分数冪微積で現れた群の完備化

浅田　明

1　はじめに

分数冪微積で現れた群とリー環についてこれまでに得られたことを中心に話題をまとめておく。

適当な関数空間の上では $\{\frac{d^a}{dx^a}|a \in \mathbb{R}\}$ と $\{x^a|a \in \mathbb{R}\}$ は 1 経数群であり生成作用素は其々 $\log(\frac{d}{dx})$, $\log x$ である。この 2 つの 1 経数群から生成される群 $G_{\mathbb{R}}$ と、$\log(\frac{d}{dx})$ と $\log x$ から生成されるリー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は

$$\mathcal{R}[f(s)](\mathrm{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^s}{\Gamma(1+s)} f(s)ds,$$

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[f(s+a)](x),$$

を用いると　それぞれ $\{\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)}|a \neq 0\}$ を生成元とする乗法による自由アーベル群 $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ の $\mathbb{R} = \{\tau_a|a \in \mathbb{R}\}$ による拡大; $\tau_a f(s) = f(s+a)$, および $\frac{d}{ds}$ と $\Psi(1+s)$ から生成されるリー環、と同型になる。形式的には $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ は 0 でない実数全体 ; $\{a \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$, を生成元とする自由アーベル群である。

$\mathcal{R}$ で変換しなければ $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ は分数冪オイラー微分 $\{E_\ell^a|a \neq 0\}$, $E_\ell^a = x^a\frac{d^a}{dx^a}$, から生成された自由アーベル群である。

$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は $\Psi(1+s)$ から生成される唯一の極大イデアル $\mathfrak{a}$ をもちベクトル空間として

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\frac{d}{ds} \oplus \mathfrak{a},$$

である。$\mathfrak{a}$ は $\Psi(1+s), \Psi'(1+s), \Psi^{(2)}(1+s), \ldots$ を基底とするベクトル空間であり、$\Psi^{(n)}(1+s)$ で生成されるイデアルを $\mathfrak{a}_n$ とすれば

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_o \supset \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \cdots, \quad \cap_{n\geq 0}\mathfrak{a}_n = \{0\},$$

である。$\mathfrak{a}$ に $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\Psi\ (n)(1+s)$ が完備化すればすべての $a \in \mathbb{C}$ について収束するようなノルムを入れその完備化を $\bar{\mathfrak{a}}$, $\bar{\mathfrak{a}}_n$ を $\mathfrak{a}_n$ の完備化とすれば　写像 ϑ;

$$\vartheta(f)(s) = \frac{d}{ds}(\log f(s)) = f(s)^{-1}\frac{df(s)}{ds}$$

で $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ は $\bar{\mathfrak{a}}_1$ の中に同型に移される。

これらの結果は $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ は少し欠落がある事を示唆している。この補充の為　変換 $\mathcal{N}$;

$$\mathcal{N}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(s)ds,$$

と正則関数の原点での芽にたいし定義されているボレル変換 $\mathcal{B}$;

$$\mathcal{B}[\phi(\zeta)](z) = \frac{1}{2\pi i}\oint e^{\frac{z}{\zeta}}\frac{\phi(\zeta)}{\zeta}d\zeta$$

の逆変換

$$\mathcal{B}^{-1}[f(s)](x) = \int_{0}^{\infty} e^{-s}f(sx)ds$$

から得られる公式 $\mathcal{B}^{-1}[\log\zeta](z) = \log z - \gamma$ を用いた拡張を利用する。

定義から

$$\mathcal{R}[f(s)](x)=\mathcal{N}[\frac{f(s)}{\Gamma(1+s)}](x)$$

だが　さらに $\mathcal{N}[\delta_a]=x^a$, $\mathcal{R}[\delta_a]=\dfrac{x^a}{\Gamma(1+a)}$, 拡張されたボレル変換では $\mathcal{B}[x^a]=\dfrac{x^a}{\Gamma(1+a)}$ となることから

$$\mathcal{R}=\mathcal{B}\circ\mathcal{N} \tag{1}$$

が成立する。(1) と $\mathcal{N}$ は逆を持ち $\ker\mathcal{B}$ は $\{x^{-n}|n\in\mathbb{N}\}$ で生成されることから $\ker\mathcal{R}$ は $\{\delta_{-n}|n\in\mathbb{N}\}$ で生成される。よって $\mathcal{R}$ の定義域として関数の空間などを取れば $\mathcal{R}$ は逆をもつ。

これらの変換をもちいれば $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ にボレル変換 $\mathcal{B}$ を添加した自由アーベル群（$\mathcal{R}$ で変換すれば $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ に $\Gamma(1+s)$ を添加した乗法による自由アーベル群）$\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ とその $\mathcal{R}=\{\tau_a|a\in\mathbb{R}\}$ による拡大 $G_{\mathbb{R}}^{\natural}$ が補充された群である。形式的には $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ は実数全体;$\{a|a\in\mathbb{R}\}$, を生成元とする自由アーベル群である。

ϑ は $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ でも定義され $\vartheta:\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}\rightarrow\bar{\mathfrak{a}}$ は中への同型である。

問題。$\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ に適当な位相を入れ　それによる完備化 $\bar{\mathsf{A}}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ が

$$\vartheta:\bar{\mathsf{A}}_{\mathbb{R}}^{\natural}\cong\bar{\mathfrak{a}}$$

となるよう出来るか？　またその時 $\bar{\mathsf{A}}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ の元を適当な関数空間の上の作用素と解釈できるか？

これにはまだ不十分な結果しか得られていないが $\mathcal{R}$ を用いれば　無限積 $\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i}$ の収束問題になる。それについては

命題。$0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots$ とする。$a_i = n_i + \beta_i, -\frac{1}{2} < \beta_i \le \frac{1}{2}$　として

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\nu_i|(n_i+1)\log(n_i+1) < \infty$$

