Hamilton-Jacobi方程式における相関数の存在と一意性の問題(実例)

青本和彦

平成28年3月3日

1 Tricomi方程式

c.f.
F.G.Tricomi　Equazioni a Derivate Partziali, Cremonese, 1957.

$n = 2$ で

$$\Omega := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,\ x_2 > 0\}.$$

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\,x_2 p_1^2 + \frac{1}{2}\,p_2^2.$$

Hamiltonの運動方程式は

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 p_1,\ \dot{x}_2 = p_2 \\ \dot{p}_1 = 0,\ \dot{p}_2 = -\frac{1}{2}p_1^2. \end{array}\right\} \quad (0 \leq t < \infty) \tag{1}$$

$x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ を任意にとって固定する．x^0 を中心とする中心方向場を考える．
$x(0) = x^0$ を満たす (1) の解曲線は

$$
\begin{aligned}
&p_1 = C_1,\, p_2 = -\frac{1}{2}C_1^2\, t + C_2 \quad (C_1, C_2\, \text{定数}),\\
&x_1 - x_1^0 = -\frac{1}{12}\, C_1^3 t^3 + \frac{1}{2}\, C_1 C_2\, t^2 + C_1 a_2 t,\\
&x_2 - x_2^0 = -\frac{1}{4}\, C_1^2 t^2 + C_2 t \quad (t \geq 0).
\end{aligned}
$$

簡単のために $x_1^0 = 0$ の場合を考察する．測地座標 $\overline{x}_1 = C_1 t$, $\overline{x}_2 = C_2 t$ を導入すれば関係式

$$
x_1 = -\frac{1}{12}\,\overline{x}_1^3 + \frac{1}{2}\,\overline{x}_1\overline{x}_2 + x_2^0\overline{x}_1, \tag{2}
$$

$$
x_2 - x_2^0 = -\frac{1}{4}\,\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2. \tag{3}
$$

を得る．(2),(3) より 3 次方程式

$$
\overline{x}_1^3 + 12(x_2 + x_2^0)\overline{x}_1 - 24x_1 = 0 \tag{4}
$$

を得る．$x_2 > 0$ ならば $\overline{x}_1$ に関して (2) の解で $x_1 = x_2 = 0$ のとき $\overline{x}_1 = 0$ を満たすものがただひとつ存在する．実際

$$
a_2 = 12\,(x_2 + x_2^0),\ a_1 = -24\,x_1
$$

とおくとき Cardano の公式より

$$
\begin{aligned}
\overline{x}_1 &= \frac{\sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2}}{3},\\
\overline{x}_2 &= x_2 - x_2^0 + \frac{1}{4}\overline{x}_1^2,\\
y_1 &= \quad 27\Bigl(-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_2^3}{27} + \frac{a_1^2}{4}}\Bigr),\\
y_2 &= 27\Bigl(-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_2^3}{27} + \frac{a_1^2}{4}}\Bigr).
\end{aligned}
$$

相関数は

$$
S(t,x) = \int_0^t H\, dt = \frac{\overline{x}_2^2}{2t} = \frac{1}{2t}\Bigl\{x_2 - x_2^0 + \frac{1}{36}\,\bigl(\sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2}\bigr)^2\Bigr\}^2.
$$

2　x_1, x_2 に関して対称な Riemann 計量の場合

$n = 2$ で Hamiltonian として

$$H(x,p) = \frac{1}{2}(x_1 p_1^2 + x_2 p_2^2) + \lambda(x_1 + x_2 - 1) \quad (\lambda \in \mathbf{R}_{>0})$$

をとる.

$H(x,p)$ を $\mathbf{R}^2$ 内の領域

$$\Omega : \{x \in \mathbf{R}^2; x_1 x_2 - \lambda^2(x_1 + x_2 - 1)^2 > 0\}$$

の余接バンドル $T^*(\Omega)$ で考える. Ω は狭義凸領域で, $H(x,p)$ が $T^*(\Omega)$ においてて p に関して狭義凸関数となるような最大域である.

Ω の境界 $\partial\Omega$ は方程式

$$\partial\Omega : x_1 x_2 - \lambda^2(x_1 + x_2 - 1)^2 = 0$$

で与えられる.

