微分方程式の解の一意性：再考
Uniqueness of Solutions of Differential Equations: Revisited

浅田　明[*1]
Akira Asada[*2]

1　はじめに

微分方程式の解の一意性は古くから多くの研究があり非専門家が新たな貢献をする余地はなさそうである。しかしこうした一意性は解の範囲を関数または（シュワルツや佐藤の意味の）超関数に限った場合で　それを超えた一般化関数では違う「解」があるように見える。この「解」は全く無意味な可能性もあるが　そうであってもある種の解の接続を与えると解釈できる。専門家の間では知られた事かも知れないが　あまり知られていないようなので紹介する。

始めに簡単にどのように一意性が破れるか述べる。取り扱う方程式は最も簡単な線形常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \tag{1}$$

とする。この方程式の解 y は　$\frac{d}{dx}(e^{-\lambda x}y) = 0$ だから $y = Ce^{\lambda x}$, C は定数、と書ける。しかし $f_+(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$　とすれば　超関数の意味で微分したとき $\frac{d}{dx}e_+^{\lambda x} = \lambda e_+^{\lambda x} + \delta$, δ はディラック関数、となることから以下のように見かけ上　別の解が作れる。

$\lambda \neq 0$ とする。形式的な和

$$E_{\lambda,0} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n}\delta^{n-1}, \quad \delta^n = \frac{d^n\delta}{dx^n},\ \delta^0 = \delta \tag{2}$$

に意味があり項別微分が出来れば

$$\frac{d}{dx}(e_+^{\lambda x} + E_{\lambda,0}) = \lambda(e^{\lambda x} + E_{\lambda,0})$$

である。よって (1) に見かけ上 $Ce^{\lambda x}$ 以外の解が有ることになり一意性が破れるように見える。$E_{\lambda,0}$ はシュワルツの意味での超関数ではないが $|c| < |\lambda|$ なら $E_{\lambda,0}e^{cx}$ は意味がある。この場合 $e^{-\lambda x}E_{\lambda,0}$ は定義できない（５節参照)。

[*1] 信州大学名誉教授　asada-a@poporo.ne.jp
[*2] Professor emeritus Sinsyu University

けれども　この議論には問題が残る。λ を実数とすれば

$$\int_0^\infty e^{\lambda x} e^{\mu x} dx = -\frac{1}{\lambda+\mu}, \quad \mu < -\lambda,$$
$$E_{\lambda,0} e^{\mu x} = \frac{1}{\lambda+\mu}, \quad |\mu| < |\lambda|,$$

だから $\lambda < 0$ の時　$\lambda < \mu < -\lambda$ であれば $\int_{-\infty}^{\infty} e_+^{\lambda x} e^{\mu x} dx + E_{\lambda,0} e^{\mu x}$ が定義できるがその値は 0 である。これはある種の関数空間の上の作用素（一般化関数）と見たとき $e_+^{\lambda x} + E_{\lambda,0} = 0$ であることを意味する。これが 0 でないような（一般化）関数としての意味づけが出来るかは今後の問題だろう。あるいは $E_{\lambda,0}$ が定義できる関数空間と　作用

$$T_{e_0^{\lambda x}} : f(x) \to \int_0^\infty e^{\lambda x} f(x) dx$$

が定義できる関数空間を合わせることにより $T_{e_+^{\lambda x}}$ の定義域を拡張できると解釈すべきかもしれない（詳しい議論は 6 節に有る）。

この「解」は分数冪微分、特に分数冪微分を平行移動に移す積分変換 $\mathcal{R}$ と　（拡張された）ボレル変換との関係を調べる中で見つかった ([4])。そのため　まず 2 節から 4 節で簡単にその説明をし　5 節から 7 節でこの「解」の意味づけ、発展方程式への「応用」などを述べる。

2　分数冪微分と微分の対数

$\Re a > 0$ のとき a-階の不定積分を

$$I^a f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} f(t) dt \tag{3}$$

で定義する（積分は 0 から始めなくても良い）.。$I^a f(x)$ は正の実軸上で定義された関数だが x を複素変数として $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ での関数とみる場合もある。$\Re(a+c) > 0$ なら

$$I^a x^c = \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c+a)} x^{a+c}$$