であれば　無限積 $\prod_{i=1}^{\infty}((\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i}$ は $|s| < \frac{1}{2}$ で収束する。

を示すことが出来る。なお s の定義域は $-\frac{1}{2}$ より小さい負の実数をのぞいた複素数全体まで広げられる。この事から分数冪オイラー微分の無限積の意味づけもある程度出来る。

$\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ は $\mathbb{R}$ の元を生成元とする自由アーベル群である。このような群で自然なものとして $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$;　$\delta_a, a \in \mathbb{R}$ を生成元とする加法による群、が挙げられる。$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ と $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ との間の同型は写像 $\mu_{-x,\Psi}$;

$$\mu_{-x,\Psi}(T) = \exp(T\int_{-x}^{s} \Psi(1+x+t)dt),$$

$T = \sum_i n_i \delta_{a_i} \in \mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ で与えれる。ただし $\delta_a f(x,t) = f(x,a)$ とする。なお積分を 0 から取った $\mu_{0,\Psi}$;

$$\mu_{0,\Psi}(T) = \exp(T\int_{0}^{s} \Psi(1+x+t)dt)),$$

を使えば完全列

$$0 \to \mathbb{Z}\delta \to \mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}} \xrightarrow{\mu_{0,\Psi}} \mathsf{A}_{\mathbb{R}} \to 0,$$

が得られる。

さらに $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} = \mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{C}}$ の「完備化」として

$$\mathsf{D}_{\mathbb{R},\ell^1} = \{\sum_i c_i \delta_{a_i} | \|\mathbf{c}\| = \sum_i |c_i| < \infty\},$$

$$\mathsf{D}_{\mathbb{R}:\ell^1_{\mathrm{loc}}} = \{\sum_i c_i \delta_{a_i} | \|\mathbf{c}\| < \infty,$$

$$\{a_1, a_2, \ldots\} \text{ is a bounded set}\}$$

を導入すれば　これらにも $\mu_{-x,\Psi}$ が定義できる。$\mu_{-x,\Psi}(\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^1})$ は $\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}}$ の拡大と見られ $\bar{\mathsf{A}}^\natural_{\mathbb{R};\ell^1}$ と書く。また $\vartheta \bar{\mathsf{A}}^\natural_{\mathbb{R};\ell^1} = \bar{\mathfrak{a}}_{\ell^1}$ も定義される。同様に $\mathsf{D}_{\ell^1_{\mathrm{loc}}}$ から出発して $\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}}, \mathfrak{a}$ の拡大もえられる。これらは $\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}}, \mathfrak{a}$ の適切な「完備化」の候補である。なお　これらの位相は ℓ^1 型であり $G^\natural_{\mathbb{R}}$ に拡張できる。

$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{C}}$ の「完備化」として ℓ^2 型の

$$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^2} = \{\sum_{;} c_i \delta_{a_i} | \sum_i |c_i|^2 < \infty, \sum_i |a_i|^2 < \infty\}$$

も考えられ $\mu_{-x;\Psi}(\mathsf{D}_{\mathbb{R},\ell^2}) = \bar{\mathsf{A}}^\natural_{\mathbb{R};\ell^2}$ も定義でききさらに

$$\vartheta : \bar{\mathsf{A}}^\natural_{\mathbb{R};\ell^2} \to \bar{\mathfrak{a}}$$

も定義できるが tau_a は働かない。、

座標系が固定されていればこれらの結果はそのまま多変数に拡張される。多変数で $G_{\mathbb{R}}$ 等に対応する群などを $G_{\mathbb{R}^n}$ などと書く。しかし $\bar{\mathsf{A}}^\natural_{\mathbb{R}^n}$ から $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}^n}$ への写像を得るには $\mathfrak{g}$ は $\Psi(1+s_1)ds_1, \ldots, \Psi(1+s_n)ds_n$ で生成されたリー環としなければいけない。この時の写像は非アーベル　ド・ラム理論で重要な $\rho = \rho_\ell$;

$$\rho_\ell(g) = g^{-1}dg$$

である。

$\mathbb{R}^n$ の線形変換 T は $G^{\natural}_{\mathbb{R}^n}, \mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ に働き $\mathbb{R}^n \cong \{\tau_{\mathbf{a}} | \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\}$, $\mathbb{R}^n \cong \{\sum_{i=1}^n a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} | (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$ を不変にする。また

$$\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}^n} \cong T^*(\mathsf{a}^{\natural}_{\mathbb{R}^n}),\ \mathfrak{a}_{\mathbb{R}^n} \cong T^*(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}^n}),$$

であり　写像 ρ により $T^*(\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}^n})$ は $T^*(\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}^n})$ の中に同型に移される。よって $\mathfrak{G}$ を $GL(n, \mathbb{R}^n)$ の部分群とし $G^{\natural}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ などを $\cup_{T \in \mathfrak{G}} T^*(G^{\natural}_{\mathbb{R}^n})$ から生成された群などとすれば

$$0 \to G^{\natural}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G}) \xrightarrow{\rho} \bar{\mathsf{A}}^{\natural}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G}),$$

が完全列になる。また $\mathfrak{G}$ が自己共役な群で M が平坦で接バンドルの構造群が $\mathfrak{G}$ であれば $\mathrm{T}M \oplus \mathrm{T}^*M$ にアソシエートした $\bar{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}^n}$ をファイバーとするバンドルが構成できる。

2　$G_{\mathbb{R}}$ と $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の構造

定義１。H を $\dfrac{f(s)}{\Gamma(1+s)}$ が $s \to \pm\infty$ で急減少となる関数の空間とし

$$\mathsf{H}_{a_1,\ldots,a_m} = \{f \in \mathsf{H} | f(a_i - n) = 0, n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m\} \tag{2}$$

とする。

定義から $S_1 = \{a_1, \ldots, a_j\},\ S_2 = \{b_1, \ldots, b_k\}$ とすれば

$$\mathsf{H}_{S_1} \cap \mathsf{H}_{S_2} = \mathsf{H}_{S_1 \cup S_2} \tag{3}$$

である。

$G_{\mathbb{R}}$ と $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の構造は次の二つの補題からしたがう。