Lemma 1 Ω は第 1 象限にある. $\partial\Omega$ は直線 $x_1 = x_2$ に関して対称, $x = (1,0), (0,1)$ でそれぞれ x_1 軸, x_2 軸に接する.

$$\alpha = \left(\frac{2\lambda}{2\lambda+1}, \frac{2\lambda}{2\lambda+1}\right) \in \partial\Omega,$$
$$\beta = \left(\frac{2\lambda}{2\lambda-1}, \frac{2\lambda}{2\lambda-1}\right) \in \partial\Omega.$$

(i) $\lambda > \frac{1}{2}$ ならば境界 $\partial\Omega$ は楕円, Ω は楕円の内部.
(ii) $\lambda = \frac{1}{2}$ ならば $\partial\Omega$ は放物線.
(iii) $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ ならば　$\partial\Omega$ は双曲線.

以下主に $\lambda > \frac{1}{2}$ の場合に限って考察する. 特に $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときは $\partial\Omega$ は中心が $(1,1)$, 半径が 1 の円である.

Hamilton の運動方程式は

$$\dot{x}_1 = p_1 x_1 + \lambda(x_1 + x_2 - 1)p_2, \tag{5}$$
$$\dot{x}_2 = p_2 x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1)p_1, \tag{6}$$
$$\dot{p}_1 = -p_1\left(\frac{p_1}{2} + \lambda p_2\right), \tag{7}$$
$$\dot{p}_2 = -p_2\left(\frac{p_2}{2} + \lambda p_1\right). \tag{8}$$

$t=0$ での初期値をそれぞれ $x=x^0, p=p^0$ とするとき, この微分方程式系は次のように解くことができる.

$p_2=up_1, p_2^0=p_1^0u_0$ とおくとき

$$\frac{dp_1}{p_1}=\frac{(1+2\lambda u)du}{\lambda(u^2-u)}$$

これより

$$\frac{p_1}{p_1^0}=(\frac{u}{u_0})^{\frac{1}{2\lambda-1}}(\frac{u-1}{u_0-1})^{\frac{-2\lambda-1}{2\lambda-1}} \tag{9}$$

また

$$\frac{\dot{u}}{u}=\frac{(2\lambda-1)p_1^0}{2}(u-1)(\frac{u}{u_0})^{\frac{1}{2\lambda}}(\frac{u-1}{u_0-1})^{-\frac{2\lambda+1}{2\lambda-1}} \tag{10}$$

これより

$$\int_{u_0}^{u}(\frac{u}{u_0})^{\frac{-2\lambda}{2\lambda-1}}(\frac{u-1}{u_0-1})^{\frac{2}{2\lambda-1}}du=\frac{2\lambda-1}{2}p_1^0u_0(u_0-1)t. \tag{11}$$

これをを解いて u の表示を得る.

(9)-(10) を (5)-(6) に代入すれば u の関数として x_1, x_2 に関する非斉次の微分方程式系が得られる:

$$\frac{dx_1}{du}=\frac{2}{2\lambda-1}\frac{x_1+\lambda(x_1+x_2-1)u}{u(u-1)}, \tag{12}$$
$$\frac{dx_2}{du}=\frac{2}{2\lambda-1}\frac{\lambda(x_1+x_2-1)+x_2u}{u(u-1)}. \tag{13}$$

特に

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{\lambda(x_1+x_2-1)+x_2u}{x_1+\lambda(x_1+x_2-1)u}. \tag{14}$$

$\Omega\cup\partial\Omega$ において, 方程式 (14) の特異点は $x=(1,0)$ または $(0,1)$ である. これら 2 点をそれぞれ a, b で表す.

Lemma 2 $x \in \partial\Omega$ が a, b と異なるとき, x を通る停留曲線の勾配は x において u の取り方によらず一定であり

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\lambda(x_1 + x_2 - 1)}{x_1}$$

で与えられる.

方程式 (12)-(13) は変換 $u \to \frac{1}{u}$, $x_1 \leftrightarrow x_2$ に関して対称である. すなわち停留曲線場は変換

$$u \to \frac{1}{u}$$

を許容する.

特に $u_0 = 0$ ならば $p_2 = p_2^0 = 0$ であり (5)-(8) の解を明示的に表示できる:

$$\begin{aligned}
&p_1 = \frac{p_1^0}{1 + \frac{p_1^0}{2} t}, \ p_2 = 0, \\
&x_1 = x_1^0 \big(1 + \frac{p_1^0}{2}\, t\big)^2, \\
&x_2 = x_2^0 (1 + \frac{p_1^0}{2}\, t)^{2\lambda} + \frac{\lambda x_1^0}{1 - \lambda} \big\{(1 + \frac{p_1^0}{2}\, t)^2 - (1 + \frac{p_1^0}{2}\, t)^{2\lambda}\big\} \\
&+ \big\{1 - (1 + \frac{p_1^0}{2}\, t)^{2\lambda}\big\}.
\end{aligned}$$

停留曲線族としては点 $(0, 1)$ を特異点とする停留曲線族である:

$$|\lambda x_1 + (\lambda - 1)(x_2 - 1)\} = C|x_1|^\lambda \quad (C\, \text{constant}).$$

同様にして $u_0 = \infty$ のときは $p_1 = p_1^0 = 0$ であり停留曲線族は $(1, 0)$ を通り, 上記のものを直線 $x_1 = x_2$ に関して鏡映したもの.