だがこの右辺は x, c, a について解析的だから以下では解析接続して任意の c でこの式が成り立つと見る。

分数冪微分は $\Re(n-a) > 0$ として

$$\frac{d^{n-a}}{dx^{n-a}} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I^a f(x); \quad \text{Riemann} - \text{Liouville} \tag{4}$$
$$\frac{d^{n-a}}{dx^{n-a}} f(x) = I^a (\frac{d^n f}{dt^n})(x), \quad \text{Caputo} \tag{5}$$

の２種類の定義があり　これらは必ずしも一致しない。しかし f をミクシンスキの演算子 ([11]) とし超関数の意味での微分を使えば一致する。この場合定数の分数冪微分は定義できない（１はヘヴィサイド関数Ｙにおきかえられる)。

演算子の空間へ作用すると見れば $\dfrac{d^{-a}}{dx^{-a}} = I^a$, $a > 0$ として $\{\dfrac{d^a}{dx^a}|a \in \mathbb{R}\}$ は１経数群でその生成作用素は $\log(\dfrac{d}{dx})$;

$$\log(\frac{d}{dx})f(x) = -\big(\gamma f(x) + \int_0^\infty \log(x-t)\frac{df_+(t)}{dt}dt\big) \tag{6}$$

で与えられる ([3],[12])。ただし γ はオイラー定数、$\dfrac{df_+(t)}{dt}$ は $f_+(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases}$ の超関数の意味での微分

$$\frac{df_+(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} + f(0)\delta$$

である。

分数冪微分の定義が一意でないのは厄介だが c, $c-a$ がともに負の整数でなければ

$$\frac{d^a}{dx^a}x^c = \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)}x^{c-a} \tag{7}$$

が成り立つ。また x_+^c についても同じ式が成り立つ（この場合定義域は $x > 0$).

3　積分変換 $\mathcal{R}$ と $\mathcal{R}_+$

定義１。積分変換 $\mathcal{R}$,$\mathcal{R}_+$ を

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^s}{\Gamma(1+s)}f(s)ds \tag{8}$$

$$\mathcal{R}_+[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_+^s}{\Gamma(1+s)}f(s)ds \tag{9}$$

で定義する。

$\mathcal{R}[f](x)$ は $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}|x \leq 0\}$ で定義されるが $\mathbb{R}_+[f](x)$ は $\{x \in \mathbb{R}|x \geq 0\}$ で定義されている。両側ラプラス変換 $\mathcal{L}[g(s)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ts}g(s)ds$ を使うと

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{L}[\frac{f(s)}{\Gamma(1+s)}](\log x), \quad t = \log x$$

である。

定理１。 $\dfrac{f(s)}{\Gamma(1+s)}$ が急減少なら

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[f(s)](x)=\mathcal{R}[\tau_a f(s)](x),\quad \tau_a f(s)=f(s+a), \tag{10}$$
$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}_+[f(s)](x)=\mathcal{R}_+[\tau_a f(s)](x) \tag{11}$$

である。

証明。仮定から $\dfrac{d^a}{dx^a}$ と積分が交換できて

$$\begin{aligned}\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[f(s)](x)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(1+s)}\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)}x^{s-a}f(s)ds\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^t}{\Gamma(1+t)}f(t+a)dt,\quad s-a=t\end{aligned}$$

となる。よって (10) が成立する。(11) も同様に証明される。

系。同じ仮定で次の式が成り立つ。

$$\log(\frac{d}{dx})\mathcal{R}[f(s)](x)=\mathcal{R}[\frac{df}{ds}](x),\quad \log(\frac{d}{dx})\mathcal{R}_+[f(s)](x)=\mathcal{R}_+[\frac{df}{ds}](x). \tag{12}$$

