非アーベル ド・ラム理論と ゲージ場の分数冪

Non abelian de Rham theory and fractional powers of gauge fields

浅田　明　元信州大学[1]
ASADA Akira[2]

はじめに。非アーベル　ド・ラム理論は（線形群 G とそのリー環 $\mathfrak{g}$ に値を取る可積分接続の芽の層 $\mathcal{M}_d$ の（非アーベル）コホモロジー論である ([3]. cf.[1],[10])。$p \geq 2$ のときは $H^p(M, \mathcal{M}_d)$, M は可微分多様体、の定義は面倒で右手系と左手系の区別がいるが $H^1(M, \mathcal{M}_d)$ の定義は比較的簡単でゲージ (G-バンドル) の接続と曲率の非アーベル　コホモロジー的定式化を与える。

$H^1(M, \mathcal{M}_d)$ は以下のようにチェック式定義ができる。$\mathcal{U} = \{U\}$ を開被覆とし $\omega_{UV} = g_{UV}^{-1} dg_{UV}$ としたとき

$$\delta(\{\omega_{UV}\})_{UVW} = \omega_{VW} - \omega_{UW} + g_{VW}^{-1}\omega_{UV}g_{VW}, \omega_{UV} = g_{UV}^{-1}dg_{UV}$$

でコバウンダリー δ を定義する。$\delta\{\omega_{UV}\}_{UVW} = 0$ は

$$g_{UV}g_{VW}g_{WU} = c_{UVW}; \text{定数}$$

と同値である。バンドル（ゲージ）でなく ($c_{UVW} \neq 1$ でなく）意味のあるものがあるかは問題だったがバンドルの分数冪がこのようなものの例であることを示すのが本稿の目的である。

見やすい例として　$\{g_{UV}\}$ がライン・バンドルであれば p が非整数のとき

$$g_{UV}^p g_{vW}^p g_{WU}^p = 1^p (\neq 1)$$

となって (U, V, W ごとに 1^p を定めて）$\{g_{UV}^p\}$ はバンドルではないが非アーベル　ド・ラム理論の意味では $H^1(M, \mathcal{M}_d)$ の元を与える (一意的ではない)。M がリーマン面で p が有理数であれば $\{g_{UV}^p$ は M の分岐した有限葉被覆の上のライン・バンドルと解釈できる。分数量子ホール効果は相互作用のある多粒子系を扱うがその幾何学的背景としてライン・バンドルの分数冪がつかえないかは問題である (cf.[8],[9])。使えれば各粒子はそれぞれの被

覆の上を動き分岐点で相互作用すると言う描像が考えられるがどうだろうか？

非アーベル・ゲージでは $g_{UV}^p g_{VW}^p \neq (g_{UV}g_{VW})^p$ だから分数幂の定義自体が問題である。ここでは M の部分空間 S があって $M \setminus S$ で $\xi = \{g_{UV}\}$ が自明となる場合を考える。この場合

$$\xi | M \setminus S = \{h_U h_V^{-1}\}$$

として $h_U^p h_U^{-p} = cI$ を仮定すれば $\{h_U^p h_V^{-p}\}$ から $M \setminus S$ の上の非アーベル　ド・ラム　コサイクルが得られる。これを ξ の分数幂（の替わり）とすればその非アーベル　ド・ラム理論の意味での曲率は $M \setminus$ S では消えるがカレントとして S に台を持つ。これから意味の有ることが出ないかは興味がある。

ゲージ場の分数幂は切断として分数幂級数が現れる可能性があり　これから分数幂微積や微分形式の分数幂を考えられないかは問題になる。これについて問題提起だけだが最後の 5 節でふれる。

目次

1　1次元非アーベル　ド・ラム集合

M を可微分多様体とする。M の上の行列 $(M(n,\mathbb{C}))$ に値を取る可微分 1 −形式 ω で可積分;$d\omega + \omega \wedge \omega = 0$ となるものの芽の層を $\mathcal{M}_d$, $G = GL(n,\mathbb{C})$ とし G に値を取る定数関数と可微分関数の芽の層を $\mathcal{G}_t, \mathcal{G}_d$ とする。定義から

$$0 \to \mathcal{G}_t \xrightarrow{\iota} \mathcal{G}_d \xrightarrow{\rho} \mathcal{M}_d \to 0 \tag{1}$$

