

# 分数冪微分に関連した群の局所表現

浅田 明

掛け算作用素で生成される群  $\{x^a | a \in \mathbb{R}\}$  と分数冪微分で生成される群  $\{\frac{d^a}{dx^a} | a \in \mathbb{R}\}$  は定義域を適当に取れば ともに 1 経数群でその生成作用素は  $\log x$  と  $\log(\frac{d}{dx})$  である。

この 2 つの群から生成される群  $G_{\mathbb{R}}$  と  $\log x$  と  $\log(\frac{d}{dx})$  から生成されるリー環  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  の構造は数理研講究録 1692 ([2], cf.[3]) でそれぞれアーベル群  $A_{\mathbb{R}}$ , 可換リー環  $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$  の  $\mathbb{R}$  による拡大であることを示した:

$$G_{\mathbb{R}} \cong A_{\mathbb{R}} \rtimes \mathbb{R}, \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}/\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}.$$

具体的には 後で説明する変換  $\mathcal{R}$  を使って  $G_{\mathbb{R}}^b = \mathcal{R}^{-1}G_{\mathbb{R}}\mathcal{R}$ ,  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^b = \mathcal{R}^{-1}\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}\mathcal{R}$  とすれば,  $\mathbb{R}$  は  $G_{\mathbb{R}}^b$  では  $\tau_a; a \in \mathbb{R}, \tau_a f(x) = f(x+a), a \in \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^b$  では  $a\frac{d}{dx}, a \in \mathbb{R}$  で与えられる。また  $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^b = \mathcal{R}^{-1}\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}\mathcal{R}$  は  $\Psi^{(k)}(1+s) : k = 0, 1, \dots, \Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$  を基底とする無限次元ベクトル空間である。 $A_{\mathbb{R}}^b = \mathcal{R}^{-1}A_{\mathbb{R}}\mathcal{R}$  の構造は自由アーベル群

$$A_{\mathbb{R}}^b \cong \sum_{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \mathbb{Z}a,$$

であり ( $a$  は其々独立な基底) 対数微分  $\vartheta$ :

$$\vartheta f(x) = \frac{d}{dx}(\log(f(x))) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

によって  $A_{\mathbb{R}}^b$  が  $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^b$  の適当な完備化  $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}}^b$  に埋め込まれるという関係がある

$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  は  $\log(\frac{d}{dx}), \log x$  が作用する忠実な表現加群を持つが  $G_{\mathbb{R}}$  は大域的な関数からなるそのような表現加群を持たない (らしい)。そのため局所表現という概念を導入し  $A_{\mathbb{R}}$  についてその存在を示す ( $G_{\mathbb{R}}$  については解ってない)。原点に極をもつ関数の芽に働くのを許せば  $A_{\mathbb{R}}^b$  の忠実な表現加群は得られるが これから  $A_{\mathbb{R}}$  の表現加群は得られないようである。

また  $G_{\mathbb{R}}^b$  は実軸上の離散な集合にだけ極をもつ有理型関数（の実軸上の芽）の加群が表現加群になるがこれから  $G_{\mathbb{R}}$  の表現も得られないようである。

多変数の場合 座標系が固定されればこの結果は機械的に拡張される:  $\{x_1^{a_1}, \dots, x_n^{a_n} | (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$  と  $\{\frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}}, \dots, \frac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}} | (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$  で生成される群を  $G_{\mathbb{R}^n}$ ,  $\{\log x_1, \dots, \log x_n\}$  と  $\{\log(\frac{\partial}{\partial x_1}), \dots, \log(\frac{\partial}{\partial x_n})\}$  で生成されるリー環を  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$  とすれば

$$G_{\mathbb{R}^n} \cong \overbrace{G_{\mathbb{R}} \times \dots \times G_{\mathbb{R}}}^n, \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n} \cong \overbrace{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}^n.$$

$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}^b = \mathcal{R}^{-1} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n} \mathcal{R}$  は微分と関数の芽で生成されるから解析的な変数変換で同型なリー環に移る。よって  $M$  が実解析的であれば  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}^b$  をファイバーとする接バンドルに從属するバンドル  $\mathfrak{g}^{\sharp} M$  が構成できる。なお  $\vartheta$  の高次元化は

$$\rho : \rho(g) = g^{-1} dg$$

とするのが良いらしいので  $\Lambda T^* M$  に從属したバンドルを考える方が適切かもしれない。しかし  $G_{\mathbb{R}^n}$  は大域的な関数で生成されるから線形変換に限って変換を考えなければいけない。