補題１。$f \in \mathsf{H}_a$ であれば

$$x^a \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)}\tau_{-a} f(s)](x) \tag{4}$$

である。

系 $E_\ell = x^a \frac{d^a}{dx^a}$ を分数冪（左）オイラー微分とすれば $f \in \mathsf{H}_a$ のとき

$$E_\ell \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} f(s)](x) \tag{5}$$

である。なお（右）オイラー微分 $E_r = \frac{d^a}{dx^a} \cdot x^a$ では

$$E_r \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\frac{\Gamma(1+s+a)}{\Gamma(1+s)} f(s)](x)$$

となる。

補題２。$f \in \mathsf{H}_0$ であれば

$$\log x \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[(\Psi(1+s) - \frac{d}{ds}) f(s)](x) \tag{6}$$

である。

補題 1 は直接計算、補題 2 は補題 1 と $\log x = \frac{\partial}{\partial_a} x^a|_{a=0}$ から導かれる。

なお $\Psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ の次の性質も使う。

1. $a_1, \ldots, a_m$ があい異なる実数であれば $\Psi(s+a_1), \ldots, \Psi(s+a_m)$ は ($\mathbb{C}$ 上）一次独立である。

2. $\Psi(1+s), \Psi'(1+s), \Psi^{(2)}(1+s), \ldots$ は ($\mathbb{C}$ 上) 一次独立である。

$\Psi(1+s+a)$ は $|s|<1$, $|a|<1-|s|$ のとき

$$\Psi(1+s+a)=\Psi(1+s)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\Psi^{(n)}(1+s) \qquad (7)$$

と展開される。Ψ は全平面で一価有利型だから形式的に (7) の右辺で左辺を表しても混乱は起きない。

(4) から $f(s)\in \mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ なら

$$f(s)=\frac{\Gamma(1+s)^{n_1+\cdots+n_k}}{(\Gamma(1+s+a_1))^{n_1}\cdots(\Gamma(1+s+a_k))^{n_k}} \qquad (8)$$

である。よって $\vartheta f(s)$ の形式的テーラー展開は $\sum_{n=1}^{\infty}c_n\Psi^{(n)}(1+s)$ の形になり $\vartheta f\in\bar{\mathfrak{a}}_1$ となる。

注意。$G_{\mathbb{R}}$ の忠実な表現加群は知られていない。しかし $K=(k_1,\ldots,k_m)$、$S=(a_1,\ldots,a_m)$ とし $f\in\mathsf{H}$ かつ $f(s)$ は a_i-n で k_i 位か其れ以上の位数の零点を持つような f の加群を $\mathsf{H}_{S;K}$ とすれば有限個の $g_1,\ldots,g_m\in G_{\mathbb{R}}$ の積については $\mathsf{A}_{S;K}$ を使って「忠実」に表現できる。いっぽう $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は $\mathsf{H}_{0;\infty}=\cap_{n\geq 1}\mathsf{H}_{0;n}$ で表現できる。

これらの観察から $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ に $\Gamma(1+s)$ を添加した群 $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ がより自然な群と推測される。$\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ は $\{\Gamma(1+s+a)|a\in\mathbb{R}\}$ から乗法で生成された自由アーベル群である。$\mathcal{R}$ で変換しなければ $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ は分数冪オイラー微分から生成される群、$\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ はそれにボレル変換 $\mathcal{B}$ を添加した群である。しかし $\mathcal{B}$ を自然に導入することは問題として残っている。

ϑ で $\bar{\mathfrak{a}}$ に同相にうつるよう $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ を拡大することが出来れば　その元は形式的に無限積

$$\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i},\ \text{or}\ \prod_{i=1}^{n}(E_{\ell}^{a_i})^{\nu_i}$$

だから　これらの無限積に意味があるかが問題になる。

なお分数冪オイラー微分の冪は

$$(E_\ell^a)^\nu x^c = (\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)})^\nu x^c$$

であたえられる。形式的無限積 $\prod_{i=1}^\infty (E_\ell^{a_i})^{\nu_i}$ については

$$(\prod_{i=1}^\infty (E_\ell^{a_i})^{\nu_i})x^c = (\prod_{i=1}^\infty (\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a_i)})^{\nu_i})x^c$$

である。従って分数冪オイラー微分の冪の無限積 $\prod_{i=1}^\infty (E_\ell^{a_i})^{\nu_i}$ は $\prod_{i=1}^\infty (\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)})^{\nu_i}$ がある c で収束するときには意味がある。なおこの分子は $\sum_{i=1}^\infty \nu_i$ が収束しなければ意味がないから $\prod_{i=1}^\infty (E_\ell^{a_i})^{\nu_i}$ が意味を持つには $\sum_i \nu_i$ が収束することが必要である。

3　$\prod_{i=1}^\infty (\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i}$ の計算

この節では a_i は実数とし　$a_i = n_i + \beta_i$、$-\frac{1}{2} < \beta_i \leq \frac{1}{2}$ とする。ただし n_i は整数である。

$$\begin{aligned}\Gamma(1+s+a_i) &= (s+a_i)\Gamma(1+s+(a_i-1)) \\ =&(s+a_i)(s+a_i-1)\Gamma(1+s+(a_i-2)) = \cdots\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}&\Gamma(1+s+a_i)\\=&\prod_{j=0}^{n_i}(1+s+(a_i-j))\Gamma(1+s+\beta_i),\quad n_i>0,\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\Gamma(1+s+a_i)\\=&(\prod_{j=1}^{n_i}(1+s+(a_i+j)))^{-1}\Gamma(1+s+\beta_i),\quad n_i<0\end{aligned}\tag{10}$$