は（広義で）完全列である。ただし $\rho g = g^{-1}dg$, $\iota(g) = g$ である。

注意。ρ でなく $\rho_R : \rho_R g = dg{\cdot}g^{-1}$ をつかい $d\omega - \omega\wedge\omega = 0$ となる芽の層 $\mathcal{M}_R$ をつかっても同様な議論ができる。$g^*(x) = g^{-1}(-x)$ とすれば

$$\rho g^*(x) = (\rho_R g)(-x)$$

だから $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}_R$ は同様に扱える。

コホモロジー集合 $H^1(M, \mathcal{G}_t), H^1(M, \mathcal{G}_d)$ は平坦な G ーバンドル、可微分 G-バンドルの同値類の集合である。特に $H^1(M, \mathcal{G}_t) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$ であり完全列

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(M, \mathcal{G}_t) \xrightarrow{\iota} H^0(M, \mathcal{G}_d) \xrightarrow{\rho} H^0(M, \mathcal{M}_d) \to \\ \xrightarrow{\delta} H^1(M, \mathcal{G}_t) \xrightarrow{\iota} H^1(M, \mathcal{G}_d) \end{aligned} \tag{2}$$

が得られる。なお $\delta : H^0(M, \mathcal{M}_d) \to H^1(M, \mathcal{G}_t)$ は $\omega|U = \rho(h_U)$ として $\delta(\omega) = \{h_U^{-1}h_V\}$ であたえられる。$\delta : H^0(M, \mathcal{M}_R) \to H^1(M, \mathcal{G}_t)$ では $\omega|U = \rho_L(h_U)$ として $\delta(\omega) = \{h_U h_V^{-1}\}$ である。

なお $\pi_1(M)$ を M の基本群とすれば $H^1(M, \mathcal{G}_t) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$ であり $\delta(\omega)$(による $\pi_1(M)$ の像）は方程式

$$dg = g\omega$$

のモノドロミー群である ([3], cf [10])。

注意. ρ を $\rho_R g = dg \cdot g^{-1}$ と取れば $\omega|U = \rho_R(h_U)(= dh_U \cdot h_U^{-1})$ として $\delta(\omega) = h_U^{-1}h_V$ で与えられる。これはボックスタイン写像 δ によって右手系から左手系への変換が起きることを示している (cf.[3]).。

$H^1(M, \mathcal{M}_d)$ は集合 $\{\omega_{UV}\}; \omega_{UV} = \rho(g_{UV})\}; g_{UV}g_{VW}g_{WU} = c_{UVW}$, ;$c_{UVW}$ は定数、を同値関係

$$\{\omega_{UV}; \omega_{UV} = \rho(g_{UV})\} \sim \{\omega'_{UV} = \rho(g'_{UV})\} : g'_{UV} = h_U g_{UV} h_V^{-1}, \tag{3}$$

で割った集合だが $c_{UVW} \neq 1$ なので $\{h_U\}$ は任意ではなく

$$h_U c_{UVW} h_U^{-1} = \text{定数} \tag{4}$$

の制約がある。　更に $\{c_{UVW}\}$ が 2 次元の非アーベル集合の元になることもしめされ完全列

$$H^1(M, \mathcal{G}_d) \xrightarrow{\rho} H^1(M, \mathcal{M}_d) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathcal{G}_t) \tag{5}$$

がえられる。

1 の分解とコサイクル条件 $\omega_{VW}-\omega_{UW}+g_{VW}^{-1}\omega_{UV}g_{VW}=0$ から

$$\omega_{UV}=\theta_V-g_{UV}^{-1}\theta_U g_{UV} \tag{6}$$

という分解が出来る（接続の存在)。これから「曲率」を

$$\Theta_U=d\theta_U+\theta_U\wedge\theta_U \tag{7}$$

で定義すればチャーン・ベイユの構成が適用できて $H^1(M,\mathcal{M}_d)$ の元 $\xi=\{\omega_{UV}\}$ の特製類 $c^p(\xi)\in H^{2p}(M,\mathbb{C})$ が定義される。一般に $c^p(\xi)\notin H^{2p}(M,\mathbb{Z})$ である ([3])。