特に  $SL(n, \mathbb{R})$  が自己同型群として働く群  $G_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}$ , リー環  $\mathfrak{g}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}$  は構成出来る。よって  $M$  が向き付け可能な  $n$ -次元平坦多様体であれば  $1 \oplus TM \oplus T^* M$  に付随する  $\mathfrak{g}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}$ -バンドル  $\mathfrak{g}^{\sharp} M$  が構成できる。ここで  $1$  は自明なバンドルだが本来はデターミナント・バンドルである。しかしこの場合構造群が可縮な  $\mathbb{R}_+$  なので自明なバンドルになる。

$M$  が複素平坦バンドルのときは  $GL(n, \mathbb{C})$  が自己同型群として働く群  $G_{GL(n, \mathbb{C}), \mathbb{C}^n}^{\sharp}$ , リー環  $\mathfrak{g}_{GL(n, \mathbb{C}), \mathbb{C}^n}^{\sharp}$  が構成できこれを使って  $\det M \oplus TM \oplus T^* M$  に付随する  $\mathfrak{g}_{GL(n, \mathbb{C}), \mathbb{C}^n}^{\sharp}$ -バンドル  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\sharp} M$  が構成できる。ここで  $\det M$  は  $M$  のデターミナント・バンドルである ([6])。

## 1 分数冪微分と変換 $\mathcal{R}$

$\Re a > 0$  のとき  $a$ -階の不定積分は

$$I^a(f(s))(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-s)^{a-1} f(s) ds$$

で定義される。 $I^a(s^c)(x) = \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c+a)} x^{c+a}$  だから ( $a, c$  で解析接続して)

$$\frac{d^a}{dx^a} x^c = \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)} x^{c-a}$$

と定義しこれを線形に拡張して  $a$ -階の微分を定義する;

$$\frac{d^a}{dx^a} \left( \sum_n b_n x^{c_n} \right) = \sum_n \frac{\Gamma(1+c_n)}{\Gamma(1+c_n-a)} b_n x^{c_n-a}.$$

積分変換  $\mathcal{R}$  を

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^s}{\Gamma(1+s)} f(s) ds$$

で定義する。 $x < 0$  のときは  $x^s = |x|^s e^{-i\pi a}$ , または  $|x|^s e^{i\pi a}$  とする。 $x$  を複素数とするときは  $\mathcal{R}[f(s)](x)$  は  $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}, x < 0\}$  で定義された関数と見る (あるいは  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  の多価関数と見る)。 $\mathcal{R}$  の適切な定義域についてはいろいろ問題があるが省略する ([4],[5] 参照)。

両側ラプラス変換  $\mathcal{L}[g(t)](y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} g(t) dt$  を用いて変換  $\mathcal{N}$ ;

$$\mathcal{N}[f(s)](x) = \mathcal{L}[f(s)](\log x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(s) ds$$

を導入すれば

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{N}\left[\frac{f(s)}{\Gamma(1+s)}\right](x)$$

である。ラプラス変換は逆を持つから  $\mathcal{R}$  は関数のうえで定義されていれば逆をもつ。しかし定義域を超関数まで拡張すれば

$$\ker \mathcal{R} = \{\delta_{-n} | n \in \mathbb{N}\}$$

だから必ずしも逆は無い。

なおボレル変換  $\mathcal{B}[\phi(\zeta)](z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{z/\zeta}}{\zeta} \phi(\zeta) d\zeta$  とその逆変換  $\mathcal{B}^{-1}[f(s)](x) = \int_0^\infty e^{-s} f(sx) ds$  を用いた拡張を使うと

$$\mathcal{R} = \mathcal{B} \circ \mathcal{N}$$

という分解ができる ([4],[5])。

$\frac{f(s)}{\Gamma(1+s)}$  が急減少であれば

$$\begin{aligned} \frac{d^a}{dx^a} \mathcal{R}[f(s)](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} \frac{x^{s-a}}{\Gamma(1+s)} f(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{s-a}}{\Gamma(1+s-a)} f((s-a)+a) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^t}{\Gamma(1+t)} f(t+a) dt \end{aligned}$$

$t = s - a$ , だから

$$\frac{d^a}{dx^a} \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\tau_a f(s)](x), \quad \tau_a f(s) = f(s+a)$$

である。この式から定義域をたとえば  $\mathcal{R}(H)$ 、 $H$  は  $\frac{f(s)}{\Gamma(1+s)}$  が  $s \rightarrow \pm\infty$  で急減少となる関数  $f(s)$  の空間、と取れば

$\{\frac{d^a}{dx^a} | a \in \mathbb{R}\}$  は 1 経数群になる。その生成作用素;  
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\frac{d^h}{dx^h} - I)$ , は  $\log(\frac{d}{dx})$ ;

$$\log(\frac{d}{dx})f(x) = -(\gamma f(x) + \int_0^x \log(x-t) \frac{df_+(t)}{dt} dt),$$

$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ , である。ただし  $\frac{df_+(t)}{dt}$  は超関数の意