である。(9) から $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ 　であれば

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i}\\=&\prod_{i=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{n_i}(1+s+(a_i-j))^{\nu_i}(\Gamma(1+s+\beta_i))^{\nu_i}\end{aligned}$$

となる。$a_i = n_i + \beta_i$ だから $1+s+(a_i-j)) = 1+s+\beta_i+(n_i-j)$ である。よって

$$(1+s+(a_i-j))^{\nu_i} = (1+n_i-j)^{\nu_i}(1+\frac{s+\beta_i}{1+n_i-j})^{\nu_i}$$

と書ける。これから

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i}\\=&\prod_{i=1}^{\infty}(\prod_{j=0}^{n_i}(1+n_i-j)^{\nu_i}(1+\frac{s+\beta_i}{1+n_i-j})^{\nu_i})(\Gamma(1+s+\beta_i))^{\nu_i}\end{aligned}$$

となる。ここで両辺の対数を取れば

$$\log(\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i})$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n_i}\nu_i(\log(1+n_i-j)+\log(1+\frac{s+\beta_i}{1+n_i-j}))+$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i\log(\Gamma(1+s+\beta_i))$$

である。$|\beta_i| \leq \frac{1}{2}$ だから $|s| < \frac{1}{2}$ であれば $|\log(1+\frac{s+\beta_i}{1+n_i-j})| \leq \log 2$ であり s が固定されれば $|1+s+\beta_i| > \epsilon > 0$ と取れるから

$$|\log\Gamma(1+s+\beta_i)| \leq \max_{\epsilon<s<2}|\log(\Gamma(s))|$$

と一様有界になる。これと不等式

$$\sum_{j=0}^{n_i}|\nu_i||\log(1+n_i-j)| \leq |\nu_i|(n_i+1)\log(n_i+1)$$

から　「はじめに」に書いた命題が成立する。

注意。 $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n_i}\nu_i\log(1+\frac{s+\beta_i}{1+n_i-j})$ は

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\nu_i|n_i < \infty$$

であれば収束する。また $\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i\log(\Gamma(1+s+\beta_i))$ は

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\nu_i| < \infty$$

であれば収束する。

s の範囲は $s+\beta_i$ が負の整数を含まない有界領域に

ふくまれれば条件

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\nu_i|(n_i+1)\log(n_i+1) < \infty \tag{11}$$

をみたせば収束する。特に s が $-\frac{1}{2}$ より小さい負の実数でなければ無限積 $\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i)^{\nu_i})$ は収束するから

命題 1。$f \in \mathsf{H}$ かつ $f(s)=0, s \le -\frac{1}{2}$ であり　さらに $s \to \infty$ で充分急速に減少すれば条件 (11) が満たされるとき $\prod_{i=1}^{\infty}(E_{\ell}^{a_i})^{\nu_i}\mathcal{R}[f]$ が定義できる。

問題。分数冪オイラー微分の分数冪やその無限積が現れる意味のある例があるか？

またこれらの例は $\mathfrak{a}_0$ のノルムとして $\Psi(1+s), \Psi'(1+s), \ldots$ で張られた ℓ^1 空間のノルムを入れるのが便利なことを示唆している。この場合

$$\|\sum_n \frac{a^n}{n!}\Psi^{(n)}(1+s)\| = \sum_n \frac{|a|^n}{n!} = e^{|a|}$$

だから写像 ϑ が定義できる。

4　離散デルタポテンシャルの群と $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$

X を可微分多様体 δ_a を a に台をもつデルタ関数; $\int_X \delta_a f(x)dx = f(a)$　とする。加法により $\delta_a; a \in X$ で生成される自由アーベル群を $\mathsf{D}_{X;\mathbb{Z}}$ とする。特に $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ は対応 $\delta_a \to \Gamma(1+s+a)$ により $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ と同型である。しかしこの対応は実質的な感じがない。以下では別の形で同型対応をつくる。

$\mathbb{R}$ のディラック関数を $\delta = \delta_0$, $\delta_c = \delta(x-c)$ とする。以下では 2 変数関数 $f(x,s)$ に対し $\delta_c f(x,t) = f(x,c)$ とする。この約束に従えば $T = \sum_k n_k \delta_{a_k} \in \mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ のとき

$$\int_0^s \Psi(1+x+t)dt = \log(\Gamma(1+x+s)) - \log(\Gamma(1+x)),$$

$$\int_{-x}^s \Psi(1+x+t)dt = \log(\Gamma(1+x+s) - \log(\Gamma(1)),$$

だから

$$\exp(T\int_0^s \Psi(1+x+t)dt) = \prod_k (\frac{\Gamma(1+x+a_k)}{\Gamma(1+x)})^{n_k}, \tag{12}$$

$$\exp(T\int_{-x}^s \Psi(1+x+t)dt) = \prod_k (\Gamma(1+x+a_k))^{n_k} \tag{13}$$

となる。ただし積分は s を変数とする不定積分で s の動く範囲はは十分大きい；$s > \max_k\{n_k\}$; とする。

定義 2。$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ から $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}^{\natural}$ への写像 $\mu_{0;\Psi}$ と $\mu_{-x,\Psi}$ を

$$\mu_{0;\Psi}T = \exp(T\int_0^s \Psi(1+x+t)dt), \tag{14}$$

$$\mu_{-x;\Psi}T = \exp(T\int_{-x}^s \Psi(1+x+t)dt) \tag{15}$$

で定義する。

定義と (12),(13) から

1. $\mu_{0;\Psi}$ は $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ から $\mathsf{A}_{\mathbb{R}}$ の上への準同型写像で $\ker\mu_{0;\Psi} = \{n\delta | n \in \mathbb{Z}\}$ である;

$$0 \to \mathbb{Z}\delta \to \mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}} \xrightarrow{\mu_{0;\Psi}} \mathsf{A}_{\mathbb{R}} \to 0,$$

は完全列である。

2. $\mu_{-x;\Psi}$ は $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ から $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}}$ への同型写像である；

$$\mu_{-x;\Psi}:\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}\cong\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}}.$$

