(2\Theta)}{|F(p)|^2}\frac{\partial\epsilon}{\partial p}$$

となる。

群速度 (group velocity) は

$$\langle x_t\rangle - \langle x_0\rangle = v_g t \Longleftrightarrow v_g = \frac{\langle x_t\rangle - \langle x_0\rangle}{t} \tag{23}$$

で与えられるので

$$v_g = \frac{\partial E_0}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\cos(2\Theta)}{|F(p)|^2}\frac{\partial\epsilon}{\partial p} \tag{24}$$

となる。(1) より

$$E_0 = pc + \frac{\epsilon_0}{2}, \quad \epsilon_0 = \frac{(m_2^2 + m_1^2)c^4}{2pc}, \quad \epsilon = \frac{(m_2^2 - m_1^2)c^4}{2pc}$$

を思い出すと

$$\frac{\partial E_0}{\partial p} = c - \frac{\epsilon_0}{2p}, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial p} = -\frac{\epsilon}{p}$$

なので、代入して

$$v_g = c - \frac{\epsilon_0}{2p} + \mathcal{S}\frac{\epsilon}{2p} \tag{25}$$

を得る。ここに $\mathcal{S}$ は (16) を用いて

$$\mathcal{S} = \frac{\cos(2\Theta)}{|F(p)|^2} = \frac{\cos(2\Theta)}{1-\sin^2(2\Theta)\sin^2\left(\frac{t\epsilon}{2\hbar}\right)} \tag{26}$$

である。以上のことより

定理 群速度 v_g は

$$v_g = c - \frac{\epsilon_0}{2p} + \frac{\cos(2\Theta)}{1-\sin^2(2\Theta)\sin^2\left(\frac{t\epsilon}{2\hbar}\right)}\frac{\epsilon}{2p}$$

で与えられる。

分析を始めよう。そのために $\alpha = \sin^2\left(\frac{t\epsilon}{2\hbar}\right)$ とおき、$|\mathcal{S}| > 1$ となる条件を求める。

$$\begin{aligned}
& \mathcal{S} = \frac{\cos(2\Theta)}{1-\alpha\sin^2(2\Theta)} > 1 \\
\Longrightarrow \quad & \cos(2\Theta) > 1-\alpha\sin^2(2\Theta) = 1-\alpha(1-\cos^2(2\Theta)) \\
\Longrightarrow \quad & (1-\cos^2(2\Theta))\alpha > 1-\cos(2\Theta) \quad (1=\cos(2\Theta) \text{ を除く}) \\
\Longrightarrow \quad & \alpha > \frac{1}{1+\cos(2\Theta)} > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
& \mathcal{S} = \frac{\cos(2\Theta)}{1-\alpha\sin^2(2\Theta)} < -1 \\
\Longrightarrow \quad & -\cos(2\Theta) > 1-\alpha\sin^2(2\Theta) = 1-\alpha(1-\cos^2(2\Theta)) \\
\Longrightarrow \quad & (1-\cos^2(2\Theta))\alpha > 1+\cos(2\Theta) \quad (-1=\cos(2\Theta) \text{ を除く}) \\
\Longrightarrow \quad & \alpha > \frac{1}{1-\cos(2\Theta)} > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

従って

$$\alpha \equiv \sin^2\left(\frac{t\epsilon}{2\hbar}\right) > \frac{1}{2}$$

のとき、$|\mathcal{S}| > 1$ を得る。

$m_2 \gg m_1$ と仮定する。そのとき $\epsilon \approx \epsilon_0$ で、$\mathcal{S} > 1$ のとき

$$v_g = c + (\mathcal{S}-1)\frac{\epsilon_0}{2p} > c,$$

逆に $m_2 \ll m_1$ のとき $\epsilon \approx -\epsilon_0$ で、$\mathcal{S} < -1$ のとき

$$v_g = c - (1+\mathcal{S})\frac{\epsilon_0}{2p} > c$$

となる。どちらも**光速を越える**のである。

問題点　一般に世代が大きくなると質量は非常に大きくなる傾向がある。それ故仮定 $\cdots$ $m_2 \gg m_1$ or $m_2 \ll m_1$ $\cdots$ はそれほど不自然ではないと思う。

系　$\sin^2\left(\frac{t\epsilon}{2\hbar}\right) > \frac{1}{2}$ 及び $m_2 \gg m_1$ (or $m_2 \ll m_1$) と仮定する。このとき

$$v_g > c$$

が成り立つ。

ノート　$\Theta = 0$ のとき（即ち、ニュートリノの混合がないとき）$\mathcal{S} = 1$ なので

$$v_g = c - \frac{\epsilon_0}{2p} + \frac{\epsilon}{2p} = c - \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{2p} < c \quad (\Leftarrow\ \epsilon_0 > \epsilon)$$

となる。即ち、光速を越えない。

この結果をどのように解釈すればよいのか？ 論文 [2] の最後の方にこう書いている。

Of course, this does not mean that the speed of a possible signal transmitted with a neutrino wave-packet exceeds the speed of light, it is just a property that comes from the wave-packet deformation caused by the interference of the two possible quantum paths that a neutrino may follow before reaching the detector.