味での微分とする。 $\log(\frac{d}{dx})$  については

$$\log(\frac{d}{dx}) \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\frac{df(s)}{ds}](x)$$

が成立する。

注意。一般的には  $\frac{d^a}{dx^a} \frac{d^b}{dx^b} = \frac{d^{a+b}}{dx^{a+b}}$  は必ずしも成立しない。たとえば

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \left( \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x^{-1/2} \right) = 0 \neq \frac{d}{dx} x^{-1/2}.$$

H 以外に有用な関数空間として  $\log x$  の整関数の作る空間  $F_{\log}$  がある。 $(\log x)^n = \frac{\partial^n}{\partial c^n} x^c|_{c=0}$  だから

$$\begin{aligned} \frac{d^a}{dx^a} (\log x)^n &= \frac{\partial^a}{\partial x^a} \left( \frac{\partial^n}{\partial c^n} x^c \right) \Big|_{c=0} \\ &= \frac{\partial^n}{\partial c^n} \left( \frac{\partial^a}{\partial x^a} x^c \right) \Big|_{c=0} = \frac{\partial^n}{\partial c^n} \left( \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)} x^{c-a} \right) \Big|_{c=0} \end{aligned}$$

である。これから

$$\frac{d^a}{dx^a} (\log x)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left( \frac{\partial^k}{\partial c^k} \left( \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)} \right) \right) (\log x)^{n-k} x^{c-a} \Big|_{c=0}$$

となるから  $\frac{d^a}{dx^a}$  は  $F_{\log}$  に作用する。 $a$  が整数であればこの右辺は意味がないが  $a \rightarrow n$  の極限を取れば普通の微分の公式が再現される。また  $\log\left(\frac{d}{dx}\right)$  も  $F_{\log}$  に作用する。

## 2 $G_{\mathbb{R}}$ の構造

補題 1。  $\mathcal{R}[f(s)](x)$ ,  $\mathcal{R}\left[\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} \tau_{-a} f(s)\right](x)$  がともに定義出来れば

$$x^a \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}\left[\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} \tau_{-a} f(s)\right](x), \quad (1)$$

である。

証明。仮定から次の計算ができる。

$$\begin{aligned} x^a \mathcal{R}[f(s)](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{s+a}}{\Gamma(1+s)} f(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^t}{\Gamma(1+t)} \frac{\Gamma(1+t)}{\Gamma(1+t-a)} f(t-a) dt, . \end{aligned}$$

$t = s + a$ . よって  $t + a$  を  $s$  と書き換えて補題を得る。

補題の仮定をみたす関数の空間としては

$$\begin{aligned} H_a &= H_{a;1} = \\ &= \{f(s) \mid f(s) = 0, s = a - n, n \in \mathbb{N}, \\ &\quad \frac{f(s)}{\Gamma(1+s)} \text{ is rapidly decreasing at } |s| \rightarrow \pm\infty\}, \end{aligned}$$

がある。  $H_a$  の各  $a - n$  で  $m$  位の零点をもつ部分空間を  $H_{a;m}$ ,  
 $\bigcap_{m \geq 1} H_{a;m} = H_{a;\infty}$ ;

$$H_{a_1, \dots, a_k; m} = \bigcap_{j=1, \dots, k} H_{a_j; m} \quad H_{a_1, \dots, a_k; \infty} = \bigcap_{j=1, \dots, k} H_{a_j; \infty}$$

とおく。  $H_{a_1, \dots, a_k; \infty}$  では任意の  $n$  について  $\Gamma(1+s-a_i)^n, 1 \leq i \leq k$  を掛けることが中への写像になる。

簡単のため

$$\Gamma_b^a(s) = \Gamma_b^a = \frac{\Gamma(1+s+a)}{\Gamma(1+s+b)}$$

と置く。この記法では  $x^a \mathcal{R}[f](x) = \mathcal{R}[\Gamma_{-a}^0 \tau_{-a} f](x)$  である。定義から

$$\Gamma_a^a = 1, \Gamma_b^a \Gamma_c^b = \Gamma_c^a, \tau_a \Gamma_c^b = \Gamma_{c+a}^{b+a} \tau_a \quad (2)$$