この証明は短いが天下り的である。[3] には何故 $\mathcal{R}$ が導入されえたかわかるような証明がある。$\mathcal{R}_+$ の定義は [3] にはない（[4] には有る)。

a が複素数 $b+ci$ であれば

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[f(s)](x)=\int_{-\infty-ic}^{\infty+ic}\frac{x^s}{\Gamma(1+s)}f(s+a)ds,$$

だが $|f(s)|\le Ae^{-t|s|^2}$, $A>0,t>0$, $|\Im s|<|c|+\epsilon$, $\epsilon>0$ が成立していればコーシーの積分定理から (10)、(11) が成立する。

この定理は f が関数でなくても成立する場合がある。特に $\delta_c=\delta(s-c)$ とすれば

$$\mathcal{R}[\delta_c](x)=\frac{x^c}{\Gamma(1+c)},\quad \mathcal{R}_+[\delta_c](x)=\frac{x_+^c}{\Gamma(1+c)} \tag{13}$$

だから　c が負の整数でなければ (10),(11) が成り立つ。一方 c が負の整数 $-n$ であれば

$$\mathcal{R}[\delta_{-n}]=0,\quad \mathcal{R}_+[\delta_{-n}]=\delta^{(n-1)}(=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\delta) \tag{14}$$

であり $\dfrac{d^a}{dx^a}(\dfrac{d^b}{dx^b}\mathcal{R}_+[\delta_c])=\dfrac{d^{a+b}}{dx^{a+b}}\mathcal{R}_+[\delta_c]$ は成立するが
$\dfrac{d^a}{dx^a}(\dfrac{d^b}{dx^b}\mathcal{R}_+[\delta_c])=\dfrac{d^{a+b}}{dx^{a+b}}\mathcal{R}[\delta_c]$ は必ずしも成立しない ([4] 参照)。

4 $\mathcal{R}$ とボレル変換

原点の近傍での正則関数 $\phi(z) = \sum_n c_n z^n$ のボレル変換 $\mathcal{B}[\phi(\zeta)](z)$ は

$$\mathcal{B}[\phi(\zeta)](z) = \sum_n \frac{c_n}{n!} z^n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{\frac{z}{\zeta}}}{\zeta} \phi(\zeta) d\zeta$$

で定義される ([1],[10])。定義から

$$\frac{d}{dz}\mathcal{B}[\phi(\zeta)](z) = \mathcal{B}[\zeta^{-1}\phi(\zeta)](z), \quad \mathcal{B}[\zeta^{-n}](z) = 0, \tag{15}$$

である。また Exp($\mathbb{C}$) を　積を $(f\sharp g)(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(x-t)g(t)dt$ で定義した有限指数型関数の環, $\mathcal{O}$ を原点での正則関数の芽の環とすれば

$$\mathcal{B} : \mathcal{O} \cong \mathrm{Exp}(\mathbb{C}), \tag{16}$$

である。

ボレル変換の逆変換は

$$\mathcal{B}^{-1}[f(t)](x) = \int_0^\infty e^{-t} f(xt) dt \tag{17}$$

で与えられるが　これは必ずしも有限指数型でない関数にたいしても定義できる。例えば

$$\mathcal{B}^{-1}[t^c](x) = \Gamma(1+c)x^c, \quad \mathcal{B}^{-1}[\log t](x) = \log x - \gamma,$$

である。公式

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} \overbrace{\log x \sharp \cdots \sharp \log x}^{n} = \frac{e^{-\gamma t}}{\Gamma(1+t)} x^t$$

が成立するから

$$\mathcal{B}[\zeta^c](z) = \frac{z^c}{\Gamma(1+c)}, \quad \mathcal{B}[\log\zeta](z) = \log z + \gamma$$

と定義してボレル変換を $F(\log z)$, $F(z)$ は整関数、となる関数にまで拡張できる ([1])。なお右半平面では広義一様に

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \mathcal{B}[(\zeta-\epsilon)^c](z) = \frac{z^c}{\Gamma(1+c)}, \quad \lim_{\epsilon\downarrow 0} \mathcal{B}[\log(\zeta-\epsilon)](z) = \log z + \gamma,$$

