

拡張されたボレル変換と分数冪微積

1 分数冪微分と変換 \mathcal{R} , \mathcal{N}

$$I^a(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} f(t) dt, \quad \Re a > 0,$$

で f の a -階の不定積分と定義する。この時

$$I^a(t^c)(x) = \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c+a)} x^{a+c}$$

でありこの右辺は x, a, c について解析的だから任意の複素数 a, c について

$$\frac{d^a}{dx^a} x^c = \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)} x^{c-a}$$

と定義しこれを線形に拡張して分数冪微分を定義する。

定義 変換 \mathcal{R} を

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^s}{\Gamma(1+s)} f(s) ds$$

で定義する。 \mathcal{R} の定義域としては例えば $\frac{f(x)}{\Gamma(1+x)}$ が急減少な関数の全体などを考える。

積分と分数冪微分が交換できれば

$$\begin{aligned} \frac{d^a}{dx^a} \mathcal{R}[f(s)](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} \frac{x^{s-a}}{\Gamma(1+s)} f(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^t}{\Gamma(1+t)} f(t+a) dt, \quad t = s - a \end{aligned}$$

だから

$$\frac{d^a}{dx^a} \mathcal{R}[\tau_a f](x), \quad \tau_a f(s) = f(s+a) \quad (1)$$

が適当な f にたいして成り立つ。

$\mathcal{R}[f](x)$ の定義域を $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ とした時、ラプラス型変換 $\mathcal{L}[g](t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ts} g(s) ds$ を使えば

$$\mathcal{R}[f](x) = \mathcal{L}\left[\frac{f(s)}{\Gamma(1+s)}\right](\log x), \quad t = \log x$$

である。より自然な変換として $\mathcal{N}[g(s)](x) = \mathcal{L}[g(s)](\log x)$ を導入する。定義から

$$\mathcal{N}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(s) ds$$

である。しかし 以下では $\mathcal{R}[f](x), \mathcal{N}[f](x)$ の定義域としては主に $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$ または $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を使う。

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad \text{として変換}$$

$$\mathcal{R}_+[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_+^s}{\Gamma(1+s)} f(s) ds$$

も使う。これも $\frac{d^a}{dx^a} \mathcal{R}_+[f(s)](x) = \mathcal{R}_+[\tau_a f(s)](x)$ となる。

2 離散な台を持つ超関数と変換 \mathcal{R}

$\delta_c = \delta(s-c)$ とすれば

$$\mathcal{R}[\delta_c] = \frac{x^c}{\Gamma(1+c)}, \quad \mathcal{N}[\delta_c] = x^c$$

である。特に $\mathcal{R}[\delta_{-n}] = 0$ である。

注意。超関数としては

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t\pi}} e^{-t(x-c)^2} = \delta_c$$

である。 $x^s e^{-t(s-c)^2} = e^{-t(s-c)^2 + s \log x}$ であり

$$-t(s-c)^2 + s \log x = -t\left(s-c - \frac{\log x}{2t}\right)^2 + c \log x + \frac{(\log x)^2}{4t},$$

だから \mathcal{N} で変換すれば

$$\frac{1}{\sqrt{t\pi}} \mathcal{N}[e^{-t(s-c)^2}](x) = x^c e^{\frac{(\log x)^2}{4t}},$$

である。よって $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ では

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{N}\left[\frac{e^{-t(s-c)^2}}{\sqrt{t\pi}}\right](x) = x^c (= \mathcal{N}[\delta_c])$$

である。後で説明する拡張されたボレル変換 \mathcal{B} を使えば $\mathcal{R} = \mathcal{B} \circ \mathcal{N}$ であり $\mathcal{B}[s^c](x) = \frac{x^c}{\Gamma(1+c)}$ だから

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{R}\left[\frac{e^{-t(s-c)^2}}{\sqrt{t\pi}}\right](x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{B}\left(\mathcal{N}\left[\frac{e^{-t(s-c)^2}}{\sqrt{t\pi}}\right]\right)(x) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{B}\left[s^c e^{\frac{(\log s)^2}{4t}}\right](x) = \mathcal{B}[s^c](x) = \frac{x^c}{\Gamma(1+c)} \end{aligned}$$

が成立する。

定義から $\tau_a \delta_c = \delta_{c-a}$ だから

$$\frac{d^a}{dx^a} (\mathcal{R}[\delta_c]) = \frac{1}{\Gamma(1+c)} \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)} x^{c-a} = \mathcal{R}[\tau_a \delta_c]$$