である。(1), (2) から

**定理 1.**  $\{x^a \mid a \in \mathbb{R}\}$  と  $\{\frac{d^a}{dx^a} \mid a \in \mathbb{R}\}$  から生成される群  $G_{\mathbb{R}}$  は  $\{\Gamma_0^a \mid a \in \mathbb{R}\}$  から乗法で生成される群  $A_{\mathbb{R}}^b$  と  $\{\tau_a \mid a \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$  から生成される群  $G_{\mathbb{R}}^b$  と同型である。  $A_{\mathbb{R}} = \mathcal{R} A_{\mathbb{R}}^b \mathcal{R}^{-1}$  は  $G_{\mathbb{R}}$  の正規部分群だが  $\mathbb{R} \cong \{\frac{d^a}{dx^a} \mid a \in \mathbb{R}\}$  は正規部分群ではなく

$$G_{\mathbb{R}} = A_{\mathbb{R}} \rtimes \mathbb{R} \quad (3)$$

である。

**証明.** (2) から  $\Gamma_b^a = \Gamma_0^a (\Gamma_0^b)^{-1}$  だから任意の実数列  $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$  と整数列  $n_1, \dots, n_k$  について

$$(\Gamma_{b_1}^{a_1})^{n_1} \dots (\Gamma_{b_k}^{a_k})^{n_k} \in A_{\mathbb{R}}^b$$

である。よって  $G_{\mathbb{R}}^b$  は  $A_{\mathbb{R}}^b$  と  $\mathbb{R}$  で生成される。また  $\tau_a \Gamma_c^b \tau_{-a} = \Gamma_{c+a}^{b+a}$  だから  $A_{\mathbb{R}}^b$  は  $G_{\mathbb{R}}^b$  の正規部分群だが  $\Gamma_0^a \tau_b \Gamma_a^0 = \Gamma_0^a \Gamma_{a+b}^b \tau_b \notin \mathbb{R}$  だから  $\mathbb{R}$  は  $G_{\mathbb{R}}^b$  の正規部分群ではない。よって定理が得られる。

以下では必要がなければ簡単のため  $G_{\mathbb{R}}, A_{\mathbb{R}}$  と  $G_{\mathbb{R}}^b, A_{\mathbb{R}}^b$  を同一視し、 $G_{\mathbb{R}}$  等と書く。ただし  $A_{\mathbb{R}}^b$  は原点に極をもつ解析関数の芽の加群に作用できるが、この加群に  $\mathcal{R}$  は定義できないので  $A_{\mathbb{R}}$  にはこのような表現加群は無い (らしい)。

補題 2。任意の 0 でない実数列  $a_1, \dots, a_k$  と整数列  $n_1, \dots, n_k$  について関係

$$(\Gamma_0^{a_1})^{n_1} \dots (\Gamma_0^{a_k})^{n_k} = 1 \quad (4)$$

が成立することは無い。

証明。  $\vartheta f(s) = \frac{d}{ds} \log(f(s))$  とすれば  $\vartheta(\Gamma_0^a) = \Psi(1+s+a) - \Psi(1+s)$  により (4) から

$$\begin{aligned} & \vartheta((\Gamma_0^{a_1})^{n_1} \dots (\Gamma_0^{a_k})^{n_k}) \\ &= n_1(\Psi(1+s+a_1) - \Psi(1+s)) + \dots + \\ & \quad + n_k(\Psi(1+s+a_k) - \Psi(1+s)) = 0 \end{aligned}$$

となる。しかし  $\Psi(1+s+a)$  は  $s = -a-1, -a-2, \dots$  でのみ 1 位の極を持つので  $a_1 < a_2 < \dots < a_k$  としたとき

$$n_1 \Psi(1+s+a_1) + \dots + n_k \Psi(1+s+a_k) - (n_1 + \dots + n_k) \Psi(1+s),$$

$a_1, \dots, a_k$  は 0, 1 でない実数、は  $s = -1 - a_1$  で 1 位の極を持つから関数として 0 にはならない。よって補題が成立する。

補題 2 から  $A_{\mathbb{R}}^b$  は  $\Gamma_0^a; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  を生成元とする自由アーベル群である:

$$A_{\mathbb{R}}^b \cong \sum_{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \mathbb{Z} \Gamma_0^a. \quad (5)$$

定義から任意の  $a$  について  $H_a \subset H$  である。  $A_{a_1, \dots, a_k}^b$  を  $A_{\mathbb{R}}^b$  の  $\Gamma_0^{a_1}, \dots, \Gamma_0^{a_k}$  で生成された部分群とし  $A_{a_1, \dots, a_k}$  を対応する分数冪オイラー微分

$$E_r^{a_j} = x^{-a_j} \frac{d^{-a_j}}{dx^{-a_j}}$$

で生成された群 ( $G_{\mathbb{R}}$  の部分群) とすれば  $A_{a_1, \dots, a_k}$  は  $\mathcal{R}(H_{a_1, \dots, a_k; \infty})$  の変換群として同型に表現される。

しかし  $\{a_1, a_2, \dots\}$  が無限集合であれば  $\bigcap_{a_1, a_2, \dots} H_{a_i; \infty}$  は  $\{0\}$  になる場合もあるのでこのようなことは言えない。よって  $H$  またはその部分空間から  $A_{\mathbb{R}}$  の表現加群は得られないようである。