非整の特性類は数学ではあまり表れないが物理では分数量子ホール効果などいろいろあらわれるようである ([8].[9].[11])。これらに数学的位置づけを与えようというのが非アーベル　ド・ラム理論の研究を始めた動機だった。

$\theta\in H^0(M,\mathcal{M}_d$ にたいしても $\beta^p(\theta)$ を

$$\frac{(-1)^{p-1}(p-1)!}{(2\pi i)^p(2p-1)}\mathrm{Tr}\theta^{2p-1} \tag{8}$$

のコホモロジー類 $(\in H^{2p-1}(M,\mathbb{C}))$ として定義すれば　$\theta=\rho(g)$ と M で書けるとき

$$\beta^p(\theta)=g^*(e^{2p-1})\in H^{2p-1}(M,\mathbb{Z}),$$

e^{2p-1} は $GL(n,\mathbb{C})$ (あるいは $U(n)$) のコホモロジー環の $2p-1$ 次元の生成元である。よって $\bar{\beta}^p(\theta)$ を $mod.H^{2p-1}(M,\mathbb{Z})$ での $\beta^p(\theta)$ の $H^{2p-1}(M,\mathbb{C}^*)$ の元とするとこれは θ が M で大域的積分を持つための障害になる　(チャーン・サイモン型特性類)。

2　ライン　バンドルの分数幂

$U\cap V$ は単連結とし $\xi=\{g_{UV}\}$ を複素ライン　バンドルとすれば　任意の非整数 p について

$$g_{UV}^p g_{VW}^p g_{WU}^p=1^p(=e^{2pn_{UVW}\pi i}), \tag{9}$$

n_{UVW} は整数、である。よって $\xi^p = \{\rho(g_{UV}^p)\}$ は 1 −次元非アーベル　ド・ラム　コサイクルになる。g が（C^* の値をとる）関数なら

$$\rho(g^p) = p\rho(g)$$

だから $\{\omega_{Uv}\}; \omega_{UV} = \rho(g_{UV}$ で与えれる非アーベル　ド・ラム　コサイクルとの間には

$$\{\rho(g_{UV}^p)\} = p\{\omega_{UV}\} \tag{10}$$

の関係がある。

(10) から $\{\theta_U\}$ が ξ の接続なら $\{p\theta_U\}$ が ξ^p の接続になる。よって

定理。ξ を複素ライン　バンドル、$c(\xi)$、 $c(\xi^p)$ を ξ, ξ^p の特性類とすれば

$$c(\xi^p) = p(\xi) \tag{11}$$

である。

逆に任意の 2 -次元コホモロジー類 $c = \langle\Theta\rangle$, θ は M の 2 次の閉形式が与えられたとし

$$\Theta|U = d\theta_U$$

とすれば

$$\theta_U - \theta_V = df_{UV}$$

となる関数（族）$\{f_{UV}\}$ が存在し $f_{UV} + f_{VW} + f_{WU} = c_{UVW}$ は定数である。よって $g_{UV} = e^{2\pi i f_{UV}}$ とおけば　$\{g_{UV}\}$ は c_{UVW} が整数の時に限りライン　バンドルを与える（量子化条件）。しかし

$$g_{UV}g_{VW}g_{WU} = e^{2c_{UVW}\pi i}$$

は定数だから $\{g_{UV}\}$ は（$\mathbb{C}^*$ にかんする) 1 -次元非アーベル　ド・ラム　類である。よって

定理。M の任意の複素係数 2 次元コホモロジー類 c にたいしそれを特性類とする 1 次元非アーベル　ド・ラム類が存在する。これがラインバンドルであるためには　c が整なコホモロジー類 ($c \in \iota^*(H^2(M, \mathbb{Z}))$ であることがが必要充分である。

S を M の部分空間で局所的には座標系の一部で $x_1 \cdots x_m = 0$ で定義されるとし ξ は $M \setminus S$ で自明とする（M が代数多様体、ξ

が複素解析的バンドルとすれば ξ は M の因子で定義されるからこのような S が存在する可能性は大きい (cf.[6])。特に M がリーマン面なら常に存在する)。

