

分数冪微積に関係した 積分変換 \mathcal{R} の定義域

浅田 明

1 積分変換 \mathcal{R}

(超) 関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ に対し積分変換 $\mathcal{R}[f](x)$ を

$$\mathcal{R}[f(s_1, \dots, s_n)](x_1, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{s_i}}{\Gamma(1+s_i)} f(s_1, \dots, s_n) ds_1 \cdots ds_n$$

で定義する。 $x = (x_1, \dots, x_n)$ は $\mathbb{R}_+^n = \{x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$ として $x \in \mathbb{R}_+^n$, $x \in \mathbb{C}^n$, x_i は 0 または負の実数でない、とする。

$$\text{また } g_+(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{として}$$

$$\mathcal{R}_+[f(s)](x) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \frac{x_{i,+}^{s_i}}{\Gamma(1+s_i)} f(s) ds_1 \cdots ds_n$$

として変換 \mathcal{R}_+ を定義する。この時は f は $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ で定義されているとする。また x も同じ領域で定義されているとする。

f の定義域を探るのがこれからの問題だがもっとも使いやすいのは $\prod_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(1+s_i)} f(s)$ が急減少となる場合でこのときは $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ であれば

$$\frac{\partial^{a_1+\dots+a_n}}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n}} \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\tau_a f(s)](x), \quad \tau_a f(s) = f(s+a) \quad (1)$$

が成り立つ。 $a \in \mathbb{C}^n$ のときも f について適当な条件でこの式は成り立つ。 \mathcal{R}_+ についても同じ式が成立する。また微分の対数 $\log\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ についても

$$\log\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}\left[\frac{\partial}{\partial s_i} f(s)\right](x)$$

が成立する。

f が超関数であっても \mathcal{R} は定義できるときがある。特に

$$\delta_a = \delta_{1,a_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{n,a_n}, \quad a = (a_1, \dots, a_n)$$

とすれば

$$\mathcal{R}[\delta_a](x) = \frac{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}}{\Gamma(1+a_1) \cdots \Gamma(1+a_n)} \quad (2)$$

である。ただし $\delta_{i,a}(s_i) = \delta_i(s_i - a)$, δ_i は s_i -空間での δ -関数とする。この場合 a_i が負の整数なら $\mathcal{R}[\delta_a] = 0$ だが \mathcal{R}_+ では a_i がすべて負の整数でなければ

$$\mathcal{R}_+[\delta_a](x) = \frac{(x_1^{a_1})_+ \cdots (x_n^{a_n})_+}{\Gamma(1+a_1) \cdots \Gamma(1+a_n)}$$

であり、負の整数のときは 1-次元で)

$$\mathcal{R}_+[\delta_{-n}] = \delta^{(n-1)} (= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \delta)$$

となる。 $\tau_c \delta_a = \delta_{a-c}$ だから a の成分に負の整数がなければ

$$\frac{\partial^{c_1+\cdots+a_n}}{\partial x_1^{c_1} \cdots \partial x_n^{c_n}} \mathcal{R}[\delta_a] = \mathcal{R}[\tau_c \delta_a] \quad (3)$$

が成り立つ。 \mathcal{R}_+ だとこの式は常に成り立つ。

(2) から

$$\mathcal{R}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a^n \delta_n\right](x) = e^{ax}, \quad \mathcal{R}\left[\sum_{n=0}^{\infty} n! a^n \delta_n\right](x) = \frac{1}{1-ax}$$

などが得られる。よって離散 δ -ポテンシャル $\sum_i c_i \delta_{a_i}$, $\{a_i\}$ は \mathbb{C}^n の離散集合、より一般には離散な台を持つ (シュワルツ) 超関数の空間 $D_{\mathbb{C}^n}$ は \mathcal{R} の適切な定義域の候補である。

$$\frac{\partial}{\partial c} \delta_c = -\frac{\partial}{\partial x} \delta_c \quad \text{だから}$$

$$\delta_a^m = \delta_{a_1}^{(m_1)} \otimes \cdots \otimes \delta_{a_n}^{(m_n)}, \quad m = (m_1, \dots, m_n)$$