が成り立つ。この拡張されたボレル変換の像は $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$（の開集合の）関数である。

一方　ボレル変換の像を虚軸を含む）右半平面とすれば

$$\int_0^\infty e^{-t}\delta(xt)dt = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-s}\delta(s)ds = \frac{1}{x}$$

だから $\mathcal{B}^{-1}[\delta] = \dfrac{1}{x}$ となる。これからこのように定義域を狭めたボレル変換を $\mathcal{B}_+$ と書くことにすれば

定理２。次の式が成り立つ。

$$\mathcal{R}[\delta_c] = \mathcal{B}[\zeta^c], \quad \mathcal{R}_+[\delta_c] = \mathcal{B}_+[\zeta^c]. \tag{18}$$

5　$\dfrac{d^a y}{dx^a} = \lambda y$ の変換 $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_+$ による解

$y = \mathcal{R}[f(s)]$ であれば (10) により $f(s+a) = \lambda f(s)$ のとき $\dfrac{d^a}{dx^a} y = \lambda y$ である。$f(s)$ が関数なら

$$f(s) = e^{\mu s} h(s), \quad e^{\mu a} = \lambda,\ h(s+a) = h(s)$$

でこのような f に対して $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_+$ が関数として定義できれば (1) の解の関数の範囲での一意性が破れるので関数としては定義できない（適当な関数空間の上の一般化関数としての定義は可能である ([4]))。

一方シュワルツ超関数としては離散デルタ　ポテンシャル

$$h(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^n \delta_{na+\beta},$$

(とその β についての和）が $h(s+a) = \lambda h(s)$ をみたす。以下では

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{na+\beta} = h_{\lambda,s;\beta}$$

とおく。特に $\beta = 0$ のとき $h_{\lambda,a;0} = h_{\lambda,a}$ と書く。$h_{\lambda,a,;\beta}$ で張られる空間は $\mathcal{Z}$ の $1 \to \tau_a$ という作用で不変な空間である。

補題１。$\mathcal{R}_+[h_{\lambda,a}]$ が定義できれば

$$\frac{d^\beta}{dx^\beta} \mathcal{R}_+[h_{\lambda,a}] = \lambda \mathcal{R}_+[h_{\lambda,a;\beta}] \tag{19}$$

である。また a が無理数なら変換 $\mathcal{R}$ についても同じ式が成り立つ。

命題２。$h_{\lambda,1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^n \delta_n$ については

$$\mathcal{R}[h_{\lambda,1}](x) = e^{\lambda x}, \quad \mathcal{R}_+[h_{\lambda,1}](x) = e_+^{\lambda x} + E_{\lambda,0} \tag{20}$$

である。また $h_{\lambda,1}^+ = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \delta_n$ とすれば $\mathcal{R}[h_{\lambda,1}] = \mathcal{R}[h_{\lambda,1}^+]$ が成立する。

注意。$(\dfrac{d}{dx} - \lambda) e_+^{\lambda x} = \delta$ だから (19) が成立することは $(\dfrac{d}{dx} - \lambda) E_{\lambda,0} = -\delta$ を意味する。

$E_{\lambda,0}$ の定義域としては　例えば

$$\mathcal{D}(\mathbb{R})_c = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) | \limsup |c^{-n} \frac{d^n f}{dx^n}(0) = 0\},$$

$\mathcal{D}(\mathbb{R})_{<c} = \cup_{c'<|c|} \mathcal{D}(\mathbb{R})_c$ として $\mathcal{D}(\mathbb{R})_{<\lambda}$ が取れる。この場合 $e_+^{\lambda x}$ を $\mathbb{R}$ 上の関数とみて $\mathcal{D}(\mathbb{R})_{<\lambda}$ 上の汎関数 $(e_+^{\lambda x} + E_{\lambda,0})$ を

$$(e_+^{\lambda x} + E_{\lambda,0})(\phi(x)) = \int_0^\infty e^{\lambda x}\phi(x)dx + \sum_{n=1}^\infty \lambda^{-n} \frac{d^{n-1}\phi}{dx^{n-1}}(0)$$