$\xi = \{g_{UV}\}$ は $M \setminus S$ で自明だが　さらに M の開被覆 $\mathcal{U} = \{U\}$ と各 $U \setminus S \cap U$ 　で定義された $\mathbb{C}^*$ の値をとる可微分関数 $h_U(x)$ が存在して

$$g_{UV}(x)h_V(x) = h_U(x),\ x \in (U \cap V) \setminus S$$

となる事を仮定する。この仮定は M が代数多様体で S が非特異なら満たされる。仮定から

$$g^p_{UV}(x)h^p_V(x) = h^p_U(x),\ x \in (U \cap V) \setminus S,$$

である $(g^p_{UV} = h^p_U h^{-p}_V)$ 　。p が有理数 r/q であれば $x_1^{1/q}, \cdots x_m^{1/q}$ に局所座標をとりかえれば (M の S で分岐する q-葉の被覆 $\tilde{M}; \pi : \tilde{M} \to M$ を考えれば $\pi^*(\xi^p)$ は $\tilde{M}$ のライン・バンドルになる。

この例から S が存在すれば複素ライン・バンドルの分数冪は M の S で分岐する分岐被覆の上の複素ライン・バンドルとみなせることが推測されるが厳密な議論は課題である。

3　非アーベル　ゲージの「分数冪」

$\xi = \{g_{UV}\}$ がライン・バンドルであれば $(g_{UV}g_{VW})^p = g^p_{UV}g^p_{VW}$ だが非アーベル　ゲージなら　($g^p = e^{p \log g}$ として)

$$g^p_{UV}g^p_{vW} \neq (g_{UV}g_{VW})^p$$

だから分数冪はそのままでは意味がない。分数冪に替わる物として次のような構成を提案する。

提案。ξ を M の上の G-バンドル、S を＄M＄の低次元部分空間で $M \setminus S$ で ξ が自明になるとする。さらに M の開被覆 $\mathcal{U} = \{U\}$ と $U \setminus S$ で定義された G に値をとる可微分関数 $h_U(x)$ がすべての $U \in \mathcal{U}$ について存在し

$$g_{UV}(x) = h_U(x)h_V(x);\ x \in (U \cap V) \setminus S,$$

となると仮定する。この時定数行列 P にたいし

$$g^{[P]}_{UV}(x) = h^P_U(x)h^{-P}_V(x), \quad x \in (U \cap V) \setminus S \tag{12}$$

と定義する。ただし $g(x)^P = e^{P\log g(x)}$ である。さらに $g_{UV}^P(x)$ が $U \cap V$ から G への可微分写像であれば ξ の「分数冪」$\xi^{[P]}$ を

$$\xi^{[P]} = \{g_{UV}^{[P]}(x)\} \tag{13}$$

で定義する。

この定義では $\xi^{[P]}$ は S と $\{h_U\}$ に関係する。$\{g_{UV}\}$ が固定されても $h_U h_V^{-1} = h'_U h_V'^{-1}$ であれば $h_U'^{-1} h_U = h_V'^{-1} h_V$ だから $h_U'^{-1} h_U = f|U,\ f: M \to G$ である。よって

$$h_U = h'_U f$$

である。よって

補題。$\xi = \{g_{UV}\}$ の $X \setminus S$ での自明化 $h_U h_V^{-1}$ は　ある自明化 $g_{UV} = \tilde{h}_U \tilde{h}_V^{-1}$ を与えたとき

$$h_U = f_U \tilde{h_U} f; \quad f_U : U \to G,\ f: M \to G \tag{14}$$

と表される。

しかし一般に $(f_U h_H f)^P = f_U^p h_U^P f^P$ は成立しないのでこれから $\xi^{[P]}$ がどう $\{h_U\}$ の選び方に関係するかしらべるのは今後の問題である。

注意 $H^*(M,\mathbb{Z})$ が自由アーベル群なら M の上の G-バンドルはそのチャーン類 $c(\xi)$ できまる。$c(\xi)$ が M の部分空間 $S_1, \ldots, S_m$ によって $\sum_{i=1}^m n_i S_i$ のコホモロジー類となるときは留数の完全列

$$\cdots \to H^p(M,\mathbb{C}) \xrightarrow{\iota} H^p(M\backslash S) \xrightarrow{res} R^{p-1}(S) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(M,\mathbb{C}) \to \cdots$$