とすれば

$$\mathcal{R}[\delta_a^m] = (-1)^{m_1+\cdots+m_n} \frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}}{\partial a_1^{m_1} \cdots \partial a_n^{m_n}} \left(\frac{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}}{\Gamma(1+a_1) \cdots \Gamma(1+a_n)} \right) \quad (4)$$

である。特に

$$\mathcal{R}[\delta^{(m)}](x) = (-1)^n \left(\sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!} \alpha_{m-k} (\log x)^k \right), \quad \frac{1}{\Gamma(1+s)} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k s^k \quad (5)$$

となる。

2 δ のテーラー展開と \mathcal{R}

1 変数関数 f が $|x| < C$ で正則で $|c| < C$ であれば

$$f(c) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^m}{m!} \frac{d^m f}{dx^m}(0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(m)} f dx$$

だから

$$\delta_c = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-c)^m}{m!} \delta^{(m)}$$

とテーラー展開される（この右辺はシュワルツの意味の超関数ではない）。

この種の一般化関数を扱うため有限指数型関数の全体を $\text{Exp}(\mathbb{C})$ 、整関数の全体を $\text{Ent}(\mathbb{C})$ と置く。位相は $\text{Ent}(\mathbb{C})$ では全平面での広義一様収束、 $\text{Exp}(\mathbb{C})$ では $\{f_k | k = 0, 1, \dots\}$ がすべての k について $|f_k(z)| \leq A e^{B|z|}$ となる $A, B > 0$ が存在し f_k が全平面で広義一様収束するとき収束と定義される。 n -変数の場合の同様な空間は $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ 、 $\text{Ent}(\mathbb{C}^n)$ と書く。

集合として $\text{Exp}(\mathbb{C}) \subset \text{Ent}(\mathbb{C})$ だが位相が違うので位相空間としては部分空間ではない。いずれの空間でも $\{z^n | n \in \mathbb{N}\}$ は稠密になる。よって $\text{Exp}(\mathbb{C})$ または $\text{Ent}(\mathbb{C})$ の双対空間の元 T は $\{T(z^n) | n \in \mathbb{N}\}$ で決まる。特に $f(z) = \sum_n c_n z^n$ であれば $T[f] = \sum_n c_n T[z^n]$ だから

$$T^\natural = \sum_n \frac{T(z^n)}{n!} \delta^{(n)}$$

とおけば $T^\natural[f] = T[f]$ である。

$f(z) = \sum_n a_n z^n \in \text{Exp}(\mathbb{C})$ なら $|a_n| \leq C \frac{M^n}{n!}$ だから $g(z) = \sum_n b_n z^n$ のとき

$$\left| \sum_n n! a_n b_n \right| \leq \sum_n |a_n| |b_n| \leq C \left(\sum_n M^n |b_n| \right)$$

である。 g が整関数のとき $\sum_n |b_n|z^n = \bar{g}(z)$ も整関数だから $C(\sum_n M^n |b_n|) = C\bar{g}(M)$ となり $\sum_n n!a_n b_n$ は収束する。逆にすべての有限指数型関数に対して $\sum_n n!a_n b_n$ が収束すれば g は整関数である。なお $\hat{f}(z) = \sum_n n!a_n z^n$ とおけば \hat{f} は原点の近傍で正則で

$$\sum_n n!a_n b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \hat{f}(z)g\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z}$$

となることから同じ結論が得られる。

$$\mathbf{P}_{\text{exp}} = \mathbf{P}_{\text{exp}}(\mathbb{C}) = \left\{ \sum_m a_m \delta^{(m)} \mid \sum_m a_m z^m \in \text{Exp}(\mathbb{C}) \right\}, \quad (6)$$

$$\mathbf{P}_{\text{ent}} = \mathbf{P}_{\text{ent}}(\mathbb{C}) = \left\{ \sum_m b_m \delta^{(m)} \mid \sum_m b_m z^m \in \text{Ent}(\mathbb{C}) \right\}, \quad (7)$$

とおけば上の議論から $T \in \mathbf{P}_{\text{exp}}, \mathbf{P}_{\text{ent}}$ は $\text{Ent}(\mathbb{C}), \text{Exp}(\mathbb{C})$ の上の一般化関数と解釈出来て

$$\text{Ent}(\mathbb{C})^\dagger \cong \mathbf{P}_{\text{exp}}, \quad \text{Exp}(\mathbb{C})^\dagger \cong \mathbf{P}_{\text{ent}} \quad (8)$$