**定義 1.**  $G$  を群、 $M$  をベクトル空間で  $G$  の元  $x$  の  $M$  (の部分空間) への作用  $\mu = \mu(x)$  が定められているとする。

$G$  の有限個の元  $\{x_1, \dots, x_k\}$  から生成される  $G$  の部分群を  $G_{x_1, \dots, x_k}$  に対し  $M$  の部分空間  $M_{x_1, \dots, x_k}$  があり  $G_{x_1, \dots, x_k}$  は  $\mu$  により  $M_{x_1, \dots, x_k}$  からの変換群として同型に表現されるとき  $(M, \mu)$  を  $G$  の忠実な局所表現加群と呼ぶ。

この定義に従えば

**定理 2.**  $\mathcal{R}(H)$  は  $A_{\mathbb{R}}$  の忠実な局所表現加群である。

しかし  $\tau_a$  の作用を入れると  $\mathcal{R}(H)$  は局所表現加群とはならない ( $G_{\mathbb{R}}$  の忠実局所表現加群にはならない)。

**注意.**  $A_{\mathbb{R}}^b$  は原点で極を持つ解析関数の芽の加群を忠実な表現加群として持つ。しかしこの加群には  $\mathcal{R}$  が定義できないのでこれから  $A_{\mathbb{R}}$  の表現は得られない (らしい)。

また  $G_{\mathbb{R}}^b$  も実軸上の離散な集合にだけ極をもつ有理型関数 (の実軸上の芽) の加群が忠実な表現加群になるがこれから  $G_{\mathbb{R}}$  の表現は得られないようである。

$x^a = e^{a \log x}$  だから  $x^{a_1}, \dots, x^{a_k}$  の多項式は  $F_{\log}$  にふくまれる。 $\alpha$  を  $n_1 a_1 + \dots + n_k a_k + \alpha$  がすべての  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$  について負の整数にならないように取れば

$$F_{a_1, \dots, a_k; \alpha} = \left\{ \sum_{n_1, \dots, n_k} c_{n_1, \dots, n_k} x^{n_1 a_1 + \dots + n_k a_k + \alpha} \in F_{\log} \right\}$$

は  $G_{\mathbb{R}}$  の  $x^{a_1} \frac{d^{a_1}}{dx^{a_1}}, \dots, x^{a_k} \frac{d^{a_k}}{dx^{a_k}}$  で生成された部分群の忠実な表現加群になる。従って  $F_{\log}$  から  $A_{\mathbb{R}}$  の忠実な局所表現加群がえられる。分数冪微分方程式を扱うには  $F_{\log}$  のほうが  $\mathcal{R}(H)$  より役に立つ。



### 3 $\log x$ と $\log(\frac{d}{dx})$ で生成されたりー環

補題3。  $\log x \mathcal{R}[f(s)](x)$  が定義でき

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{R}\left[\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} \tau_{-a} f(s)\right](x) \\ &= \mathcal{R}\left[\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} \tau_{-a} f(s)\right)\right](x) \end{aligned}$$

が成立し  $\mathcal{R}\left[\left(\Psi(1+s) - \frac{d}{ds}\right) f(s)\right](x)$  が定義できれば

$$\log x \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}\left[\left(\Psi(1+s) - \frac{d}{ds}\right) f(s)\right](x) \quad (6)$$

が成立する。

証明。仮定と  $\frac{\partial}{\partial a} x^a = \log x \cdot x^a$  と  $\frac{\partial}{\partial a} \tau_a = \frac{d}{dx} \tau_a$  から

$$\begin{aligned} & \log x \mathcal{R}[f(s)](x) \\ &= \frac{\partial}{\partial a} x^a \mathcal{R}[f(s)](x)|_{a=0} \\ &= \mathcal{R}\left[\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} \tau_{-a} f(s)\right)\right](x)|_{s=0} \\ &= \mathcal{R}\left[\frac{\Gamma(1+s)\Gamma'(1+s-a)}{(\Gamma(1+s-a))^2} \tau_{-a} f(s) - \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} \frac{d}{ds} \tau_{-a} f(s)\right](x)|_{a=0} \\ &= \mathcal{R}\left[\left(\frac{\Gamma'(1+s)}{\Gamma(1+s)} - \frac{d}{ds}\right) f(s)\right](x) \end{aligned}$$

となって補題が成立する。

この補題が成立する関数空間としては  $H_{0;\infty}$  がとれる。

$$\log\left(\frac{d}{dx}\right) \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}\left[\frac{d}{ds} f(s)\right](x)$$

であり  $\mathcal{R}$  は  $H$  を定義域とすれば逆をもつから 掛け算作用素  $\log x$  と  $\log(\frac{d}{dx})$  で生成されるりー環  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  は  $\frac{d}{ds}$  と  $\Psi(1+s)$  から生成されるりー環  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\flat}$  と同型である。簡単のため使い分ける必要が