また $u_0 = (1, 1)$ ならば $u = 1$ であって $p_1 = p_2, p_1^0 = p_2^0$ であり (5)-(8) の明示的表示は

$$p_1 = p_2 = \frac{p_1^0}{1 + p_1^0(\frac{1}{2} + \lambda)\, t}$$

停留曲線族は

$$x_1 + x_2 - \frac{2\lambda}{2\lambda+1} = C|x_1 - x_2|^{2\lambda+1} \quad (C\,\mathrm{constant}).$$

(12)-(13) は 2 階の非斉次線形微分方程式系で解は次のような表示を持つ：

u_0 を出発点として斉次方程式 (Gauss 型方程式)

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{du} \\ \frac{dx_2}{du} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\lambda-1} \begin{pmatrix} \frac{2}{u(u-1)} + \frac{2\lambda}{u-1} & \frac{2\lambda}{u-1} \\ \frac{2\lambda}{u(u-1)} & \frac{2\lambda}{u(u-1)} + \frac{2}{u-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

(16)

の基本解を $V(u)$ とする.

$V(u)$ は次の方程式を満たす:

$$\frac{dV(u)}{du} = (A_0(u) + \mu A_1(u))V(u), \quad V(u_0) = 1,$$

$$A_0(u) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{u-1} + \frac{2}{u} & \\ & -\frac{2}{u-1} \end{pmatrix}, A_1(u) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{u} + \frac{3}{u-1} & \frac{1}{u-1} \\ -\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} & -\frac{1}{u} + \frac{3}{u-1} \end{pmatrix}$$

ただし $\mu = \frac{2\lambda}{2\lambda-1}$.

このとき $u = u_0$ で $x = x^0$ を満たす解は

$$\begin{pmatrix} x_1(u) \\ x_2(u) \end{pmatrix} = V(u) \int_{u_0}^{u} V(u')^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{2\lambda}{(2\lambda-1)(u'-1)} \\ -\frac{2\lambda}{(2\lambda-1)u'(u'-1)} \end{pmatrix} du' + V(u) \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} . \tag{17}$$

$V(u)$ パラメータ $\mu = \frac{2\lambda}{2\lambda-1}$ に関して整級数

$$V(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n V_n(\mu)$$

の形に展開できる. ただし

$$V_0(u) = \begin{pmatrix} \frac{u^2(u-1)^2}{u_0^2(u_0-1)^2} & \\ & \frac{(u_0-1)^2}{(u-1)^2} \end{pmatrix},$$

$$V_n(u) = V_0(u) \int_{[u_0,u]} \underbrace{\omega_1 \vee \omega_1 \vee \cdots \vee \omega_1}_{n},$$

$$\omega_1 = V_0(u)^{-1} A_1(u) V_0(u)\, du.$$

ただし記号 $\vee$ は反復積分 (K.T.Chen の意味) での合併 (join) を表す.
　次のようにしてさらに初等的な表示も得られる.

$$\Phi_1(u) = u^{-\frac{1}{2\lambda-1}}(u-1)^{\frac{2}{2\lambda-1}},$$
$$\Phi_2(u) = u^{-\frac{2\lambda}{2\lambda-1}}(u-1)^{\frac{2}{2\lambda-1}}(2\lambda u+1)$$