である。

$T \in \mathbf{P}$ にたいしては $T = \sum_m c_m \delta^{(m)}$ として

$$\frac{d}{dx}T = \sum_m c_m \delta^{(m+1)}, \quad \tau_a T = \sum_m \frac{a^m}{m!} \frac{d^m}{dx^m} T \quad (9)$$

で作用 $\frac{d}{dx}, \tau_a; a \in \mathbb{C}$ を定義する。

$$\sum_m \frac{a^m}{m!} \frac{d^m}{dx^m} T = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m \frac{a^k c_{m-k}}{k!} \right) \delta^{(m)}$$

であり $e^a x g(x) = \sum_m \left(\sum_{k=0}^m \frac{a^k c_{m-k}}{k!} \right) x^m, g(x) = \sum_m c_m x^m$ だから これらの作用は $\mathbf{P}_{\text{exp}}, \mathbf{P}_{\text{ent}}$ を固定する。

定理 1. $T \in \mathbf{P}_{\text{exp}}$ であれば $\mathcal{R}[T] = f(\log x), f \in \text{Exp}(\mathbb{C})$ である。

証明。 $T = \sum_m c_m \delta^{(m)}$ とし $|c_m| \leq \frac{CM^m}{m!}$ とする。

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[T] &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^m m!}{(m-k)!} \alpha_k (\log x)^{m-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{m=k}^{\infty} (-1)^m m! c_m \alpha_{m-k} (\log x)^k \right) \end{aligned}$$

であり $|c_m| \leq \frac{CM^m}{m!}$ から

$$\left| \sum_{m=k}^{\infty} (-1)^m m! c_m \alpha_{m-k} \right| \leq CM^m \sum_{n=k}^{\infty} M^{m-k} |\alpha_{m-k}|$$

である。ここで $\frac{1}{\Gamma(1+s)}$ は整関数だから $\sum_{n=k}^{\infty} M^{m-k} |\alpha_{m-k}| \leq \sum_{m=0}^{\infty} R^m |\alpha_m| = R$ とおける。よって

$$\mathcal{R}\left[\sum_m c_m \delta^{(m)}\right] = \sum_k b_k (\log x)^k, \quad |b_k| \leq \frac{LM^k}{k!}$$

となって $\mathcal{R}[T] = f(\log x)$, $f(x) \in \text{Exp}(\mathbb{C})$ である。

多変数の場合も $\text{P}_{\text{exp}}(\mathbb{C}^n)$, $\text{P}_{\text{ent}}(\mathbb{C}^n)$ が同様に定義される。このときも $T \in \text{P}(\mathbb{C}^n)$ であれば $\mathcal{R}[T] = f(\log x_1, \dots, \log x_n)$, $f \in \text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ となる。

3 P_{exp} と $\text{D}_{\mathbb{C}}$ との関係

$T \in \text{D}_{\mathbb{C}}$ は $T = \sum_{k=0}^K \sum_m a_{m,k} \delta_{c_{m,k}}^{(k)}$, $\{c_{m,k}\}$ は離散集合、と書ける。 $\delta_c^k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^m}{k!} \delta^{(m+k)}$ だが $T = \sum_m c_m \delta^{(m)}$ と書けるかは問題である。

例。 $\delta_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n^m}{m!} \delta^{(m)}$ であり $\mathcal{R}[\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n]$ だが $\delta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-n)^m}{m!} \delta^{(m)} \right)$ で和の順序の交換は出来ない。しかし $\sum_{n=1}^{\infty} (-n)^{m-s}$ は $\Re s > m+1$ で収束し $(2^{1-s+m} - 1)\zeta(s-m)$ となるので $\sum_{n=1}^{\infty} (-n)^{-s} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-n)^m}{m!} \delta^{(m)}$ を多項