で定義する。なお定義から $f(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})_{<\lambda}$ で $e^{-\lambda x} f(x) \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})_{<\lambda}$ となる f があるから $e^{-\lambda x} E_{\lambda,0}$ は定義できない。

6　$E_{\lambda,0}$ の定義域と作用素 $T_{e_+^{\lambda x}}$ の拡張

$E_{\lambda,0}$ が正則関数に対してだけ定義されているとし、逆ボレル変換を使えば $E_{\lambda,0}$ の $\mathcal{D}(\mathbb{R})_{<\lambda}$ より意味がありそうな定義域（とその上の汎関数としての作用）がある。

まず f が $|\lambda|$ より広い収束半径を持つテーラー展開が出来れば

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\lambda^n = f(\lambda)$$

となることに注意する。これから　もし u が $\dfrac{d^n u}{dx^n}(0) = n! \dfrac{d^n f}{dx^n}(0)$ をみたし $u(\lambda)$ が存在すれば

$$\sum_{n=0}^\infty \lambda^n \frac{d^n f}{dx^n}(0) = u(\lambda)$$

である。f の逆ボレル変換が存在すれば $u = \mathcal{B}^{-1}[f]$ だから $E_{\lambda,0} = \sum_{n=1}^\infty \lambda^{-n}\delta^{n-1}$ に注意すれば

定理３。f は正則とする。 $\mathcal{B}^{-1}[f]$ が定義でき λ^{-1} がその定義域に入れば

$$E_{\lambda,0} f = \lambda^{-1}\mathcal{B}^{-1}[f](\lambda^{-1}) \tag{21}$$

である。

この定理から $E_{\lambda,0}$ は逆ボレル変換が λ^{-1} で定義されているような関数の空間の上の汎関数として意味がある。また逆ボレル変換が整関数になるような関数の空間 (=整関数のボレル変換像となる関数の空間）の上の汎関数（一般化関数）として　すべての $E_{\lambda,0}$ は意味がある。(21) からこうして定義される汎関数 $E_{\lambda,0}$ は**非局所的作用素**になる。

収束半径が c より大きい正則関数のボレル変換になる関数の全体を F_c, 整関数のボレル変換となる関数の全体を F_∞ とおく。定義から $\mathsf{F}_\infty = \cap_{c>0}\mathsf{F}_c$ である。また関数 f と $g \in \mathsf{F}_c$ に

対し

$$T_f[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$$

と置く。$x^n \in \mathsf{F}_\infty$ であり

$$T_{e_+^{\lambda x}}[x^n] = (-1)^n \lambda^{-n} n!, \quad E_{\lambda,0}x^n = (-1)^{n-1}\lambda^{-n}n!$$

だから F_c の関数はテーラー展開できることにより

補題２。$g(x) \in \mathsf{F}_c$, $c \geq \dfrac{1}{\lambda}$ に対し $T_{e_+^{\lambda x}}[g(x)]$ が定義できれば

$$T_{e_+^{\lambda x}}[g(x)] = -E_{\lambda,0}(g(x)) \tag{22}$$

である。

補題 2 から

命題３。$\mathsf{F}_{|\lambda|^{-1}}$ の上の作用素（汎関数）として

$$T_{e_+^{\lambda x}} + E_{\lambda,0} = 0 \tag{23}$$

である。

注意。(22) と定理 3 から $g(x) \in \mathsf{F}_{|\lambda|^{-1}}$ であれば　積分 $\int_0^\infty e^{\lambda x} g(x)dx$ が発散していてもその正則化として

$$: \int_0^\infty e^{\lambda x} g(x)dx := \lambda^{-1}\mathcal{B}^{-1}[g](\lambda^{-1}) \tag{24}$$