(S に特異点があれば $R^{p-1}(S)$ の定義は面倒だが $S = \cup_{i=1}^m S_i$ が余次元 2 の非特異部分多様体であれば $R^{p-1}(S) = H^{p-1}(S,\mathbb{C})$, である。cf [2]）. から $S = \cup_{i=1}^m S_i$ と採れば $H^*(M \setminus S, \mathbb{Z})$ が自由アーベル群であるとき $\xi|(M \setminus S)$ は自明になる。とくに M がコンパクト　リーマン面ならこの方法で S を与えることができる。

$P = pI$, $p \in \mathbb{C}$, I は単位行列のときは

$$g_{UV}^{[pI]} = g_{UV}^{[p]} \tag{15}$$

と書く。また $\log h_U = f_U$ を定めれば $h_U^{-1} = e^{-f_U + C_U}; e^{C_U} = I, f_U C_U = C_U f_U$ であり　C_U は定数行列である。このとき

$$g_{UV}^{[p]} g_{VW}^{[p]} g_{WU}^{[p]} = h_U^p h_V^{-p} h_V^p h_W^{-p} h_U^p h_U^{-p} = h_U^p e^{-pC_V} e^{-pC_W} h_U^{-p}$$

となるから

補題。$f_U C_V = C_V f_U$ ('$h_U e^{C_V} = e^{C_V} h_U$) がすべての U, V について成り立てば $\xi^{[p]} = \{g_U V^{[p]}\}$ は非アーベル　ド・ラム　コサイクルである。特に $C_U = c_U I$、$c_U \in \mathbb{C}$ であれば $\xi^{[p]}$ は非アーベル　ド・ラム　コサイクルになる。

$\xi = \rho \otimes \tau$, ρ はライン　バンドル、ρ は自明なバンドルとすれば　この補題の仮定をみたす.。しかしこの場合は $\xi = \{g_{UV}(x)\}$ として $g_{UV}(x) = f_{UV}(x)I$, $f_{UV}(x) : U \cap V \to \mathbb{C}^*$ だから任意の行列 P について $g_{UV}^P(x)$ が定義できて

$$g_{UV}^P(x) g_{VW}^P(x) g_{WU}^P(x) = e^{2n_{UVW}\pi i P}$$

となるから $\xi^{[P]}$ を考える必用がない。この例は非可換ゲージではないのでそれ以外にどのような例があるかは探す必要がある。

$C_{UV} = c_{UV} I$ のときは

$$g_{UV}^{[p]}(x) g_{VW}^{[p]}(x) G_{WU}^{[p]}(x) = c_{UVW} I$$

だから $\xi^{[p]}$ は非アーベル　ド・ラム　コサイクルとしては特別なものしかあらわさない。P や C_{UV} に一般の行列をとってあらわされる $xi^{[P]}$ が何処まで一般の非アーベル　ド・ラム　コサイクルをあらわすかは課題である。一方 $\xi^{[p]}$ についてはライン　バンドルの時と同様に p が有理数なら（適当な仮定で）M の＄Ｓ＄で分岐する有限葉の被覆空間の上のバンドルとみなせる。

$\xi^{[p]} = \{h_U^p h_V^{-p}\}$ だから $M \setminus S$ では

$$\theta_U = dh_U^p (h_u^{-p})$$

が $\xi^{[p]}$ の接続になる。$M \setminus S$ では $d\theta - \theta \wedge \theta = 0$ だが　M のカレントとして $d\theta, \theta \wedge \theta$ が意味を持てば $d\theta - \theta \wedge \theta$ は S に台をもつカレントになる。これから $\xi^{[p]}$ の特性類は S のコサイクルで実現されることが推測される。厳密な議論は課題である。

4 「分数冪」についての補足

前節の「分数冪」はいろいろ不十分なところがある。この節ではいくつか補足的な議論をする。

仮想特性類。

ξ に付随した旗多様体 $F_n = U(n)/T^n$ をファイバーとする M 上のバンドルの全空間を M_F, $\pi : M_F \to M$ とする。このとき

$$\pi^*(\xi) \cong \tau_1 \oplus \cdots \oplus \tau_n$$

τ_i はライン　バンドル、である。τ_i の特性類を $c(\tau_i) \in H^2(M_F, \mathbb{C})$ とし $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$ とする。このとき