$\mathsf{D}_{X;\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{C}$ を $\mathsf{D}_{X;\mathbb{C}}$ と書く。$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{C}}$ に適当なノルムを入れそれによる完備化を $\bar{\mathsf{D}}_{\mathbb{R};\mathbb{C}}$ とかく。定義から $T\in\bar{\mathsf{D}}_{\mathbb{R};\mathbb{C}}$ なら形式的に

$$T=\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i\delta_{a_i}$$

と書ける。$T_n=\sum_{i=1}^{n}\nu_i\delta_{a_i}$ とすれば

$$\mu_{-x;\Psi}T_n=\prod_{i=1}^{n}(\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i}$$

だから

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}(\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i}(=\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i})$$

が存在すれば

$$\mu_{-x;\Psi}T=\lim_{n\to\infty}\mu_{-x;\Psi}T_n(=\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i})\quad(16)$$

で $\mu_{-x;\Psi}T$ を定義する。

なお $\mu_{0;\Psi}T$ も $\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i$ が存在することを仮定して

$$\mu_{0;\Psi}T=\frac{\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{\nu_i}}{\Gamma(1+s)^{\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i}}\quad(17)$$

で定義できる。定義から $\ker\mu_{0;\Psi}=\mathbb{C}\delta$ である。

$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ にも τ_a が働く:$\tau_a\delta_c=\delta_{c-a}$. よって $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ の $\{\tau_a|a\in\mathbb{R}\}\cong\mathbb{R}$ による拡大が定義できる。それは $G^{\natural}_{\mathbb{R}}$ と同型な群である。

注意。ここでの議論では　$\Psi(1+s)$ の次の性質しか使っていない:

1. $\Psi(1+s)$ は原点で正則で全平面で 1 価有利型である。

2. $\Psi(1+s), \Psi'(1+s), \Psi^{(2)}(1+s), \ldots$ は 1 次独立である。

$\Psi(1+s)$ 以外でこの条件を満たす関数を用いて意味のある写像が作れるかは問題である。

5　$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ の拡大と $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}}$ の完備化

$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} = \mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{C}}$ とする。$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{C}}$ の拡大として $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots)$ としてベクトル空間

$$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^1} = \{\sum_i c_i \delta_{a_i} | \|\mathbf{c}\| = \sum_i |c_i| < \infty\}, \tag{18}$$

$$\mathsf{D}_{\mathbb{R}:\ell^1_{\mathrm{loc}}} = \{\sum_i c_i \delta_i | \|\mathbf{c}\| < \infty, \quad \{a_1, a_2, \ldots\} \text{ is a bounded set}\} \tag{19}$$

を考える。

補題３。$C(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の連続関数全体に広義一様収束で位相をいれた空間、$C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})$ を R 上の有界連続関数全体に $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ でノルムを入れたバナハ空間とする。この時

$$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^1} \subset C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})^{\dagger}, \quad \mathsf{D}_{\mathbb{R},\ell^1_{\mathrm{loc}}} \subset C(\mathbb{R})^{\dagger}, \tag{20}$$

である。

証明。$f\in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})$, $T=\sum_i c_i\delta_{a_i}$ とすれば形式的に $Tf=\sum_i c_i f(a_i)$ だが $f\in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})$ だから $|f(x)|\le M$ となる M が存在する。よって

$$|\sum_i c_i f(a_i)|\le\sum_i |c_i||f(a_i)|\le\sum_i |c_i|M=\|\mathbf{c}\|M,$$

となる。さらに $\|f-g\|\le\epsilon$ なら $|Tf-Tg|\le\|\mathbf{c}\|\epsilon$ だから $T\in\mathsf{D}_{\mathbb{R}:\ell^1}$ である。

$T=\sum_i c_i\delta_{a_i}\in\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^1_{\mathrm{loc}}}$ であれば $|a_i|\le M$ となる M が存在する。$f\in C(\mathbb{R})$ であれば $|f(x)|\le N, |x|\le M$ となる N が存在するから

$$|Tf|=|\sum_i c_i f(a_i)|\le\|\mathbf{c}\|N,$$

となって $T\in C(\mathbb{R})^\dagger$ がえられる。よって補題が成立する。

$T=\sum_{i=1}^\infty c_i\delta_{a_i}$ のとき $T_n=\sum_{i=1}^n c_i\delta_{a_i}$ とし (16) に同様に $\mu_{-x,\Psi}T$, $\mu_{0,\Psi}T$ を定義する；

$$\mu_{-x,\Psi}T=\lim_{n\to\infty}\mu_{-x;\Psi}T_n,\quad \mu_{0,\Psi}T=\lim_{n\to\infty}\mu_{0;\Psi}T_n.$$

$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^1}$, $\mu_{-x;\Psi}$ などをつかって群

$$\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R};\ell^1}=\mu_{-x;\Psi}\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^1},\quad \mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R};\ell^1_{\mathrm{loc}}}=\mu_{-x;\Psi}\mathsf{D}_{\mathbb{R}:\ell^1_{\mathrm{loc}}}$$

を定義する。定義から $f(s)\in\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R};\ell^1}$ であれば $f(s)=\prod_{i=1}^\infty(\Gamma(1+s+a_i))^{c_i}$, $\|\mathbf{c}\|=\sum_{i=1}^\infty|c_i|<\infty$ であり, $f(s)\in\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R};\ell^1_{\mathrm{loc}}}$ であれば　さらに $|a_i|\le N, i=1,2,\ldots$ となる $N>0$ が存在する。

補題４。写像 $\vartheta:\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}:\ell^1_{\mathrm{loc}}}\to\bar{\mathfrak{a}}$ が定義できる。

証明。 形式的には

$$\vartheta(\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{c_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \Psi(1+s+a_i)$$