式の空間の上の一般化関数と見れば

$$\begin{aligned} & \delta + \sum_{n=1}^{\infty} (-n)^{-s} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-n)^m}{m!} \delta^{(m)} \right) \\ & = \delta + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-n)^{m-s}}{m!} \delta^{(m)} = \delta + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2^{1-s+m} - 1) \zeta(s-m)}{m!} \delta^{(m)} \end{aligned}$$

が成立する。これを $s \rightarrow 0$ まで解析接続すれば B_m をベルヌーイ数として

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n & = \delta + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2^{m+1} - 1) \zeta(-m)}{m!} \delta^{(m)} \\ & = \delta - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2^{m+1} - 1) B_{m+1}}{(m+1)!} \delta^{(m)} = \delta - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2^{2m+1} - 1) B_{2m}}{(2m)!} \delta^{(2m-1)} \end{aligned}$$

となる。 $\left| \frac{(2^{m+1} - 1) B_{2m}}{(2m)!} \right| \simeq \frac{2}{(2\pi)^{2m}}$ だからこの式の右辺は P_{exp} には属さないが $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} x^{2m-1}$ は原点の近傍で収束する。

$$P_{\mathcal{O}} = \left\{ \sum_m a_m \delta^{(m)} \mid \sum_m a_m x^m \in \mathcal{O} \right\}$$

とおく。関数空間 $\text{Gev}^-(\mathbb{C})$ を ある $A > 0, B > 0, \epsilon > 0$ があって

$$\left| \frac{d^m f}{dx^m}(0) \right| \leq \frac{AB^m(m!)}{(m!)^\epsilon}$$

となる整関数の空間で $\{f_n\}, f_n \in \text{Gev}^-(\mathbb{C})$ は総ての f_n が一様にある A, B, ϵ で上の不等式を見たし全平面で広義一様収束するとき収束するとして位相を入れ $T \in P_{\mathcal{O}}$ を $\text{Gev}^-(\mathbb{C})$ の上の一般化関数とみる。

多項式の空間は $\text{Gev}^-(\mathbb{C})$ で稠密であり s を 1 より小さい実数とすれば $\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{z^{s-1}}{e^{-z} - 1} dz$ から $\delta + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta(s-m)}{m!} \delta^{(2m)}$ は (s が整数の時を含めて) $P_{\mathcal{O}}$ に属する。よって $\text{Gev}^-(\mathbb{C})$ の上の一般化関数として

$$\mathcal{R}[\delta - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \delta^{(2m-1)}](x) = e^x (= e^{(e^{\log x})}) \quad (10)$$

が成立する。ただし次節で説明するようにこの式がすべての $x \in \mathbb{C}$ で成立するかには問題が残っている (任意の有限区間では $f \in \text{Gev}^-(\mathbb{C})$ に対し $\int_A^B f(x)e^x dx$ は存在するが $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^x dx$ は必ずしも存在しないなど)。

なお指数関数は $\text{Gev}^-(\mathbb{C})$ には含まれないが 一般化されたミッターハ・レフラー関数: $E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}$ の中には $\text{Gev}^-(\mathbb{C})$ に属するものがある。

$\chi(n)$ を (n の) ディリクレ指標、 $L(\chi, s)$ を (χ で定まる) ディリクレ L -関数とすれば同様の計算で

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{-s} \chi(n) \delta_n = \delta + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{L(\chi, s-m)}{m!} \delta^{(m)}$$

が得られるので $\sin x$ や $\cos x$ などは P_0 の元の \mathcal{R} による像としてあらわされる。しかし一般に \mathcal{R} が P_0 の上で定義できるかは今後の問題である。

問題。 $\sum_m \frac{a_m}{m!} x^m$ が有用な関数で $\sum_n a_n n^{-s}$ が負の実軸まで解析接続される数列 $\{a_n\}$ にはどのようなものが有るか調べよ。

これに関連して $\mathcal{R}[\sum_k k! \delta_k](x) = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ だが $\sum_k k! \delta_k$ が $\sum_k c_k \delta^{(k)}$ とあらわされるかは疑問である。少なくとも P_0 の元としてはあらわされ無いと思われる。