が成立する。しかし $\mathcal{R}[\delta_{-n}] = 0$ だから

$$\frac{d^a}{dx^a} \left(\frac{d^b}{dx^b} \mathcal{R}[\delta_c] \right) = \frac{d^{a+b}}{dx^{a+b}} \mathcal{R}[\delta_c]$$

は必ずしも成立しない。一方

$$\mathcal{R}_+[\delta_{-n}] = \delta^{(n-1)} (= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \delta)$$

となつて $\frac{d^a}{dx^a} (\frac{d^b}{dx^b} \mathcal{R}_+[\delta_c]) = \frac{d^{a+b}}{dx^{a+b}} \mathcal{R}_+[\delta_c]$ は常に成立する。

$$\delta_c^{(n)} = \frac{d^n}{ds^n} \delta_c \text{ とすれば}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial c^n} \delta_c = (-1)^n \delta_c^{(n)}$$

となる。よつて

$$\mathcal{R}[\delta_c^{(n)}] = (-1)^n \frac{d^n}{dc^n} \left(\frac{x^c}{\Gamma(1+c)} \right), \quad \mathcal{N}[\delta_c^{(n)}] = (-1)^n (\log x)^n x^c$$

である。これらから

$$\mathcal{R}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n\right] = e^x, \quad \mathcal{N}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n\right] = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

$$\mathcal{R}[\gamma\delta - \delta'] = \log x, \quad \mathcal{N}[\delta'] = -\log x$$

等が得られる。特に

$$\mathcal{R}[\delta^{(n)}] = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{d^k}{ds^k} \left(\frac{1}{\Gamma(1+s)} \right) \Big|_{s=0} (\log x)^{n-k}$$

また $\delta_c = \sum_n \frac{(-1)^n c^n}{n!} \delta^{(n)}$ を認めれば

$$\mathcal{N}\left[\sum_n \frac{(-1)^n c^n}{n!} \delta^{(n)}\right] = \sum_n \frac{c^n}{n!} (\log x)^n = e^{c \log x} = x^c$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\left[\sum_n \frac{(-1)^n c^n}{n!} \delta^{(n)}\right] &= \left(\sum_n \frac{1}{n!} \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{\Gamma(1+s)} \right) \Big|_{s=0} \right) \left(\sum_n \frac{c^n}{n!} (\log x)^n \right) \\ &= \frac{x^c}{\Gamma(1+c)} \end{aligned}$$

となる。 $\sum_n \frac{(-1)^n c^n}{n!} \delta^{(n)}$ はシュワルツの意味での超関数ではないが整関数の空間（位相は広義一様収束）の上の一般化関数として意味づけられる。

離散デルタ・ポテンシャル $T = \sum_n c_n \delta_{a_n}$ の形式的テーラー展開 $\sum_n \sum_m \frac{c_n (-a_n)^m}{m!} \delta^{(m)}$ が意味があるかは問題である。たとえば $T = \sum_n \delta_n$ のとき

$$\sum_n \delta_n = \sum_n \sum_m \frac{(-n)^m}{m!} \delta^{(m)} = \sum_m \frac{(-1)^m}{m!} \left(\sum_n n^m \right) \delta^{(m)}$$

は意味がないが $T_s = \sum_n n^{-s} \delta_n$ を適当な関数空間の上の一般化関数と見れば ζ -正則化が使えて

$$T = -\frac{\delta}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m B_{m+1}}{(m+1)!} \delta^{(m)}$$

が導かれる。この展開に意味を調べるのも問題だろう。

$n \in \mathbb{N}$ であれば $\mathcal{R}[\delta_n] = \frac{1}{n!} \mathcal{N}[\delta_n]$ でありこの対応: $x^n \rightarrow \frac{x^n}{n!}$ は x^n のボレル変換である。整数でない a のときこの関係を拡張するにはボレル変換を拡張する必要がある。

3 拡張されたボレル変換

原点での正則関数の芽 $f(z) = \sum_n c_n z^n$ のボレル変換 $\mathcal{B}[f(\zeta)](z)$ は

$$\mathcal{B}[f(\zeta)](z) = \sum_n \frac{c_n}{n!} z^n = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\frac{z}{\zeta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta$$