となる。$\bar{\mathfrak{a}}$ では $\Psi(1+s+a_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_i)^n}{n!}\Psi^{(n)}(1+s)$ だから $\bar{\mathfrak{a}}$ の元としては

$$\begin{aligned}\vartheta(\prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{c_i} &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_i)^n}{n!}\Psi^{(n)}(1+s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\sum_{i=1}^{\infty} c_i(a_i)^n)\Psi^{(n)}(1+s)\end{aligned}$$

である。ここで $|a_i| \le N$ をつかうと

$$|\sum_{i=1}^{\infty} c_i(a_i)^n| \le \sum_i |c_i| N^n \le \|\mathbf{c}\| N^n,$$

となる。よって $f(s) = \prod_{i=1}^{\infty}(\Gamma(1+s+a_i))^{c_i} \in \mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R};\ell^1_{\mathrm{loc}}}$ とすれば ϑf の $\bar{\mathfrak{a}}$ での基底 $\Psi^{(n)}(1+s)$ による展開を $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}\Psi^{(n)}(1+s)$ とすれば $|b_n| \le \{\mathbf{c}\| N^n$ である。よって $\vartheta f \in \bar{\mathfrak{a}}$ となって 補題が成立する。

補題 3 は $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\mathbb{Z}}$ の拡大に入れる位相としては ℓ^1 型が適切なことを改めて示唆している。従って $\mathfrak{a}^{\natural}$ に入れる位相も ℓ^1 型が適切なことが推測される（§3 参照）。しかし次節で述べるように ℓ^2 型位相も意味があるようである。

注意。 $\mathfrak{a}$ に ℓ^2 型の位相を入れれば核関数 $\sum_n \lambda_n \Psi^{(n)}(1+s)\Psi^{(n)}(1+t)$ が $(s,t)=(0,0)$ の近傍で収束するには

$$\lambda_n = \frac{\rho^n}{(n!)^2}, \quad |\rho| < 1,$$

と取るのが良い。この場合

$$e_n(s) = \frac{\rho^n}{n!}\Psi^{(n)}(1+s),\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

を正規直交規定にとるのが適切だがそうすると $\|\Psi^{(n)}(1+s)\| = \dfrac{n!}{|\rho|^n}$ となるから $\sum_n \dfrac{a^n}{n!}\Psi(1+s)$ は $|a| < |\rho|$ の時に限り収束するので写像 $\vartheta : \mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R};\ell^1_{\mathrm{loc}}} \to \bar{\mathfrak{a}}$ は $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R};\ell^1_{\mathrm{loc}}}$ の一部でしか定義できない。

6 ℓ^2 型位相

定義３。$C_0^{1,0}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ の連続関数 f で $f(0) = 0, x = 0$ の近傍で微分可能な関数の空間に $\{f_n\}$ が f に広義一様収束、ある $\epsilon > 0$ があって $|x| < \epsilon$ で広義 C^1-収束するとき $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ と定義して位相を入れた空間とする。

補題５。$f(x) \in C_0^{1,0}(\mathbb{R})$ であれば $\sum_n |a_n|^2 < \infty$ のとき $\sum_n |f(a_n)|^2 < \infty$ である。

証明。$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots,$ $\|\mathbf{a}\| = |\sum_n |a_n|^2|^{1/2}$ とする。$\|\mathbf{a}\| < \infty$ だから $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ である。よって任意の $\epsilon > 0$ にたいし N_ϵ があって $n > N_epsilon$ なら $|a_n| < \epsilon$ である。一方 $f \in C_0^{1,0}(\mathbb{R}$ だから ϵ が十分小さければ $|f(x)| < C|x|$ となる $C > 0$ がある。従って有限個の a_n を除き $|f(a_n)| < C|a_n|$ となるから補題が成立する。

命題２。$T = \sum_n c_n \delta_{a_n}$ とする。$\sum_n |c_n|^2 < \infty$, $\sum_n |a_n|^2 < \infty$ であれば $T \in C_0^{1,0}(\mathbb{R})^\dagger$ である。

証明。$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots), \mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots),\ f(\mathbf{a}) = (f(a_1), f(a_2), \ldots)$ とすれば　仮定と補題５から $\mathbf{c}, f(\mathbf{a}) \in$

$\ell^2(\mathbb{N})$ である。よって $\ell^2(\mathbb{N})$ での内積を $(\cdot,\cdot)$ として

$$Tf(x) = (\mathbf{c}, f(\mathbf{a}))$$

となって命題が成立する。

なお $C_0^1(\mathbb{R})$ を C^1-級の関数 \$ f \$ で $f(0) = 0$ となるものの空間に（広義）C^1-位相を要れたものとしても $T \in C_0^1(\mathbb{R})^\dagger$ である。

命題 2 から

$$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^2} = \{\sum_i c_i \delta_{a_i} | \sum_i |c_i|^2 < \infty,\ \sum_i |a_i|^2 < \infty\} \tag{21}$$

とすれば

$$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^2} \subset C_0^{1,0}(\mathbb{R})^\dagger \tag{22}$$

である。

注意。 $\sum_i |a_i|^2 < \infty$ なら $b \neq 0$ のとき $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n |a_i + b|^2 = \infty$ だから τ_b は $\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^2}$ には働かない。

$\mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^2}$ をつかって

$$\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R};\ell^2} = \mu_{-x;\Psi} \mathsf{D}_{\mathbb{R};\ell^2}$$

を定義する。$\tau_a, a \neq 0$ は $\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}:\ell^2}$ に働かないから $\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R};\ell^2}$ の $\mathbb{R} = \{\tau_a | a \in \mathbb{R}\}$ によ拡大は定義できない（$G^\natural_{\mathbb{R};\ell^2}$ は定義できない)。

命題３。 写像 $\vartheta : \mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R};\ell^2} \to \bar{\mathfrak{a}}$ が定義できる。