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + p_i c(\tau_i) = 1 + \sum_{q=1}^{n} c^q(\mathbf{p}; \tau_1, \ldots, \tau_n) \tag{16}$$

とすれば $c^q(\mathbf{p} : \tau_1, \ldots, \tau_n) \in H^{2q}(M_F, \mathbb{C})$ はワイル群の $H^*(M_F, \mathbb{C})$ への作用で不変だから

$$c^q(\mathbf{p}; \tau_1, \ldots, \tau_n) = \pi^*(c^q(\xi^{(\mathbf{p})})) \tag{17}$$

となる $H^{2q}(M, \mathbb{C})$ の元 $c^q(\xi^{(\mathbf{p})})$ がすべての $q; 1 \leq q \leq n$ についてただ一つ存在する (cf.[6])。$p_i c(\tau_i) = c(\tau_i^{p_i})$ だから

主張。 $c^q(\xi^{(\mathbf{p})})$, $1 \leq q \leq n$, は ξ の仮想 $\mathbf{p}$ 冪の特製類である。

$\xi^{(\mathbf{p})}$ が M の非アーベル　ド・ラム　コサイクルとして存在するかは解らない。もし $\omega \in H^1(M, \mathcal{M}_d)$;

$$\pi^*(\omega) = (\tau_1)^{p_1} \oplus \cdots \oplus (\tau_n)^{p_n}$$

となる ω が存在すれば $\xi^{(\mathbf{p})} = \omega$ と定義してよい。これが実現出来るか、また存在しても一意的かは課題である。

M が複素多様体で ξ が複素解析的バンドルであるときはこれまでと同じ議論を複素解析的カテゴリーで出来る。しかしこのときは $F_n = GL(n, \mathbb{C})/\Delta(n, \mathbb{C})$ と取る必要がある。このときは解析的バンドルとして $\pi^*(\xi)$ はライン　バンドル $\tau_1, \ldots, \tau_n$ の直和でなく複合拡大；$\xi_1 * \xi_2$ を ξ_1 の ξ_2 による拡大として

$$\pi^*(\xi) \cong \tau_1 * \cdots * \tau_n$$

となる。よってライン　バンドル τ_1 の τ_2 による拡大があるとき $\tau_1^{p_1}$ の $\tau_2^{p_2}$ による拡大が非アーベル　ド・ラム　コサイクルとして（複素解析的カテゴリーで）定義できるかが問題となる。

キャンベルーハウスドルフの公式との関係

非アーベル　ゲージの分数冪の定義がうまくできないのは G が可換でなければ $: U \to G,\ g : U \to G$ のとき $f^p g^p = (\mathrm{F\,G})^p$ が必ずしも成立しないからである。この障害は (U が小さいとして）$\log F = f, \log G = g$ とすればキャンベルーハウスドルフの公式から

$$FG = e^f e^g = e^{f+g+CH(f,g)}$$

となるので $CH(f,g)$ で与えられる。$F^pG^p = e^{p(f+g)+CH(pf,ph)}$; $CH(pf,pg) = \sum_{p\geq 2} p^n CH_n(f,g)$ である。よって $F^pG^p = (FG)^p$, $p \in \mathbb{C}$ が成立するには $[f,g] = 0$ が必要充分である。

$FGH = I$ であれば

$$\begin{aligned} FGH =& e^{f+g+CH(f,g)} e^H = e^{f+g+h+CH(f,g)+CH(f+g+CH(f,g),h)} \\ =& e^f e^{h+g+CH(g,h)} = e^{f+g+h+CH(g,h)+CH(f,g+h+CH(g,h))} = e^N \end{aligned}$$

$e^N = I$, 単位行列、である。これから ($FGH = I$ でなくても）

$$\begin{aligned} &CH(f,g) + CH(f+g+CH(f,g),h) \\ =& CH(g,h) + CH(f,g+h+CH(g,h)) \end{aligned} \tag{18}$$