で定義される。原点での正則関数の芽の環を \mathcal{O} , 有限指数型関数に積を

$$f \sharp g = \frac{d}{dx} \int_0^\infty f(x-t)g(t)dt$$

で入れた環を $\text{Exp}(\mathbb{C})$ とすれば

$$\mathcal{B} : \mathcal{O} \cong \text{Exp}(\mathbb{C})$$

である。 \mathcal{O} の関数列 $\{f_n\}$ がすべてある $\{z \mid |z| \leq \epsilon\}$ で定義されそこで一様収束するとき \mathcal{O} での収束、有限指数型関数の列 $\{g_n\}$ がすべてある $A > 0, B > 0$ によって $|f_n(z)| \leq Ae^{B|z|}$ と抑えられ全平面で広義一様収束するとき $\text{Exp}(\mathbb{C})$ での収束と定義すれば \mathcal{B} は位相環としての同型になる。

ボレル変換の積分による定義は原点を孤立特異点とする解析関数 $g(z)$ に対しても意味がある。この時 $g(z)$ のローラン展開の主要部を $g_-(z)$, $g(z) - g_-(z) = g_0(z)$ とすれば

$$\mathcal{B}[g] = \mathcal{B}[g_0]$$

である。原点を孤立特異点とする解析関数全体を $\tilde{\mathcal{O}}$ とすれば

$$\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{O}}) = \mathcal{B}(\mathcal{O}) = \text{Exp}(\mathbb{C})$$

である。しかし $\tilde{\mathcal{O}}$ では z^{-n} での掛け算が出来るので

$$\frac{d}{dz} \mathcal{B}[f(\zeta)](z) = \mathcal{B}[\zeta^{-1}f(\zeta)](z)$$

が得られる。

注意。 多変数の場合も

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}[f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)](z_1, \dots, z_n) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_1|=\epsilon_1, \dots, |\zeta_n|=\epsilon_n} e^{\frac{z_1}{\zeta_1} + \dots + \frac{z_n}{\zeta_n}} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{\zeta_1 \cdots \zeta_n} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n, \end{aligned}$$

でボレル変換が定義できるが f が原点で特異性を持つときは 例えば

$$\frac{x}{x-y} = \begin{cases} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^{-n}y^n, & |x| > |y|, \\ -\sum_{n=1}^{\infty} x^n y^{-n}, & |x| < |y|, \end{cases}$$

だから

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{4\pi^2} \int_{|\xi|=\epsilon_1} \int_{|\eta|=\epsilon_2} e^{\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta}} \frac{\xi}{\xi\eta(\xi-\eta)} d\xi d\eta \\ &= \begin{cases} 1, & \epsilon_1 > \epsilon_2, \\ 0, & \epsilon_1 < \epsilon_2, \end{cases} \end{aligned}$$

となって ϵ_1, ϵ_2 の大小で異なってくる。一般に $f(z)$ が $Y, 0 \in Y$ で特異性を持つとき

$$H_{n,*}(U \setminus Y; \mathbb{Z}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{H_n(U(\epsilon) \setminus Y; \mathbb{Z}) : r_\epsilon^\epsilon\},$$

とし $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ をその生成元とし

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}_{\gamma_j}[f(\zeta)](z) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_j} e^{\frac{z_1}{\zeta_1} + \dots + \frac{z_n}{\zeta_n}} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{\zeta_1 \cdots \zeta_n} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n, \end{aligned}$$

とすれば f のボレル変換は $\mathcal{B}_\gamma[f]$ で計算する必要がある。

ボレル変換の逆変換は

$$\mathcal{B}^{-1}[f(t)](x) = \int_0^\infty e^{-t} f(xt) dt$$

で与えられる。 \mathcal{B}^{-1} は有限指数型でない関数にたいしても定義できることがある。たとえば

$$\mathcal{B}^{-1}[\zeta^c](z) = \Gamma(1+c)z^c, \quad \mathcal{B}^{-1}[\log \zeta] = \log z - \gamma$$

である。ただしこの初めの式は本来 $\Re c > -1$ でしか成り立たなが、解析接続で任意の c まで成立するとする。これから

$$\mathcal{B}[\zeta^c](z) = \frac{z^c}{\Gamma(1+c)}, \quad \mathcal{B}[\log \zeta](z) = \log z + \gamma$$