証明。 $f(s) \in \mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R};\ell^2}$ であれば　形式的に

$$f(s) = \prod_{i=1}^{\infty} \Gamma(1 + s + a_i)^{c_i},$$

$\sum_i |a_i|^2 < \infty$,$\sum_i |c_i|^2 < \infty$ である。よって形式的には $\bar{\mathfrak{a}}$ の「元」としては

$$\vartheta f(s) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \Psi(1+s+a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_i^n}{n!} \Psi^{(n)}(1+s))$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i^n) \Psi^{(n)}(1+s)$$

となる。以下 $\mathbf{a}^n = (a_1^n, a_2^n, \ldots)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots)$, また $\sup_i\{|a_1|, |, a_2|, \ldots) = M$ とおく。$M \leq 1$ であれば $|a_i|^n \leq |a_i|$ となるから $\|\mathbf{a}^n\| \leq \|\mathbf{a}\|$ である。$M > 1$ であっても有限個の a_i を除けば $|a_i| \leq 1$ だから $\|\mathbf{a}^n\| < \infty$ である。ここで $b_i = \dfrac{a_i}{M}$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots)$ とすれば $\|\mathbf{b}^n\| \leq \|\mathbf{b}\|$ で

$$\|\mathbf{a}^n\| = M^n \|\mathbf{b}^n\| \leq M^n \|\mathbf{b}\|$$

となる。よってシュワルツ不等式から

$$|\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i^n| = |(\mathbf{c}, \mathbf{a}^n)| \leq \|\mathbf{c}\| \|\mathbf{a}^n\|$$
$$\leq \begin{cases} \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{a}\| & M \leq 1 \\ M^n \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| & M > 1 \end{cases}$$

である。従って $\vartheta f(s)$ は $\bar{\mathfrak{a}}$ の元として収束する。よって命題が成立する。

この命題では $\mathfrak{a}$ の位相については $\sum_{n=0}^{i} nftyC_n \Psi^{(n)}(1+s)$ が $|C_n| \leq M \dfrac{L^n}{n!}$ であれば収束する事しか要求していない。この要求を満たす内積、たとえば

$$(\Psi^{(n)}(1+s), \Psi^{(m)}(1+s)) = \delta_{n,m} K_n. \quad |K_n| \leq n!^{1-\epsilon}$$

が自然に $\mathfrak{a}$ に定義できるかは問題である。

7 多変数の場合

変換 $\mathcal{R}$ の $\mathbb{R}^n$ への拡張 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathbf{X}}$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ は

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{s})](\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{s_i}}{\Gamma(1+s_i)} f(\mathbf{s})\, d\mathbf{s},$$

$\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, $d\mathbf{s} = ds_1 \cdots ds_n$、だから

$$\mathcal{R}_{x_i}[f(\mathbf{s})](\mathbf{x}) = \int_{s_i=-\infty}^{s_i=\infty} \frac{x_i^{s_i}}{\Gamma(1+s_i)} f(\mathbf{s}) ds_i$$

とすれば

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x}} = \mathcal{R}_{x_i} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{x_n} \tag{23}$$

である。$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$、$\dfrac{\partial^{\mathbf{a}}}{\partial x^{\mathbf{a}}} = \dfrac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}} \cdots \dfrac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}}$ とすれば f が適当な条件を満たせば

$$\frac{\partial^{\mathbf{a}}}{\partial x^{\mathbf{a}}} \mathcal{R}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{s})](\mathbf{x}) = \mathcal{R}[\tau_{\mathbf{a}} f(\mathbf{s})](\mathbf{x}),$$

$\tau_{\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{a})$, である。

$\mathcal{N}_{\mathbf{x}}$ 等を同様に定義すれば

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x}} = \mathcal{B}_{\mathbf{x}} \circ \mathcal{N}_{\mathbf{x}}, \tag{24}$$

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x}} = (\mathcal{B}_{x_1} \circ \mathcal{N}_{x_1}) \circ \cdots \circ (\mathcal{B}_{x_n} \circ \mathcal{N}_{x_n}) \tag{25}$$

である。これらから $\{\dfrac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}}, \ldots, \dfrac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}} | (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$ と $\{x_1^{a_1}, \ldots, x_n^{a_n} | (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$ で生成される群 $G_{\mathbb{R}^n}$ は $\{\dfrac{\Gamma(1+s_1)}{\Gamma(1+s_1-a_1)}, \ldots, \dfrac{\Gamma(1+s_n)}{\Gamma(1+s_n-a_n)} |$

$(a_1, \ldots, a_n) \in \overbrace{\mathbb{R}^\times \times \cdots \times \mathbb{R}^\times}^{n}\}$, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, から乗

法で生成される群 $\mathsf{A}_{\mathbb{R}^n}$ を $\{\tau_{\mathbf{a}}\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n\}\cong\mathbb{R}^n$ で拡大した群と同型である。$\mathcal{R}_{\mathbf{x}}$ で変換しなければ $\mathsf{A}_{\mathbb{R}^n}$ は

$$E^a_{i:\,\ell}=x^a_i\frac{\partial^a}{\partial x^a_i}$$

として $\{E^{a_1}_{1:\ell},\ldots,E^{a_n}_{n;\ell}|(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n\}$ から生成された群である。

$\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}}$ の多変数化 $\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n}$ は $\{\Gamma(1{+}s_i{+}a_i)|1\leq i\leq n,(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n\}$ から乗法で生成された自由アーベル群と同型であり $\mathcal{R}_{\mathbf{x}}$ を経由しなければ　これは $\mathsf{A}_{\mathbb{R}^n}$ に $\mathcal{B}_{x_1},\ldots,\mathcal{B}_{x_n}$ を添加した群である。定義から

補題 6。$f(\mathbf{s})\in\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n}$ であれば

$$f(\mathbf{s})=f_1(s_1)\cdots f_n(s_n)$$

と変数分離される。とくに総ての s について $f(\mathbf{s})\neq 0$ であれば $\rho f=\rho_\ell f=f^{-1}df$ として

$$\rho f(\mathbf{s})=\sum_{i=1}^n f_i(s_i)^{-1}\frac{df_i(s_i)}{ds_i}ds_i \tag{26}$$