が得られる。

$p \in \mathbb{C}$ であれば

$$F^pG^pH^p = e^{p(f+g+h)+CH(pf,pg)+CH(pf+pg+CH(pf+pg+CH(pf,pg),ph)}, \tag{19}$$

$$(FGH)^p = e^{p(f+g+h)+pCH(f,g)+p(CH(f+g+CH(f,g),h)} \tag{20}$$

である。$FGH = I$（または定数行列）であれば

$$\begin{aligned} &d_x(f+g+h+p^{-1}(CH(pf,pg) + CH(pf+pg+ \\ &+ CH(pf+pg+CH(pf,pg),ph)))|_{p=1} = 0, \end{aligned}$$

である。$f+g+h$ は p に関係しないので $p \neq 1$ でこの式が成立する可能性は低い。言い換えれば本質的にアーベル　ゲージで

ある場合を除けばゲージの分数冪から直接非アーベル　ド・ラム　コサイクルを得る可能性は低いように思われる。しかし G_d に値をとる 2 －コチイン $g_{UV}; g_{UV} = e^{f_{UV}}$ のとき

$$d(f_{UV} + f_{VW} + f_{WU} + cH(f_{UV} + f_{VW} + CH(f_{UV} + f_{VW} + \\ + CH(f_{UV} + f_{VW} + CH(f_{UV} + f_{VW} + CH(f_{UV}, f_{VW}), f_{WU})) = 0 \tag{21}$$

が　ド・ラム類の対数が考えられるかと言う問題に役立つかもしれない。

5　ゲージ場の分数冪と分数冪の級数

この節では $M \setminus S$ が（複素）n-次元の平坦なスタイン多様体であると仮定する (cf.[7])。

仮定から $M\backslash S$ には独立で $M\backslash S$ で定義された正則関数 $z_1, \ldots, z_n$ が存在する。$p_1, \ldots, p_n$ を自然数とすれば z_i^{1/p_i} は S に分岐点と特異点をもつ $M \setminus S$ の多値関数である。$\xi|(M \setminus S)$ が自明であれば $(\xi \otimes \Lambda T^*(M))^{[\mathbf{1}/p]}|(M \setminus S)$ の解析的切断は $z_1^{1/p_1}, \ldots, z_n^{1/p_n}$ の解析的な関数である。ただし $\Lambda T^*(M)$ は M の複素解析的）微分形式のバンドルであり $1/\mathbf{p} = (1/p_1, \ldots, 1/p_n)$ である。従って $M \setminus S$ で ξ に係数をもつ（複素解析的）微分形式を考えるときは $z_1^{1/p_1}, \ldots z_n^{1/p_n}$ を変数として扱える。ただし x_i^{1/p_i} は S に分岐点だけでなく特異点を持つ可能性が有るので係数となる関数は $z_1^{1/p_1}, \ldots, z_n^{1/p_n}$ のテーラー級数でなくローラン級数を考える必要がある。しかし分数冪微分の観点からは以下に説明するようにこでは自然である。

簡単の為 $n = 1$ とし $z^{1/p}$ の級数を考える。

$$\frac{d^{1/p}}{dz^{1/p}} z^{m/p} = \frac{\Gamma(1 + m/p)}{\Gamma(1 + (m-1)/p)} z^{((m-1)/p)}$$

だから $m = Np,\ N$ は負の整数でなければ $\dfrac{d^{1/p}}{dz^{1/p}} z^{mp}$ は定義でき $m = (1 - N)p,\ N$ は自然数でなければ $\dfrac{d^{1/p}}{dz^{1/p}} z^{m/p} \neq 0$ である。したがって $z^{1/p}$ の冪級数環 $\mathbb{C}[[z^{1/p}]]$ は分数冪微分 $\dfrac{z^{1/p}}{dz^{1/p}}$ の作用では

閉じないがローラン級数環を $\mathbb{C}_L[[z^{1/p}]]$ と書けば

$$\frac{d^{1/p}}{dz^{1/p}}:\mathbb{C}_L[[z^{1/p}]]\to\mathbb{C}_L[[z^{1/p}]] \tag{22}$$

である。ただし z^{-n} には $\dfrac{d^{1/p}}{dz^{1/p}}$ は定義できないし $\dfrac{d^{1/p}}{dz^{1/p}}$ の像になる事もない。

$$\frac{d^{q/p}}{dz^{q/p}}z^{m/p}=\frac{\Gamma(1+m/p)}{\Gamma(1+(m-q)/p)}z^{(m-q)/p}$$