と定義する。右半平面 $\{z | \Re z > 0\}$ では ($\Re c > -1$ として) 広義一様に

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathcal{B}[(\epsilon + \zeta)^c](z) = \frac{z^c}{\Gamma(1+c)},$$

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathcal{B}[\log(\epsilon + \zeta)](z) = \log z + \gamma$$

である。また

$$\mathcal{B}[\zeta^a \zeta^b](z) = \mathcal{B}[\zeta^a](z) \# \mathcal{B}[\zeta^b](z)$$

が成り立つ。さらに $\mathcal{B}[\log \zeta] = \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{B}[\zeta^a] |_{a=0}$ だから

$$\mathcal{B}[(\log \zeta)^n \zeta^a](z) = \frac{\partial^n}{\partial a^n} \mathcal{B}[\zeta^a](z)$$

で $(\log z)^n z^a$ のボレル変換を定義すれば

$$\mathcal{B}[(\log \zeta)^n](z) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \alpha_{n-k} (\log z)^n,$$

$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = \sum_n \alpha_n z^n$, となる。また

$$\begin{aligned} \mathcal{B}[(\log \zeta)^2](z) &= \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} \mathcal{B}[\zeta^a \zeta^b](z) |_{a=b=0} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} (\mathcal{B}[\zeta^a](z) \# \mathcal{B}[\zeta^b](z)) |_{a=b=0} \\ &= \mathcal{B}[\log \zeta](z) \# \mathcal{B}[\log \zeta](z) \end{aligned}$$

だから

$$\mathcal{B}[(\log \zeta)^n](z) = \overbrace{\mathcal{B}[\log \zeta](z) \# \cdots \# \mathcal{B}[\log \zeta](z)}^n$$

が成り立つ。

例。 $f^{\#n} = \overbrace{f \# \cdots \# f}^n$ とすれば $\zeta^a = e^{a \log \zeta}$ から

$$\begin{aligned} \frac{z^a}{\Gamma(1+a)} &= \sum_n \frac{a^n \mathcal{B}[(\log \zeta)^n](z)}{n!} \\ &= \sum_n \frac{a^n (\log \zeta + \gamma)^{\#n}}{n!} = e^{\gamma a} \left(\sum_n \frac{(\log \zeta)^{\#n}}{n!} \right) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\sum_n \frac{a^n (\log z)^{\#n}}{n!} = \frac{e^{-\gamma a}}{\Gamma(1+a)} z^a$$

である。

$\mathcal{B}[(\log \zeta)^{-n}]$ は次のように計算される。

$$\begin{aligned} \int_a^\infty x^s ds &= -\frac{x^a}{\log x}, \quad |x| < 1, \\ \int_{-\infty}^a x^s ds &= \frac{x^a}{\log x}, \quad |x| > 1 \end{aligned}$$

だから $\int_a^\infty \mathcal{B}[f(s)] ds = \mathcal{B}[\int_a^\infty f(s) ds]$ が成立すれば

$$\mathcal{B}\left[\frac{\zeta^a}{\log \zeta}\right](x) = \int_a^\infty \frac{x^s}{\Gamma(1+s)} ds$$

である。特に $\mathcal{B}[(\log \zeta)^{-1}](x) = -\mathcal{R}[Y(s)](x)$ である。

この場合

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{d}{dx}\right) \mathcal{B}\left[\frac{1}{\log \zeta}\right] &= \mathcal{B}\left[\frac{-\log \zeta}{\log \zeta}\right](x) = -1, \\ -\log\left(\frac{d}{dx}\right) \mathcal{R}[Y(s)](x) &= -\mathcal{R}\left[\frac{dY}{ds}\right] = -\mathcal{R}[\delta] = -1 \end{aligned}$$

と検証できる。さらにこれから

$$\mathcal{B}[(\log \zeta)^{-n}](x) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \mathcal{R}[s_+^{n-1}](x)$$

が導かれる。

$$\mathcal{R}[s_+^n](x) = \int_0^\infty \frac{x^s}{\Gamma(1+s)} s^n ds$$

が知られた関数で書き表されるかは今後の問題である。

定義。 $f(z) = \sum_n c_n z^n$ とする。

$$\mathcal{B}[f(\log \zeta)](z) = \sum_n c_n (\log \zeta + \gamma)^{\sharp n}$$

で $f(\log z)$ のボレル変換を定義する。

定理. $f(z)$ が有限指数型なら $\mathcal{B}[f(\zeta)](z)$ は収束する。

証明。仮定から $n!|c_n| \leq MC^n$ となる $M > 0, C > 0$ が存在する。

$$\sum_n c_n \mathcal{B}[(\log \zeta)^n](z) = \sum_k \left(\sum_{n \geq k} c_n n! \alpha_{n-k} \right) (\log z)^n$$