4 \mathcal{R} とボレル変換

$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n} c_{m_1, \dots, m_n} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ のとき そのボレル変換 $\mathcal{B}[f]$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{B}[f(s_1, \dots, s_n)](x_1, \dots, x_n) &= \sum_{m_1, \dots, m_n} \frac{c_{m_1, \dots, m_n}}{m_1! \cdots m_n!} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|s_1|=\epsilon_1, \dots, |s_n|=\epsilon_n} e^{(\frac{x_1}{s_1} + \cdots + \frac{x_n}{s_n})} \frac{f(s_1, \dots, s_n)}{s_1 \cdots s_n} ds_1 \cdots ds_n \end{aligned}$$

で定義され

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{B}[f(s)](x) = \mathcal{B}[s_i^{-1} f(s)](x), \quad \mathcal{B}[fg] = \mathcal{B}[f] \# \mathcal{B}[g],$$

となる。ただし

$$(f\sharp g)(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} f(x-s)g(s)ds$$

である。そして \mathcal{O}^n を \mathbb{C}^n の原点での正則関数の芽の作る代数（積は通常の積）、 $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ を \sharp -積を入れて代数とすれば代数として

$$\mathcal{B} : \mathcal{O}^n \cong \text{Exp}(\mathbb{C}^n) \quad (11)$$

である。

ボレル変換の逆変換は

$$\mathcal{B}^{-1}[f(x)](s) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-x_1 - \cdots - x_n} f(s_1 x_1, \dots, s_n x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

であたえられるが \mathcal{B}^{-1} は有限指数型でない関数にたいしても定義されることがある。たとえば

$$\mathcal{B}^{-1}[x^a](s) = \Gamma(1+a)s^a, \quad \Re a > -1, \quad \mathcal{B}^{-1}[\log x](s) = \log s - \gamma$$

である。また $f^{\sharp n} = \overbrace{f\sharp \cdots \sharp f}^n$ とすれば

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} (\log x)^{\sharp m} = \frac{e^{-\gamma t}}{\Gamma(1+t)} x^t$$

が成り立つ。よって (a について解析接続して)

$$\mathcal{B}[s^a](x) = \frac{x^a}{\Gamma(1+a)}, \quad \mathcal{B}[\log s](x) = \log x + \gamma$$

とボレル変換を拡張する。さらに

$f(x) = \sum_{m_1, \dots, m_n} c_{m_1, \dots, m_n} (\log x_1)^{m_1} \cdots (\log x_n)^{m_n}$ のとき

$$\mathcal{B}[f(s)](x) = \sum_{m_1, \dots, m_n} c_{m_1, \dots, m_n} (\log x_1 + \gamma)^{\sharp m_1} \cdots (\log x_n + \gamma)^{\sharp m_n} \quad (12)$$

の右辺が収束するとき (12) で $\mathcal{B}[f(s)](x)$ を定義する。このように拡張されたボレル変換については

$$\frac{\partial^{a_i}}{\partial x_i^{a_i}} \mathcal{B}[f(s)](x) = \mathcal{B}[s_i^{-a_i} f(s)](x), \quad (13)$$

$$\log\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \mathcal{B}[f(s)](x) = -\mathcal{B}[\log s_i f(s)](x) \quad (14)$$

が成立する。

なおこの場合 $\mathcal{B}[f](x)$ は $\overbrace{\mathbb{C}^\times \times \cdots \times \mathbb{C}^\times}^n$ の多価関数であり $\mathcal{B}[s^{-n}] = 0$ だが 定義域を $\{(x_1, \dots, x_n) | \Re x_1 \geq 0, \dots, \Re x_n \geq 0\}$ とし $\mathcal{B}_+[s^{-n}] = \delta^{(n-1)}$ となる \mathcal{R}_+ に対応する) 変換 \mathcal{B}_+ も考えられる。

定理 2。 $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$, $m = (m_1, \dots, m_n)$ とし

$$\delta_c^{(m)} = \delta_{c_1}^{(m_1)} \otimes \cdots \otimes \delta_{c_n}^{(m_n)}$$

とすれば次の式が成立する。

$$\mathcal{R}[\delta_c] = \mathcal{B}[x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}], \quad (15)$$

$$\mathcal{R}[\delta_c^{(m)}] = (-1)^{m_1 + \cdots + m_n} \mathcal{B}\left[\prod_{i=1}^n x_i^{c_i} (\log x_i)^{m_i}\right] \quad (16)$$