だから $\dfrac{d^{q/p}}{dz^{q/p}}$ も $\mathbb{C}_L[[z^{1/p}]]$ から $\mathbb{C}_L[[z^{1/p}]]$ への写像となる。
$(m-1)/p,\dots,(m-q+1)/p$ がすべて負の整数でなければ

$$\frac{d^{q/p}}{dz^{q/p}}=(\frac{d^{1/p}}{dz^{1/p}})^q$$

だが $(m-j)/p$ が $1\le j\le q-1$ のどれかで負の整数となればこの式は成り立たない。これは $\dfrac{d^{1/p}}{dz^{1/p}}z^{1/p-m}=0$ から起きる。しかしこのような不都合だけでなく　この式から

$$\frac{d^{1/p}}{dz^{1/p}}e_p(\lambda^pz)=\lambda e_p(\lambda^pz), \tag{23}$$

$$e_p(\lambda^pz)=\sum_{m\ge 1-p}\frac{1}{\Gamma(1+m/p)}(\lambda^pz)^{m/p} \tag{24}$$

などの有用な公式がえられる (cf.[4])。一般化ミッターハ・レフラー関数 (cf.[5])

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k/\rho)}$$

を使えば $k=m+p-1$ とおいて $e_p(z)=z^{p-1}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^{k/p}}{\Gamma(1-1/p+k/p)}$ だから

$$e_p(z)=z^{1-1/p}E_p(z^{1/p};1-1/p) \tag{25}$$

と書ける。

問題。これらの計算をつかって $\Lambda T^*(M)^{[\mathbf{p}]}|M\setminus S$ に微分形式の分数幕を定義できないか？またそれから M の微分形式の分数幕が定義できないか？

$\xi^{[\mathbf{c}]}$ は $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ は c_i が無理数でも定義できる。しかし 1 変数の場合でも c が無理数であれば

$$\mathbb{C}_L[[x^c]] \cap \mathbb{C}_L[[x]] = \{0\}$$

だから微分作用素 $\dfrac{d}{dx}$ を使うには 2 元生成の環 $\mathbb{C}_L[[x, x^c]]$ を考える必要がありcが有理数の時と大きく違うようである。

、

参考文献

[1] Andersson, S.I.: Vector bundel connections and liftings of partial differntial operators, Lect. Notes in Math. 905, 119-132, Springer 1982, Non-abelian Hodge theory via heat flow, Lect. Notes in Math. 1209, 8-36, Springer 1985.

[2] Asada,A.: Current and residue exact sequence, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 3(1968), 85-151.

[3] Asada,A.: Curvature forms with singularities and non integral characteristic class, Lect. Notes in Math. 1139, 152-168, Springer,1985. Non abelian de Rham theory, Prospects of Mathematical Sciences, 13-40, World Sci. 1986.

[4] Asada,A.:Extended Borel transform and fractional calculus, in Fractional Calculus:History, Theory and Applications, eds. Daou,R. Xavier,M. Nova Publishers, 2014. An integral transform arising from fractional calculus, Fractional Calculus with Applications to Dynamical Systems, eds. Cario, C. Yang, X,J. Chapter 4. De Gruyterr Open, 2015.

[5] Erdéli,A. Magnus,W. Oberbettinger,F. Tricomi,F.G.: Higher Transcendental Functions, New York 1981. Degital Library of Mathematical Functions, http://dlmf.nist.gov.

[6] Hirzebruch,F.: Topolgical Methods in Algebraic Geometry, Springer, 1966.

[7] Hömander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variabels, Van Nostrand, 1966.

[8] Klevsov.S.: Geometr and large N limits in Laughlin states, Travaux math. 24(2016), 63-127

[9] Laughlin, R.B.: Qunatum Hall conductivity in two dimensions, Phys. Rev. B23 (1981), 5632. Anomalous quantum Hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations, Phys. Rev. Lett. 50(1983), 1395.

[10] Oniščik, A.L.: Connection with zero curvature and de Rham theorem, Sov. Math., Doklady 5 (1964), 1654-1657, Some concepts and applications of non-abelian cohomology theory, Trans. Moscow Math. Soc. 17(1967), 49-98.

[11] Shapsonik,F.A.Solomin,J.E.: Gauge field singularities and non integer topological charge, J. Math. Phys. 20(1979), 2110-2114.