で $\sum_{n \geq k} |c_n n! \alpha_{n-k}| \leq \sum_{n \geq k} MC^{n-k} |\alpha_{n-k}|$ だから $\frac{1}{\Gamma(1+z)}$ が整関数なことにより定理が成立する。

また $f(z^a)$ に対しては

$$\mathcal{B}[f(\zeta^a)](z) = \sum_n c_n \mathcal{B}[\zeta^{na}](z) = \sum_n \frac{c_n}{\Gamma(1+na)} z^{na}$$

でボレル変換を定義できる。 $\Re a > 0$ であれば $f(z^a)$ のボレル変換は整関数 $h(z)$ により $h(z^a)$ と書ける。

$z^a = e^{a \log z}$ だから形式的には $f(z^a)$ は $\log z$ の冪級数で書けるはずだが具体的に書き下せるかは問題の様である。

拡張されたボレル変換では

$$\frac{d^a}{dz^a} \mathcal{B}[f(\zeta)](z) = \mathcal{B}[\zeta^{-a} f(\zeta)](z), \quad (2)$$

$$\log\left(\frac{d}{dz}\right) \mathcal{B}[f(\zeta)](z) = -\mathcal{B}[(\log \zeta) f(\zeta)](z) \quad (3)$$

が成立する。これからたとえば

$$\log\left(\frac{d}{dx}\right) \mathcal{B}[\zeta^{-a}](x) = -\mathcal{B}[\log \zeta \cdot \zeta^{-a}](x) = -\frac{d^a}{dx^a} \mathcal{B}[\log \zeta]$$

である。

4 拡張されたボレル変換と変換 \mathcal{R}

$$\mathcal{B}[\delta_c] = \frac{x^c}{\Gamma(1+c)}, \mathcal{N}[\delta_c] = x^c \text{ だから}$$

$$\mathcal{B}[\delta_c] = \mathcal{B}(\mathcal{N}[\delta_c])$$

である。離散な台を持つ超関数 T は

$T = \sum_{k \leq N} \sum_n c_{n,k} \delta_{a_n}$, $\{a_n\}$ は離散集合、と書けるから、離散な台を持つ超関数の空間の位相は超関数の空間の部分空間としての位相として

定理。 T が離散な台をもつ超関数であれば

$$\mathcal{R}[T] = \mathcal{B}(\mathcal{N}[T]), \text{ i.e. } \mathcal{R} = \mathcal{B} \circ \mathcal{N} \quad (4)$$

である。

$\mathcal{N}[\delta_a] = z^a$, $\mathcal{N}[\delta^{(n)}] = (\log z)^n$ だからボレル変換を z^a の冪級数に対して定義するのは \mathcal{R} を離散デルタ・ポ

テンソルに対して定義することに当たり、 $\log z$ の冪級数に対して定義するのはデルタ関数のテーラー展開に対して \mathcal{R} を定義することにあたる。言い換えれば離散デルタ・ポテンシャルのテーラー展開を求める問題と $f(z^a)$ を $\log z$ の冪級数で書き直す問題は実質的に同値である。

\mathcal{N} は逆を持つので(4)から

$$\mathcal{B} = \mathcal{R} \circ \mathcal{N}^{-1}$$

である。これを利用して変換 \mathcal{B}_+ を

$$\mathcal{B}_+ = \mathcal{R}_+ \circ \mathcal{N}^{-1}$$

で定義する。 \mathcal{B}_+ は $\{z | \Re z \geq 0\}$ で定義された超関数(または一般化関数)と見るのが適切らしい。たとえば $\mathcal{B}[\zeta^{-n}] = 0$ だが

$$\mathcal{B}_+[\zeta^{-n}] = \delta^{(n-1)}$$

である。

例。 $u(z) = z^{a-1}(1 - \lambda z^a)^{-1} (= z^{-1}(z^{-a} - \lambda)^{-1})$ とすれば

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^a}{dz^a} - \lambda\right)\mathcal{B}[u(\zeta)](z) &= \mathcal{B}[\zeta^{-1}](z) = 0, \\ \left(\frac{d^a}{dz^a} - \lambda\right)\mathcal{B}_+[u(\zeta)](z) &= \mathcal{B}[\zeta^{-1}](z) = \delta \end{aligned}$$