である。

一方 $\log(\frac{\partial}{\partial x_1}),\ldots,\log(\frac{\partial}{\partial x_n})$ と $\log x_1,\ldots,\log x_n$ で生成されたリー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ は $\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ と $\Psi(1+s_1),\ldots,\Psi(1+s_n)$ から生成されたリー環と同型である。しかし補題 3 から $\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n}$ からの写像を得るためには $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ の生成元としては $\Psi(1+s_i)$ でなく $\Psi(1+s_i)ds_i$ を取らなければいけない。この場合でも

$$\begin{aligned}&\Psi(1+s_i)ds_i,\Psi(1+s_j)ds_j]\\=&\Psi(1+s_i)\Psi(1+s_j)ds_i\wedge ds_j-\\&-(-1)^{1\times 1}\Psi(1+s_j)\Psi(1+s_i)ds_j\wedge ds_i=0\end{aligned}$$

だからリー環の構造は変わらない。以下では $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ は $\Psi(1+s_i)ds_i, 1 \le i \le n$ で生成されたものとする。

生成元をこう取り替えれば $\rho : \mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n} \to \bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}^n}$ が中への同型になる：

$$0 \to \mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{\rho} \bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}^n}$$

が完全列になる。

この生成元の取り替えは $\rho : \mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n} \to \bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}^n}$ が定義されるための便宜的なものに見える。実質的な意味を探るのは課題である。しかし ρ は非アーベル　ド・ラム理論で重要なので $\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n}$ や $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}^n}$ 等が非アーベル　ド・ラム理論と関係していることを示唆しているのかもしれない。

写像 $\mu_{0;\Psi}, \mu_{-x,\Psi}$ の高次元化として自由アーベル群 $\mathsf{D}_{\mathbb{R}^n;\mathbb{Z}}$ から $\mathsf{A}_{\mathbb{R}^n}$、$\mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n}$ への写像 $\mu_{\mathbf{0};\Psi}, \mu_{-\mathbf{x};\Psi}$ は

$$\mu_{\mathbf{0};\Psi} T = \exp(T \sum_{i=1}^{n} \int_0^{s_i} \Psi(1 + x_i + t_i) dt_i), \tag{27}$$

$$\mu_{-\mathbf{x};\Psi} T = \exp(T \sum_{i=1}^{n} \int_{-x_i}^{s_i} \Psi(1 + x_i + t_i) dt_i) \tag{28}$$

で定義できる。特に $\mu_{-\mathbf{x};\Psi} : \mathsf{D}_{\mathbb{R}^n;\mathbb{Z}} \cong \mathsf{A}^\natural_{\mathbb{R}^n}$ である。$\mathsf{D}_{\mathbb{R}^n;\mathbb{C}}$ の完備化やそれに関連した $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}^n}$ の位相に関する議論は５節・６節での議論を移せ特に新しい問題は無いようである。

問題。 X が $\mathbb{R}^n$ でない場合 $\mu_{-\mathbf{x};\Psi}$ のような写像が定義できるか？　例えば $X = T^n$; n-次元トーラスであれば出来るか？。$\mathsf{D}_{T^n;\mathbb{Z}}$ には T^n が作用するから T^n による拡大が定義できる。この拡大の元は何らかの意味での作用素としての解釈ができるか？

8　線形変数変換

$T \in GL(n,\mathbb{R})$ とすれば　T は $\{\tau_{\mathbf{a}}|\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\}$ と $\{\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}|(a_1,\ldots,,a_n) \in \mathbb{R}^n\}$ を全体として不変にする。一方 T は $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}^n}$, $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}^n}$ に働き同型な群（リー環）に移すが固定はしない。

定義４。$\mathfrak{G} \subset GL(n,\mathbb{R})$ する。$\cup_{T\in\mathfrak{g}} T\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}^n}$ から生成された群を $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ とする。リー環 $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ も同様に定義する。

$\tau_{\mathbf{a}}$ は $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ に働くから $\{\tau_{\mathbf{a}}|\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\} \cong \mathbb{R}^n$ による $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ の拡大が定義できる。この群を $G^{\natural}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ とする。リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ も同様に定義する。

定義から $T \in \mathfrak{G}$ であれば T の作用は $G^{\natural}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ を動かさない。また適当なノルムによる $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}^n}$ の完備化を $\bar{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{g})$ とすれば ρ は $\mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}^n}$ から $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}^n}$ の中への同型である：

$$0 \to \mathsf{A}^{\natural}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G}) \xrightarrow{\rho} \bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$$

は完全列である。

$\mathfrak{G}$ は自己共役（$SO(n)$ など）とし M は接バンドル＄TM＄が $\mathfrak{G}$-バンドルとなる平坦な多様体とする。加群として

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G}) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{a}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$$

$\mathbb{R}^n = \{\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}|(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n\}$ だから $\mathbb{R}^n$ の部分は TM(のファイバー)、$\mathfrak{a}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ は T^*M にアソシエートしたバンドルのファイバーになる。従って $TM \oplus T^*M$ にアソシエートした $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{G})$ をファイバーとしたバンドル $\mathfrak{g}_M(\mathfrak{G})$ が構成できる。なおこのバンドルは

ファイバーが $\bar{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}^n}$ に拡張したバンドル $\bar{\mathfrak{g}}_M(\mathfrak{G})$ に拡大できる。

このバンドルの幾何学的意味や $G^{\natural}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{g})$ について同様の構成が出来るかは今後の課題である。

これは昨年の沼津研究会での話の続きです。予備知識は昨年の予稿とそれに手を入れた「分数冪微分で現れた群と離散デルタ・ポテンシャル」　数学・物理通信５－６　（２０１５)、２－１５　で充分です。

.