なければ  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^b$  も  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  と書く。  $G_{\mathbb{R}}^b$  と違って  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^b$  は  $H_{0;\infty}$  を忠実な表現空間としてもつ。 よって

**定理 3。**  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  は  $\mathcal{R}(H_{0;\infty})$  を忠実な表現空間としてもつ。

この定理から  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  については局所表現を考える必要はない。

$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^b$  は微分作用素と正則関数で定義されているので 原点での正則関数 (または実解析関数) の芽と微分作用素で定義できる (局所的である)。これに対応する表示が  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  でも得られるかはこれからの問題である。以下では取扱いが簡単なので  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^b$  等をつかい  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  等とかく。

$$\left[\frac{d}{ds}, \Psi^{(k)}(1+s)\right] = \Psi^{(k+1)}(1+s), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

であり  $\Psi^{(k)}(1+s)$  は  $s = -1, -2, \dots$  にだけ位数  $k+1$  の極をもつから  $\{\Psi^{(n)}(1+s) | n = 0, 1, 2, \dots\}$  は 1 次独立である。よって  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  は  $\frac{d}{ds}$  と  $\Psi(1+s), \Psi'(1+s), \dots, \Psi^{(n)}(1+s), \dots$  を基底とするベクトル空間である。  $\mathfrak{a}_{\mathbb{R};k}$  を  $\{\Psi^{(n)}(1+s) | n > k\}$  で張られる部分空間とすれば  $\mathfrak{a}_{\mathbb{R};k}$  は  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  のイデアルである;

$$\left[\frac{d}{ds}, \mathfrak{a}_{\mathbb{R};k}\right] = \mathfrak{a}_{\mathbb{R};k+1}.$$

**定理 4。**  $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{R};0}$  は極大イデアルであり

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}/\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}, \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \frac{d}{ds} \oplus \mathfrak{a}_{\mathbb{R}} \quad (7)$$

である。

$\mathbf{c} = \sum_k c_k \Psi^{(k)}(1+s) \in \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$  に適当なノルム  $\|\mathbf{c}\|$ , 例えば

$$\|\mathbf{c}\|_1 = \sum_k |c_k|,$$

を入れそのノルムによる完備化を  $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}}$  とする。

**注意。**  $\Psi^{(n)}(1+s)$  は負の整数の所で位数  $n+1$  の極を持つから、こうしたノルムを適当な  $\mathbb{R}$  の上などでの積分で表示する事は難しいようである。

以下では  $\bar{a}_{\mathbb{R}}$  には任意の  $c > 0$  について

$$\mathbf{c}(a) = (1, a, \frac{a^2}{2!}, \dots, \frac{a^n}{n!}, \dots)$$

が入っているとする。  $|a|$  が小さければ

$$\psi(\mathbf{c}(a))(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \Psi^{(n)}(1+s) = \Psi(1+s+a), \quad |s+a| < 1$$

である。

$\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots)$  とし  $\mathbf{c} \sim \mathbf{c}'$  を  $c'_n = c_n t^n$  で同値関係を定義する。この同値類を  $[\mathbf{c}]$  とし  $c_0 = 1$  ( $c_k = 1, c_0 = \dots c_{k-1} = 0, c_k \neq 0$  のとき) となる  $\mathbf{c}_1$  をその代表とする。定義から  $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, t)$  とあらわされるが  $|t|$  が小さいとき

$$\psi((\mathbf{c}_1, t))(s) = \sum_n c_{1,n} t^n \Psi^{(n)}(1+s),$$

だから  $\mathbf{c}_1 = (\dots, c_{1,n}, \dots)$  が  $\bar{a}_{\mathbb{R}}$  の位相で収束し  $t = t_0$  まで解析接続されれば

$$\psi(\mathbf{c})(s) = \psi((\mathbf{c}_1, t_0))(s), \quad \mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, t_0)$$

で  $\psi(\mathbf{c})(s)$  を定義する。この定義では

$$\psi((a))(s) = \Psi(1+s+a) \tag{8}$$

である。

**定理 5.**  $\vartheta$  を

$$\vartheta f(x) = \frac{d}{dx}(\log(f(x))) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

で定義すれば  $\phi \in \mathbf{A}_{\mathbb{R}}$  であれば  $\vartheta(\phi)$  は  $\psi$  の像に入り

$$\psi^{-1}\vartheta : \mathbf{A}_{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbf{a}}_{\mathbb{R}}$$

は中への同型である。詳しくは  $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$  の像は  $\bar{\mathbf{a}}_{\mathbb{R};2}$  に含まれる。