特に

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}[\delta_1^{(m_1)} \otimes \cdots \otimes \delta_n^{(m_n)}] \\ &= (-1)^{m_1 + \cdots + m_n} \mathcal{B}[(\log x_1)^{m_1} \cdots (\log x_n)^{m_n}] \end{aligned} \quad (17)$$

である。

証明。 $\mathcal{R}[\delta_c] = \frac{x^c}{\Gamma(1+c)}$ と $\mathcal{B}[s^c] = \frac{x^c}{\Gamma(1+c)}$ から (15) が成立する。

$\delta_b(s) = \delta(s-b)$ から $\frac{\partial}{\partial b} \delta_b = -\delta_b^{(1)}$ から

$$\frac{\partial}{\partial b} \mathcal{R}[\delta_b] = -\mathcal{R}[\delta_b^{(1)}]$$

だから (15) の両辺を c_1, \dots, c_n で微分して (16) が得られる。

系。 f が有限指数型であれば $\mathcal{B}[f(\log s)](x)$ は定義できる。

証明。 (17) から

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}\left[\sum_{m_1, \dots, m_n} c_{m_1, \dots, m_n} (\log x_1)^{m_1} \cdots (\log x_n)^{m_n}\right] \\ &= \mathcal{R}\left[\sum_{m_1, \dots, m_n} (-1)^{m_1 + \cdots + m_n} c_{m_1, \dots, m_n} \delta_1^{(m_1)} \otimes \cdots \otimes \delta_n^{(m_n)}\right] \end{aligned} \quad (18)$$

である。よって定理 1 から系が得られる。

この系からボレル変換は $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)^{\log} = \{f(\log x) | f \in \text{Exp}(\mathbb{C}^n)\}$ で定義されるが \mathcal{O}^n は $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)^{\log}$ に含まれないのでこの双方を含む適切な空間を拡張されたボレル変換の定義域として探るのも問題である。

また前節の議論から $\mathcal{O}^{n,\log} = \{f(\log x) | f(x) \in \mathcal{O}^n\}$ の元に対する拡張されたボレル変換を調べるのも意味のある問題である。ただしこれが \mathcal{O}^n のボレル変換を含むと言う事にはならないと思われる。

またこの場合 $f(\log x)$ はある $R > 0$ があって $\|\log x\| < R$, $\|\log x\| = \sqrt{\sum |\log x_i|^2}$ でしか収束しないから 例えば

$$\mathcal{B}[1 - \sum_m \frac{B_{2m}}{(2m)!} (\log s)^{2m-1}](x) = e^x$$

がどの範囲の x で成立するかは問題として残っている。

なお (15) からは (形式的に)

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}[\sum_{a_1, \dots, a_n} c_{a_1, \dots, a_n} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}] \\ &= \mathcal{R}[\sum_{m_1, \dots, m_n} c_{a_1, \dots, a_n} \delta_{1, a_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{n, a_n}] \end{aligned} \quad (19)$$

も導かれる。(18) では m_1, \dots, m_n は非負の整数だが (19) での a_1, \dots, a_n は任意の複素数である。

5 ローラン型展開とボレル変換

(13) から $P(X_1, \dots, X_n)$ が定数係数の多項式のとき

$$P(\frac{\partial^{a_1}}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial^{a_n}}{\partial a_n}) \mathcal{B}[f(s_1, \dots, s_n)] = \mathcal{B}[p(s_1^{-a_1}, \dots, s_n^{-a_n}) f(s_1, \dots, s_n)]$$

である。したがって f が原点の近傍で有利型で $f(s) = \frac{g(s)}{P(s)}$ とかけ $P(s)$ が多項式であれば

$$P(s_1, \dots, s_n) = s_1^{i_1} \cdots s_n^{i_n} P(s_1^{-1}, \dots, s_n^{-1}) (= s^{-I} P(s^{-1}))$$

として

$$\mathcal{B}[f(s)] = P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \mathcal{B}\left[\frac{g(s)}{s_1^{-i_1} \dots s_n^{-i_n}}\right]$$