が使える。

$\{g(x) | |T_f[g]| < \infty\} = \mathcal{D}_{T_f}$ とする。定義から $\mathcal{D}_{T_{e_+^{\lambda x}}} \not\subseteq \mathsf{F}_c$ である。$\mathsf{F}_{|\lambda|^{-1}}$ と $\mathcal{D}_{T_{e_+^{\lambda x}}}$ から張られた空間を $\tilde{\mathsf{F}}_{|\lambda|^{-1}}$ とする。

定義２。$\tilde{\mathsf{F}}_{|\lambda|^{-1}}$ の上の線形汎関数（一般化関数）$\widetilde{e^{\lambda x}}_+$ を

$$\widetilde{e^{\lambda x}}_+[f(x)] = \begin{cases} \int_0^\infty e^{\lambda x} f(x)dx, \ f(x) \in \mathcal{D}_{T_{e_+^{\lambda x}}}, \\ E_{\lambda,0}(f(x)), \quad f(x) \in \mathsf{F}_{|\lambda|^{-1}}. \end{cases} \tag{25}$$

で定義する。同様に $\tilde{E}_{\lambda,0}$ も定義する。

定義から

$$(\frac{d}{dx} - \lambda)\widetilde{e^{\lambda x}}_+ = \delta, \quad (\frac{d}{dx} - \lambda)\tilde{E}_{\lambda,0} = -\delta,$$

である。よってこれらは (1) の基本解になる。

$\tilde{\mathsf{F}}_{|\lambda|^{-1}}$ の位相は大事な問題だがまだ考えていない。これからの課題である。

7 $e_+^{\lambda x} + E_{\lambda,0}$ を使った発展方程式の解

D を空間 X 上の（正定値）楕円形方程式で固有値 λ_n, $n = 1, 2, \ldots$ とそれに属する固有関数 $\phi_n(x)$, $D\phi_n = \lambda_n \phi$ をもちグリーン作用素 $G; Gf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1}(\phi_n, f)\phi_n(x)$ を持つとする。この仮定で　発展方程式

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} + D_x U(t,x) = 0 \tag{26}$$

をフーリエの方法で解くとき

$$\frac{df(t)}{dt} = \lambda_n f(t) \tag{27}$$

の解として $e_+^{\lambda_n t} + E_{\lambda_n,0}$ を使えば

$$U(t,x)_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e_+^{\lambda_n t} \phi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n E_{\lambda_n,0} \phi_n(x)$$

の形の解が得られる。ただし $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \phi_n(x) = u(x)$ とする。比較のため初期条件 $U(0,x) = u(x)$ で (22) を解いた ((23) の解として $e^{\lambda_n t}$ を使った）解を

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\lambda_n t} \phi_n(x)$$

と置く。$n \to \infty$ で C_n が十分早く 0 に収束すれば

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} C_n E_{\lambda_n,0} \phi_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \big(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_n^{-m} \delta^{m-1}\big) \phi_n(x) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \delta^{m-1} \big(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-m} C_n \phi_n(x)\big)\end{aligned}$$

となる。ここで $C_n = (u(x), \phi_n(x))$ だから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-m} C_n \phi_n = G^m u(x)$$

である。よって　同じ仮定で

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n E_{\lambda_n,0} \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n-1} G^n u(x), \tag{28}$$

となる。形式的には

$$(\frac{\partial}{\partial t} - D)^{-1} = -G(I - \frac{\partial}{\partial t} G)^{-1} = -G(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial t^n} G\ n),$$

だから (9) は

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n E_{\lambda_n,0}\phi_n = -(\frac{\partial}{\partial t} - D)^{-1}\delta \otimes u(x) \tag{29}$$

となって $(\frac{\partial}{\partial t} - D)U_{+,t}(t,x) = \delta \otimes u(x)$ を打ち消す項になっている。$U(t,x)_0 = U(t,x)_{0,+} + U(t,x)_{0,0}$;

$$U(t,x)_{0,+} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e_+^{\lambda_n t}\phi_n(x), \quad U_(t,x)_{0,0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n E_{\lambda_n,0}\phi_n(x),$$

とおけば

$$\big(\frac{\partial}{\partial t} - D\big)U(t,x)_{0,+} = \delta \otimes u(x), \quad \big(\frac{\partial}{\partial t} - D\big)U_{0,0} = -\delta \otimes u(x),$$