$\bar{\mathbf{a}}_{\mathbb{R}}$  は位相ベクトル空間であり  $\psi^{-1}\vartheta$  は中への埋め込みだから  $\bar{\mathbf{a}}_{\mathbb{R}}$  から  $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$  に位相が誘導できる。具体的には この位相は  $\prod_{n=1}^{\infty} (\Gamma_0^{a_0})^{c_n}$  の形の無限積を考えることになる。この形の無限積であらわされる関数はどのようなものかは問題である。

また  $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}}$  の定義は一意でないので, どのような  $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}}$  が適切なのか調べるのも今後の問題である。またこうして誘導された位相と  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  での広義一様収束で入れた位相との関係も問題である。

$\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}}$  から  $A_{\mathbb{R}}$  に誘導された位相で  $A_{\mathbb{R}}$  を完備化した時この完備化がバナハ・リー群になるか? またバナハ・リー群になれば  $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}}$  はそのリー代数になるかは今後の問題である。

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Psi^{(n)}(1+s) \in \bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}}$  が関数  $f(s)$  に収束していれば  $\psi^{-1}\vartheta$  の逆として 方程式

$$\frac{dy(s)}{ds} - f(s)y(s) = 0$$

の解を使うことが考えられるが初期条件の決定が問題になる。

#### 4 多変数の場合

$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}^{\flat}$  は  $\frac{\partial}{\partial x_i}, 1 \leq i \leq n$ , と  $\Psi(1+s_j), 1 \leq j \leq n$  で生成されるから 解析的な座標変換で同型なリー環に移る。よって  $M$  が実解析的なら  $M$  の接バンドルに付属した  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}^{\flat}$  をファイバーとするバンドル  $\mathfrak{g}^{\flat}M$  が構成できる。しかし  $G_{\mathbb{R}^n}$  は局所的な生成元を持たないので対応するバンドルなどは構成できないようである。

また仮想的に  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$  をファイバーとするバンドルを構成するには  $\mathcal{R}$  に変数変換の影響があることから  $M$  の行列バンドルを  $\det M$  として  $\det M \oplus \mathfrak{g}^{\sharp}M$  と同型なバンドルを考える必要があるようである。

以下では簡単のため  $G_{\mathbb{R}^n}^{\flat}$  等を  $G_{\mathbb{R}^n}$  等とかく。そして  $G_{\mathbb{R}^n}$  に線形群が作用するよう拡大しそれを平坦な多様体に適用する。

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  とする。この記法では

$$\mathcal{R}[f(\mathbf{s})](\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{s_i}}{\Gamma(1+s_i)} f(\mathbf{s}) d\mathbf{s}$$

となる。 $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n\uparrow}$  である。よって  $T$  を正則行列で  $\det T > 0$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) = T\mathbf{x}$ ,  ${}^tT^{-1}\mathbf{s} = \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$  とすれば  $T$  の  $\mathcal{R}$  への作用は

$$\mathcal{R}[f(\mathbf{t})](\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \frac{y_i^{t_i}}{\Gamma(1+t_i)} \det T f(\mathbf{t}) dt. \quad (9)$$

となる。

$G_{\mathbb{R}^n} \cong \mathbb{R}^n \rtimes \mathbf{A}_{\mathbb{R}^n}$  で  $\mathbb{R}^n = \{\tau_{\mathbf{a}} | \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\}$  であり  $\mathbf{A}_{\mathbb{R}^n}$  は

$$\Gamma_0^{\mathbf{a}}(\mathbf{s}) = \prod_{i=1}^n \Gamma_0^{a_i}(s_i), \quad (a_1, \dots, a_n) = \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$$

で生成される。(10) から

補題4.  $T$  の  $\Gamma_0^{\mathbf{a}}(\mathbf{s})$  への作用  $T^*$  は

$$T^* \Gamma_0^{\mathbf{a}}(\mathbf{s}) = \det T \Gamma_0^{tT^{-1}\mathbf{a}}(tT^{-1}\mathbf{s}) \quad (10)$$

で与えられる。

定義2.  $T^* \Gamma_0^{\mathbf{a}}(\mathbf{s})$ ,  $T \in SL(n, \mathbb{R})$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  で (関数の積により) 生成された群を  $\mathbf{A}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}$  とし

$$\mathbf{A}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp} = \mathbb{R}_+ \times \mathbf{A}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp} \quad (11)$$

と定義する。

(12) での  $\mathbb{R}_+$  は正の値を取る定数関数からなる群とみる。 $\mathbb{R}^n = \{\tau_{\mathbf{a}} | \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\}$  として

定義3.  $\mathbf{A}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}$  の  $\mathbb{R}^n$  による拡大として群  $G_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}$  を定義する：

$$G_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp} = \mathbf{A}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp} \rtimes \mathbb{R}^n. \quad (12)$$