何が言いたいのかよく分からないが、「“情報”が光速を越えて伝わっているのではない」ので 特殊相対性理論と矛盾しない と言っているのであろう。

問題　この点を**我々のわかる言葉**で言い直せ。

イメージとして鶴の飛行（not 非行）を取り上げよう。鶴一羽では風や気流のためヒマラヤ越えは難しい。そこで鶴達は編隊飛行（システムとしての鶴 $\cdots$ 日航のことではない。念のため）をして風や気流を防いでヒマラヤ越えをするのである。確かに、一羽の鶴よりも 強さ も スピード も増すはずである。
同様にして、ニュートリノも CERN から LNGS まで単独で飛ぶのではなく、“編隊飛行”（重ね合わせ）をして、単独で飛ぶよりも speed up するのである。

最後に一つコメントしておく。

コメント　1987 年に岐阜県のカミオカンデで観測されたニュートリノは光とほとんど同時であった。それ故ニュートリノが光速を越えるのは矛盾するという議論がある（もしそう

なら、もっと早くカミオカンデに到達しているはず)。しかしこれは我々の立場からすると明らかにウソである。

何故なら、ニュートリノ達の重ね合わせ(mixing)は 宇宙空間を延々と飛行する間に Decoherence のため完全に壊れてしまう。従って $\Theta = 0$ ($\mathcal{S} = 1$) であり、上のノートで示されているようにニュートリノの速度はほぼ光速なのである。

結論 結論を一行で書くと

Probably YES but NOT

であろう。

天才バカボンのパパはいつも「わしは賛成の反対なのだ」と言っている。この流儀で言うと「ニュートリノは光速を越えるが(YES)、but 特殊相対論を破るものではない(NOT)」となる。要するに、仮に光速を越えても、情報が光速を越えて伝わらなければ良いのである。何故なら、因果律は保たれるから。

「これでいいのだ」とも天才バカボンのパパは言っている。彼は案外 "天才" なのかも知れない。

参考文献

[1] T. Adam et al : Measurement of the neutrino velocity with the OPERA detector in the CNGS beam, arXiv:1109.4897.

[2] A. Mecozzi and M. Bellini : Superluminal group velocity of neutrinos, arXiv:1110.1253.

[3] S. Nojiri and S. Odintsov : Could the dynamical Lorentz symmetry breaking induce the superluminal neutrinos ? arXiv:1110.0889.

[4] Wikipedia : Neutrino oscillation, www.wikipedia.org/.

[5] B. Pontecorvo : Mesonium and anti-mesonium, Sov. Phys. JETP. **6** (1957), 429.

[6] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata : Remarks on the unified model of elementary particles, Prog. Theo. Phys. **28** (1962), 870.

[7] C. Weinheimer : Neutrino oscillations with a polalized laser beam : an analogical demonstration experiment, Prog. Part. Nucl. Phys. **64** (2010) 205, arXiv:1001.2749 [quant-ph].

[8] P. Mehta : Topological phase in two flavor neutrino oscillations, Phys. Rev. D **79** (2009), 096013, arXiv:0901.0790 [hep-ph].

[9] 益川敏英 : **いま、もう一つの素粒子論入門**, parity books, 丸善株式会社, 1998.

[10] 小林誠 : **消えた反物質** · · · 素粒子物理が解く宇宙進化の謎, BLUE BACKS, 講談社, 1997.

[11] P. Dirac : **The Principles of Quantum Mechanics**, Fourth Edition, Oxford University Press, 1958.

[12] 細谷暁夫 : **量子コンピュータの基礎**, SGC ライブラリ 4, サイエンス社, 1999.

[13] C. W. Kim and A. Pevsner : **Neutrinos in physics and astrophysics**, Harwood Academic Publishers, 1993.

[14] 藤井一幸 (編集), 鈴木達夫, 浅田明, 待田芳徳, 岩井敏洋 : **数理の玉手箱**, 遊星社, 2010.