となり方程式 $\big(\frac{\partial}{\partial t} - D\big)U(t,x) = \delta \otimes u(x)$ の解の一意性も破れている。ただし補題 2 に従えば $\mathsf{F}_\infty \otimes C(X)$, $C(X)$ は X 上の適当な関数空間の作用素として $U(t,x)_{0,+} = -U(t,x)_{0,0}$ だから一意性が破れているとは言えない。この場合も

$$\tilde{U}(t,x)_{0,+} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \widetilde{e^{\lambda x}}_+ \phi_n(x), \quad \tilde{U}(t,x)_{0,0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \tilde{E}_{\lambda_n,0}\phi_n(x)$$

で作用素としての定義域の拡張が定義できる。

8 補足

1。補題 1 から β が整数でなければ $\frac{d^\beta}{dx^\beta}(e_+^{\lambda x} + E_{\lambda,0})$ が定義できれば (1) の $e^{\lambda x}$, $e_+^{\lambda x} + E_{\lambda,0}$ と独立な解になる。しかし分数冪微分の積公式（ライプニッツの法則）は複雑なので ([2],[3]), 定理 3 にあたる式 ; 例えば

$$(\frac{d^a}{dx^a}E_{\lambda,0})(f) = \mathcal{B}^{-1}[\frac{d^a f}{dx^a})](\lambda^{-1}),$$

が $\frac{d^\beta}{dx^\beta}E_{\lambda,0}$ に対して成り立つかは解らない。

2。a が無理数であれば形式的に

$$\mathcal{R}[h_{\lambda,a}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^{na}}{\Gamma(1+na)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{-n} x^{-na}}{\Gamma(1-na)},$$

である（$\mathcal{R}_+$ についても同様な式が得られる）。$\Re a > 0$ からこの右辺第 1 項は収束するが第 2 項は発散する。しかし

$$\text{p.f.} \int_0^\infty x^{-na} f(x)dx = \frac{1}{(1-na)\cdots(m-na)} \int_0^\infty x^{m-na} \frac{d^m f(x)}{dx^m} dx,$$

$m = [n\Re a]$ であり

$$\frac{1}{\Gamma(1-na)(1-na)\cdots(m-na)} = \frac{\sin(na\pi)\Gamma(na)}{(1-na)\cdots(m-na)}$$

だから　適当な関数空間の上では $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^{-n}}{\Gamma(1-na)}\text{p.f.}\int_0^{\infty} x^{-na} f(x)dx$ が汎関数（一般化関数）として意味がある可能性がある。

3。(26) の右辺の逆ボレル変換は　それぞれ $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^{na}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} x^{-na}$ である。ここで

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^{na} = \frac{1}{1-\lambda x^a}, \quad |\lambda x^a| < 1, \tag{30}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} x^{-na} = \frac{1}{\lambda x^a - 1}, \quad |\lambda x^a| > 1, \tag{31}$$

となるから　見かけ上 (26) の右辺第 1 項と第 2 項は打ち消しあうようだが　収束域に共通点がないので打ち消すとすぐには言えない。しかしこの事と「はじめに」で注意した　ある種の関数空間の作用素としては $e_+^{\lambda x} + E_{\lambda,0} = 0$ となること（命題３）とは関係するだろう。これがどのような意味を持つか調べるのは今後の課題である。

4。$h^+_{\lambda,a;-m} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \delta_{na-m}$ とすれば　（一般化された）ミッターハ・レフラー関数 $E_{a,b}(x) = \sum_{n-0}^{\infty} \dfrac{x^n}{\Gamma(na+b)}$([6]) を使えば

$$\mathcal{R}[h^+_{\lambda,a,-m}](x) = x^{a-(1+m)} E_{a,a-m}(\lambda x^a)$$

であり　方程式

$$\frac{d^a}{dx^a} y = \lambda y, \tag{32}$$

の解である。m は a が有理数 $\dfrac{q}{p}$ であれば $1, \ldots, q,$ 無理数であれば任意の自然数とする([4])。

$$h_{\lambda,a,-m} = \lambda h^+_{\lambda,a,-m} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \delta_{na-m} = \lambda h^+_{\lambda,a,-m} + h^-_{\lambda,a,-m},$$