(12) の右辺の  $\mathbb{R}_+$  は  $G_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}$  の中心になる。

定義から  $SL(n, \mathbb{R})$  は  $G_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}$  の自己同型群にふくまれる。

同様に  $\mathfrak{a}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}$  を  $\Psi(1+t_1), \dots, \Psi(1+t_n) | t = t^t T^{-1}\mathbf{s}, T \in SL(n, \mathbb{R})$  と作用  $\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_n}$  で生成されたリー環、

$$\mathfrak{a}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{a}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}, \quad (13)$$

$$\mathfrak{g}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp} = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{a}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp} \quad (14)$$

$\mathbb{R}^n = \{a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} | (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$ , と定義すれば  $SL(n, \mathbb{R})$  は  $\mathfrak{g}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}$  のリー環としての自己同型群にふくまれ

る。なお (13) の右辺の  $\mathbb{R}$  は (11) の右辺の  $\mathbb{R}_+$  に対応する項である。

$f(\mathbf{x}) \in \mathbf{A}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^\sharp$  であれば

$$f(\mathbf{x}) = \prod_j \Gamma(c_j + \sum_i c_{ji} x_i)^{n_j}$$

の形である。よって

補題5.  $\vartheta_n f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \log(f(\mathbf{x}))$  とすれば  $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{A}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^\sharp$  のとき

$$\vartheta_n f(\mathbf{x}) = \sum_j (a_{ji} \Psi(c_j + \sum_i c_{ji} x_i)) \quad (15)$$

となる。

補題5から  $\mathbf{a}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^\sharp$  の適当なノルムによる完備化を  $\bar{\mathbf{a}}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^\sharp$  とすれば 定理3 と同様に写像

$$\psi^{-1} \vartheta_n : \mathbf{A}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^\sharp \rightarrow \bar{\mathbf{a}}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^\sharp$$

が定義され中への同型である。さらにこの写像は

$$\psi^{-1} \vartheta_n \tau_{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \psi^{-1} \vartheta_n c = \log c,$$

と定義して

$$\psi^{-1} \vartheta_n : G_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^\sharp \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^\sharp,$$

に拡張される。

注意.  $\vartheta_n$  は  $f$  が特殊な形だから有効だったので一般的にはゲージ理論で使われる

$$\rho_\ell(g) = g^{-1} dg, \quad \rho_r(g) = dg \cdot g^{-1}$$

が意味のある作用素である ([1])。しかし  $\rho$  を使えば  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}^\flat$  をファイバーとするバンドルは  $TM$  でなく  $\Lambda^p T^*M$  とする必要があるようである。

$\mathfrak{g}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^\sharp$  での  $\mathbb{R}^n$  は接空間とみられる。また  $T \in SL(n, \mathbb{R}^n)$  は  $\mathfrak{a}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^\sharp$  に  ${}^t T^{-1}$  で働く。  $M$  が向き付け可能で平坦なら  $M$

のデターミナント・バンドルは 構造群が可縮な  $\mathbb{R}_+$  だから自明になる。この事から  $1 \oplus TM \oplus T^*M$ ,  $TM$  は  $M$  の接バンドル、に付随した  $\mathfrak{g}_{SL(n,\mathbb{R}),\mathbb{R}^n}^\#$  をファイバーとしたバンドル  $\mathfrak{g}^\#M$  が構成できるが このバンドルの幾何学的、解析的意味はまだ解らない。またより簡単に構成できる  $\mathfrak{g}^bM$  との関係も問題である。

## 参考文献

- [1] Asada,A.: Non Abelian de Rham Theory, Prospects of Mathematical Science, eds. Mitsui,T. Nagasaka,K. Kano,T., 13-40. World Sci. 1988.
- [2] Asada,A.: Fractional calculus and Gamma function, Geometric Theory of Dynamical Systems and Related Topics, eds. Iwai, T. Tanimura,S. Yamguchi,Y. 17-38. RIMS Koukyuroku 1692(2010),
- [3] Asada,A.: Lie algebra generated by logarithm and logarithm of differentiation, Balkan J. Geom. and Its Appl. 16(2011), 1-11.
- [4] Asada,A.: Extended Borel transform and fractional calculus, to appear in Fractional Calculus, History, Theory and Applications, eds. Daou,R. Xavier,M. Nova Publishers
- [5] Asada,A.: An integral transform arising from fractional calculus, to appear in Fractional Calculus with Applications to Dynamical System, eds. Cario,C. Yang,X,J. De Gruyter Open.
- [6] Asada,A.: Groups and Lie algebras arising from Fractional Calculus, Proc. IMBIC 3, eds. Adhikari,A. Adhikari,M.R. 1-12, Inst.Math. Bio-inf. Inf.-tec.and Comp.-sci. Kolkata,2014.