となる。分数冪の場合も $f(s) = \frac{g(s^\alpha)}{P(s^\alpha)}$ の形であれば同じような式が成り立つから有利型関数ノローラン型展開はボレル変換を計算するのに役立つ。

しかし $f(x)$ が原点の近傍で特異点を持っていても そのローラン (ピゾー) 型展開 $\sum_{a_1, \dots, a_m} c_{a_1, \dots, a_m} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ が与えられれば形式的に

$$\mathcal{B}[f(s)](x) = \sum_{a_1, \dots, a_m} \frac{c_{a_1, \dots, a_m}}{\Gamma(1+a_1) \dots \Gamma(1+a_n)} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$$

でそのボレル変換が定義出来るが $f(x)$ のローラン型展開は原点の近傍で意味を持つとは限らないという問題がある。例えば

$$\frac{1}{x-y} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} x^{-n-1} y^n, & |x| > |y|, \\ -\sum_{n=0}^{\infty} y^{-n-1} x^n, & |x| < |y| \end{cases}$$

である。以下では座標の順 x_1, \dots, x_n を固定し $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ とし $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots < \epsilon_n$,

$$\gamma_\sigma = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_{\sigma(1)}| = \epsilon_1, \dots, |x_{\sigma(n)}| = \epsilon_n\}$$

とする。原点の近傍で有利型な f の特異点が $\cup_{i,j} \{x_i \pm x_j = 0\}$ に含まれるとすれば

$$\mathcal{B}_{\gamma_\sigma}[f(s)](x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_\sigma} e^{\left(\frac{x_1}{s_1} + \dots + \frac{x_n}{s_n}\right)} \frac{f(s_1, \dots, s_n)}{s_1 \dots s_n} ds_1 \dots ds_n$$

は領域 $|x_{\sigma(1)}| < |x_{\sigma(2)}| < \dots < |x_{\sigma(n)}|$ で収束する f のローラン型展開を使ったボレル変換である。

σ のローラン型展開への影響を見るために 2 変数 (x, y) の場合を考え $f^\tau(x, y) = f(y, x)$, $f(x, y) = f_+(x, y) + f_-(x, y)$,

$$f_+(x, y) = \frac{f(x, y) + f(y, x)}{2}, \quad f_-(x, y) = \frac{f(x, y) - f(y, x)}{2}$$

とする。 $f_+^\tau = f_+$, $f_-^\tau = -f_-$ である。領域 $D_1 = \{(x, y) \mid |x| > |y|\}$ でのローラン型展開は

$$f_+(x, y) = \sum_{n \geq m} a_{n,m} (x^n y^m + x^m y^n), \quad f_-(x, y) = \sum_{n \geq m} b_{n,m} (x^n y^m - x^m y^n)$$

と書ける。一方 $f(x, y) = \sum_{n,m} c_{n,m} x^n y^m$, $|x| > |y|$ とすれば $\check{f}(y, x) = \sum_{n,m} c_{n,m} y^n x^m$ は $D_2 = \{(x, y) \mid |x| < |y|\}$ で収束するローラン型級数である。領域の境界 $\{(x, y) \mid |x| = |y|\}$ では f の D_2 でのローラン型展開と \check{f} は $\frac{f^\tau}{\check{f}}$ の積で変換される。

ボレル変換では

$$\mathcal{B}[f_\pm] = \mathcal{B}[f]_\pm$$

が成り立つが さらに $f^\alpha(x, y) = f(x^\alpha, y^\alpha)$ としても

$$\mathcal{B}[f_\pm^\alpha] = \mathcal{B}[f^\alpha]_\pm$$

が成立する。よって $\mathcal{B}[f^\alpha]$ をローラン型展開を使って計算するときは f のローラン型展開の接続と同じような接続をすればよい。これに対し $\alpha \neq \beta$ であれば $f(x^\alpha, y^\beta)$ のローラン型展開を使ったボレル変換の計算は簡単ではない。また $f(x, y)^\alpha$ だと 例えば

$$(x + y)^\alpha = \begin{cases} x^\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!} x^{\alpha-k} y^k, & |x| > |y| \\ y^\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!} x^k y^{\alpha-k}, & |x| < |y| \end{cases}$$

だから接続は簡単ではない。これらをはっきりさせるのは今後の問題である。