とおけば $\mathcal{R}_+[h_{\lambda,a,-m}] = \mathcal{R}[h_{\lambda,a,-m}]_+$ であり $\mathcal{R}_+[h^-_{\lambda,a,-m}]$ に意味が付けば 5 節から 7 節までと同じ議論が方程式 (32) に対して出来る。

9　おわりに

こうした議論が微分方程式論として意味があるかは解らない。あるいは命題 3 が示すように全く無意味で　せいぜいある種の発散積分の正則化（(2 4) の式）くらいしか意味がな

いかもしれない。6節の結果からはここでの議論は (1) の解ではなく　方程式

$$\frac{dY}{dx} + \lambda Y = \delta$$

の（一般化）関数解の定義域が拡張できると言う事を問題にしているとも言えそうである。ただあえて解釈すれば（ＳＦ的だが）　時間があるとき発生すれば（他の物質・情報と相互作用を始めれば）　その影響は　それまで観測されていた世界と別の世界にあらわれいつまでも続くということだろうか？

ここでは整数階の微分方程式を主に扱ったが　こうした議論の出発点は分数冪微分の研究で方法的にも分数冪微分との関係は深い。その意味では方程式 (32) などをこの観点から見直すのも意味があるかもしれない。

また [4] では変換 $\mathcal{R}$ を通して関数の世界（連続な世界）と離散デルタ　ポテンシャルの世界（離散な世界）が結びついていることが示唆された。補題２は　さらにある種の一般化関数の世界では　関数がディラック関数とその導関数の級数に展開されることを示唆しているようにも見える。この方向の研究も意味が有るかもしれない。

分数冪微分は最近応用面でかなり興味を持たれているようである。[5],[7],[8],[9] はこの小文に関係はないが最近の文献なので　この機会に紹介する事にした。

日本語の分数冪微分の文献はあまりないようなので拙著 [3] をあげておいた。役に立てば幸いである。

参考文献

[1] Asada,A.: Some extension of Borel transformation, J. Fac.Sci.Shinshu Univ. 9(1974),71-89. 有理型関数の Borel 変換、「フーリエ超関数と偏微分方程式」（森本光生編）、数理研講究録 459(1982), 122-138.

[2] Asada,A.: Fractional calculus and infinite order differential operators, Yokohama Math. J. 55(2010), 129-147.

[3] Asada,A.: 関数を $\frac{1}{2}$ 回微分する、「数理の玉手箱」（藤井一幸編）、90-131　遊星社 2010.

[4] Asada,A.: 分数冪微分方程式と discrete delta potential, 「幾何学的力学系の新展開」数理研講究録（岩井敏洋・山口義幸編）、近刊

[5] Baleanu,D. Diethelm,K. Scalas,E. Trujilo,J.: Fractional Calculus: Models and Numerical Methods, World Sci. 20211.

[6] Erdéli,A. Mgnus,W. Oberbettinger,F,Tricomi,F.G.: Higher Transcendental Functions, Chap.18. New York, 1981.

[7] Herrmann,R.: Fractional Calculus: An Introduction for Physicists, World Sci. 2011.

[8] Hilfer,R.: Applications of Fractional Calculus in Physics, World Sci. 2011.

[9] Klafter,J.Lin,S.C. Metzleer,R.: Fractional Dynamics, World Sci.2011.
[10] Martineau,A.: Sur les fonctionelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, J. Anal. Math. 11(1963), 1-164.
[11] Mikusinski,J.: Operational Calculus, Pergamon, 1959.「演算子法」　上下　（上　松村英之訳　下　松浦重孝訳）裳華房　1985
[12] Nakanishi, N.: Logarithm type functions of the differential operators, Yokohama Math. J. 55(2010), 149-163.