だから $\mathcal{B}[u(\zeta)](z)$ は方程式

$$\frac{d^a U}{dz^a} = \lambda U$$

の解、 $\mathcal{B}_+[u(\zeta)](z)$ は基本解である。

\mathcal{R} と \mathcal{R}_+ ではこの事は次のように書き直せる。

$\frac{d^c}{dz^c} \mathcal{R}[\delta_a] = \mathcal{R}[\delta_{a-c}]$ であり \mathcal{R}_+ でも同じ式が成り立つ。よって $T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \delta_{an-1}$ とすれば

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^a}{dz^a} - \lambda\right) \mathcal{R}[T] &= \mathcal{R}[\delta_{-1}] = 0, \\ \left(\frac{d^a}{dz^a} - \lambda\right) \mathcal{R}_+[T] &= \mathcal{R}_+[\delta_{-1}] = \delta \end{aligned}$$

となる。

$y_n(z) = \mathcal{B}[\zeta^{-n}u(\zeta)](z)$ はすべての $n \in \mathbb{N}$ について $\frac{d^a}{dz^a} y_n = \lambda y_n$ となる。 a が無理数ならこれらの y_n は 1 次独立だが a が有理数 p/q , $(p, q) = 1$ であれば y_1, \dots, y_p だけが独立になる。

$f_1(x), \dots, f_n(x)$ が $C_1 < 0 < C_2$ で連続で $\Re a_n > \Re a_{n-1} \geq \dots \geq \Re a_0$ とする。方程式

$$\frac{d^{a_n} y}{dx^{a_n}} + f_1(x) \frac{d^{a_{n-1}} y}{dx^{a_{n-1}}} + \dots + f_n(x) \frac{d^{a_1} y}{dx^{a_1}} = g(x)$$

は $Y = I^{a_n} y$ とおけば

$$\begin{aligned} & Y(x) + f_1(x) I^{a_n - a_{n-1}} Y(x) + \dots + f_n(x) I^{a_n - a_1} Y(x) \\ &= Y(x) + \int_0^x \left(f_1(t) \frac{(x-t)^{a_n - a_{n-1}}}{\Gamma(a_n - a_{n-1})} + \dots + \right. \\ & \quad \left. + f_n(t) \frac{(x-t)^{a_n - a_1}}{\Gamma(a_n - a_1)} \right) Y(t) dt = g(x) \end{aligned}$$

と Volterra 型の積分方程式になるから $0 \leq x < C_2$ では解がある。 $y(x) = I^{a_n} Y(x) + h(x)$, $\frac{d^{a_m} h}{dx^{a_m}} = 0$ だから a_n が整数でなければ $h(x)$ は $x^{a_n - m}$, m は自然数、となり無限に独立な解がある。ただし $x = 0$ で連続と言う条件を付けると $\Re a_n \geq m$ となる m だけが許される。

$\Re a_n = \Re a_{n-1}$ の場合はこの解法は使えない。もっとも簡単な場合として

$$L = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} + \frac{d^\beta}{dx^\beta}$$

を考える。ただし $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$ が \mathbb{C} の離散集合になると仮定する。このとき

$$T_{\alpha,\beta;\xi}^{\mu,\nu} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu^{-m} \nu^{-n} \delta_{m\alpha+n\beta+\xi},$$

$\xi \notin \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$ と置けば $T_{\alpha,\beta;\xi}^{\mu,\nu}$ はシュワルツの意味での超関数で

$$\tau_\alpha T_{\alpha,\beta;\xi}^{\mu,\nu} = \mu T_{\alpha,\beta;\xi}^{\mu,\nu}, \quad \tau_\beta T_{\alpha,\beta;\xi}^{\mu,\nu} = \nu T_{\alpha,\beta;\xi}^{\mu,\nu}$$

である。よって何等かの意味で $\mathcal{R}[T_{\alpha,\beta;\xi}^{\mu,\nu}]$ が定義できれば

$$LR[T_{\alpha,\beta;\xi}^{\mu,\nu}] = (\mu + \nu)\mathcal{R}[T_{\alpha,\beta;\xi}^{\mu,\nu}]$$

となる。この意味付けは今後の問題である。