とおくとき

$$\begin{aligned}
x_1 = {} & \Phi_1(u)\int_{u_0}^{u}\Phi_1(u')^{-1}\Big\{\frac{2\lambda}{2\lambda-1}\frac{2C}{(p_1^0)^2}\frac{1}{u_0(u_0-1)} \\
& \cdot\frac{1}{2\lambda+u'}\Big(\frac{u'}{u_0}\Big)^{-\frac{2\lambda+1}{2\lambda-1}}\Big(\frac{u'-1}{u_0-1}\Big)^{\frac{2\lambda+3}{2\lambda-1}}-\frac{2\lambda}{4\lambda^2-1}\frac{1}{u'-1}-\frac{4\lambda^2}{4\lambda^2-1}\frac{1}{2\lambda+u'}\Big\}\,du' \\
& +\Phi_1(u)\Phi_1(u^0)^{-1}x_1^0, \qquad (18) \\
x_2 = {} & \frac{2\lambda}{2\lambda-1}\Phi_2(u)\int_{u_0}^{u}\Phi_2(u')^{-1}\Big\{\frac{1}{u_0(u_0-1)(2\lambda u'+1)}\frac{2C}{(p_1^0)^2}\Big(\frac{u'}{u_0}\Big)^{-\frac{2\lambda+1}{2\lambda-1}}\Big(\frac{u'-1}{u_0-1}\Big)^{\frac{2\lambda+3}{2\lambda+1}} \\
& +\frac{\lambda}{u'}-\frac{\lambda}{2\lambda+1}\frac{1}{u'-1}+\frac{2\lambda^2}{(2\lambda+1)(2\lambda u'+1)}\Big\}\,du'+\Phi_2(u)\Phi_2(u')^{-1}x_2^0, \qquad (19)
\end{aligned}$$

ここで C は積分定数

$$\begin{aligned}
H = C &= \frac{1}{2}(p_1^0)^2\left\{x_1^0(p_1^0)^2+x_2^0(p_2^0)^2+2\lambda\,(x_1^0+x_2^0-1)u_0\right\} \\
&= \frac{1}{2}(p_1)^2\left\{x_1(p_1)^2+x_2(p_2)^2+2\lambda\,(x_1+x_2-1)u\right\} \qquad (20)
\end{aligned}$$

を表す.

Remark　等式 (18)-(20) より得られる x_1, x_2 に関する線形の等式は Φ_1, Φ_2 積分に関する一種の Abel の等式の類似であると考えられる.

3　多次元化

　$\lambda > \frac{1}{2}$ を固定し, $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ に　おいて置換に関して対称な Hamiltonian

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} x_j p_j^2 + \lambda \sum_{1\le j<k\le n}(x_j+x_k-1)p_j p_k$$

を考え, 定義域として $\mathbf{R}^n$ 内の領域

$$\Omega := \{x \in \mathbf{R}^n;\ H(x,p) > 0 \text{ positive definite w.r.t. } p\}$$

をとる. Ω は第 1 象限内にあり点 $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in \mathbf{R}^n$ を含む凸領域である. 点 $e_j:\ x_j = 1, x_k = 0\,(k \neq j)$ は $\partial\Omega$ に属する.

Lemma 3 Ω の境界 $\partial\Omega$ は 2 点 $(\frac{(n-1)\lambda}{2(n-1)\lambda+1}, \dots, \frac{(n-1)\lambda}{2(n-1)\lambda+1})$
および $(\frac{2\lambda}{2\lambda-1}, \dots, \frac{2\lambda}{2\lambda-1})$ を含む. 従ってまたそれらを結ぶ線分も含む.

Hamilton の運動方程式は

$$\dot{x}_j = x_j p_j + \sum_{k \neq j} \lambda(x_k + x_j - 1)\, p_k, \tag{21}$$

$$\dot{p}_j = -p_j(\frac{1}{2}p_j + \sum_{k \neq j} \lambda p_k). \tag{22}$$

パラメータ $u_j\,(2 \leq j \leq n))$ を

$$p_j = u_j\, p_1$$

となるようにとる. (20)-(21) の特殊解として

$$u_j = 0 \quad (2 \leq j \leq n)$$

とおくことができる. 解は

$$p_1 = \frac{p_1^0}{1 + \frac{1}{2}p_1^0\, t},\ p_2 = \ldots = p_n = 0$$

$$\begin{aligned}
&x_1 = x_1^0\big(1 + \frac{1}{2}p_1^0\, t\big)^2, \\
&x_j = \lambda p_1^0\big(1 + \frac{1}{2}p_1^0\, t\big)^{2\lambda} \int_0^t \big(1 + \frac{1}{2}p_1^0\, t'\big)^{-2\lambda} \big\{x_1^0\big(1 + \frac{1}{2}p_1^0\, t'\big) - \frac{1}{\big(1 + \frac{1}{2}p_1^0\, t'\big)}\big\}\, dt' \\
&+x_j^0\big(1 + \frac{1}{2}p_1^0\, t\big)^{2\lambda} \quad (2 \geq j).
\end{aligned}$$

t を消去した関係は

$$\big|\lambda x_1 + (\lambda-1)(x_j-1)\big| = Cx_1^{\lambda} \quad (C\text{ 任意定数}).$$

同様にこの解を置換で写したものも得られる.

また別の特殊解として $u_2 = \ldots = u_n = 1$ とおくことができる. 解は

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 = \ldots = p_n, \\ p_1 &= \frac{p_1^0}{1+\big(\frac{1}{2}+\lambda(n-1)\big)p_1^0\, t}. \end{aligned}$$

さらに

$$X_1 = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

とおくとき

$$\frac{(1+2\lambda(n-1)X_1 - 2\lambda n(n-1)}{(1+2\lambda(n-1)X_1^0 - 2\lambda n(n-1)} = C\big[1+\big(\frac{1}{2}+\lambda(n-1)\big)p_1^0\, t\big]^2,$$

Proposition 4 積分定数 $C_j\,(3 \le j \le n)$ が存在して次の等式が成り立つ.

$$\big(\frac{p_1}{p_1^0}\big)^{\lambda-\frac{1}{2}} = \big(\frac{\tau}{\tau_0}\big)^{-\frac{1}{2}-(n-1)\lambda}\big(\frac{\tau-1}{\tau_0-1}\big)^{\lambda}\prod_{k=3}^{n}\big(\frac{\tau-C_k}{\tau_0-C_k}\big)^{\lambda}. \tag{23}$$

ここで

$$\tau = \frac{u_0-1}{u_0}$$

である.　すなわち

$$\frac{p_1}{p_1^0} = \big(\frac{\tau}{\tau_0}\big)^{\frac{-1-2(n-1)\lambda}{2\lambda-1}}\big(\frac{\tau-1}{\tau_0-1}\big)^{\frac{2\lambda}{2\lambda-1}}\prod_{k=3}^{n}\big(\frac{\tau-C_k}{\tau_0-C_k}\big)^{\frac{2\lambda}{2\lambda-1}}.$$

こうして $p_j\,(1\le j\le n)$ は定数　$p_1^0, u_0, C_k\,(3\le k\le n)$ および　τ を用いて表される．さらに

$$\int_{\tau^0}^{\tau}(\frac{\tau}{\tau_0})^{\frac{(n-2)\lambda+1}{\lambda-\frac{1}{2}}}(\frac{\tau-1}{\tau_0-1})^{-\frac{\lambda}{\lambda-\frac{1}{2}}}\prod_{k=3}^{n}(\frac{\tau-C_k}{\tau_0-C_k})^{-\frac{\lambda}{\lambda-\frac{1}{2}}}=(\lambda-\frac{1}{2})\tau_0p_1^0\,t. \quad (24)$$

実際

$$\frac{\dot{u}_j}{u_j(u_j-1)}=\frac{\dot{u}_2}{u_2(u_2-1)} \quad (j\ge 3)$$

より等式

$$\frac{u_2-1}{u_2}=C_j\frac{u_j-1}{u_j} \quad (j\ge 3),$$
$$u_2=\frac{1}{1-\tau},\ u_j=\frac{C_j}{C_j-\tau}\ (3\le j\le n).$$

さらに

Proposition 5 x_j については変数 τ の関数としての Fuchs 型の微分方程式系

$$\frac{dx_j}{d\tau}=\frac{2\lambda}{2\lambda-1}\{\sum_{k=1}^{n}f_{j1}(x)\frac{1}{\tau}+f_{j2}(x)\frac{1}{1-\tau}+\sum_{k=3}^{n}f_{jk}(x)\frac{1}{C_k-\tau}\} \quad (1\le j\le n)$$

を満たす．ここで

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= x_1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda(x_1 + x_k - 1), \\
f_{1j} &= \lambda(x_1 + x_j - 1) \quad (j \geq 2), \\
f_{21} &= x_2 + \sum_{k \neq 2, k \geq 1} \lambda(x_k + x_2 - 1), \\
f_{22} &= 1, \\
f_{2j} &= \lambda(x_j + x_2 - 1), \\
f_{j1} &= x_j + \sum_{k \neq j} \lambda(x_k + x_j - 1) \quad (j \geq 3), \\
f_{j2} &= \lambda(x_2 + x_j - 1) \quad (j \geq 3), \\
f_{jk} &= \lambda(x_k + x_j - 1) \quad (j \geq 3,\ k \neq j, k \geq 3), \\
f_{jj} &= C_j.
\end{aligned}
$$