超幾何積分における差分方程式, 漸近展開, 臨界点そして　終結式

青本和彦
於静岡大

2019, March 7

1　問題の提起

$f_j(x)$ を n-変数多項式とし乗法関数

$$\Phi(x) = f_1(x)^{\lambda_1} \cdots f_m(x)^{\lambda_m}$$

の積分

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_\lambda(\varphi) = \int_{\mathfrak{z}} \Phi(x)\varphi(x)\varpi, \ (\varpi = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) \\ &\varphi(x)\varpi \in H^n_\nabla(X, \Omega^\cdot) \end{aligned} \tag{1}$$

は　指数 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbf{C}^m$ に関してホロノミックな線形差分方程式系を満たす. その階数は対応する　n 次元ツイスト de Rham コホモロジー　$H^n_\nabla(X, \Omega^\cdot)$ の次元に等しい. ここで $X := \mathbf{C}^n - \bigcup_{j=1}^m \{f_j = 0\}$.

$H^n_\nabla(X, \Omega^\cdot)$ の適当な基底 $\varphi_j\varpi\,(1 \le j \le \kappa)$ で φ_j は λ によらないものが選べるものと仮定する.

$\mathbf{Z}^m$ の標準基底　$\varepsilon_j\,(1 \le j \le m)$ に関する $\lambda = \sum_{j=1}^m \lambda_j\varepsilon_j$ のシフト

$$T_{\varepsilon_j}; \lambda \to \lambda + \varepsilon_j$$

により　積分 (1) は　j 毎に隣接変換 (contiguity relation) である差分方程式系を満たす　:

$$
\begin{aligned}
&T_{\varepsilon_j}\mathcal{J}_\lambda(\varphi_k) = \mathcal{J}_{\lambda+\varepsilon_j}(\varphi_k) \\
&= \sum_{l=1}^{\kappa} \mathcal{J}_\lambda(\varphi_l)\, a_{j;lk}(\lambda) \quad (1 \le k \le \kappa).
\end{aligned} \tag{2}
$$

よく知られた一般論 (Grothendieck- Deligne) により　等式 (2) は　$H^n_\nabla(X, \Omega^{\cdot})$ における n-次微分型式　$\varphi_k\varpi$ の間の対応するコホモロジーの関係

$$
\mathfrak{M}_{f_j}(\varphi_k\varpi) \sim \sum_{l=1}^{\kappa} \varphi_l\varpi\, a_{j;lk}(\lambda) \tag{3}
$$

と同等である. ただし　作用素 $\mathfrak{M}_g$ は　掛け算演算子 : $\mathfrak{M}_g(\varphi\varpi) = g\varphi\varpi$ を表す.

今 有理的な一方向　$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \mathbf{Z}^m - \{0\}$ および　始点 $\lambda' \in \mathbf{C}^m$ を一つ固定し

$$
\lambda = \lambda' + N\boldsymbol{\nu} \quad (N = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}
$$

と置いて　$N \to \infty$ に関する (1) の $\boldsymbol{\nu}$ 方向での漸近展開を考察する.

一般に $\kappa \times \kappa$ の行列 $A_j(\lambda) = (a_{j;kl}(\lambda))$ の成分は λ の有理関数である.

次の仮定をおく. λ が (4) を満たすとき $N \to \infty$ に対して

$$
A_j(\lambda) = A_j^{(0)} + O\Big(\frac{1}{N}\Big).
$$

このとき　$A_j(\lambda)$ の適当な generecity の条件のもとで　$A_j^{(0)}$ は互いに可換である.

簡単のために $\boldsymbol{\nu} = (1, 1, \ldots, 1)$ の場合を考察する.

$$
F(x) := \sum_{j=1}^{m} \log f_j
$$

対応する対数微分

$$\omega = dF = \sum_{j=1}^{m} d \log f_j$$

が定義される. $\omega = 0$ を満たす X の点は方程式系

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{f_j(x)} \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_k} = 0 \quad (1 \le k \le n) \tag{5}$$

を満たす X の点 ($\Re F$ の臨界点) すなわち勾配ベクトル $\mathrm{grad}\,\Re F$ のゼロ点と同じである. 実際 $\Re F$ の臨界点が全て非退化ならば　(5) を満たす X の点の個数は　κ 個に等しくそれはまた 空間　X の　Euler 標数の絶対値に等しい. 超平面配置の場合は臨界点は全て実点であって, それぞれ有界な部屋に一個ずつ存在する.

$\Re F$ の臨界点が全て非退化と仮定する.

(5) を満たす X の点を $\mathbf{c}_j$ $(1 \le j \le \kappa)$, $\mathbf{c}_j$ を臨界点とする安定 (ツイスト) サイクルを $\mathfrak{z}_j$ と記す.

F の Hessian を

$$Hess(F) = \det\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k}\Big)_{1 \le j,k \le n}$$

と定義して次の量を考察する：

$$\prod_{l=1}^{\kappa} \big[Hess(F)\big]_{\mathbf{c}_l} = \frac{D_1}{D_0} \tag{6}$$

ただし D_1 は f_j の係数に関する多項式である. D_0 は同じくゼロでない有理式である.

[問題]

D_0, D_1 は何を表すか？

D_1 は方程式系　(5) に付随する "判別式 (discriminant)" である多項式であり　D_0 は付随する様々な終結式 (resultant) の積・商である. どのようにして D_0, D_1 の明示的な表式が得られるか？

また方程式

$$D_1 = 0$$

を満たす点は何を表すか？

2　実例

例題 **1** $n=1$ で

$$\Phi(x)=\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\lambda_j}.$$

$H^1(X,\Omega^{\cdot})$ は　$m-1$ 次元である. 対数微分

$$\varphi_j(x)\,dx=\frac{dx}{x-a_j}\quad(1\le j\le m)$$

を取るとき, 基底として　代表元 $\varphi_j\,dx\,(1\le j\le m-1)$ を選ぶことができる.

$G=e^F=\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)$ と記すとき

$$G(x)=\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{\nu}\chi_{\nu}\,x^{m-\nu},$$
$$G'(x)=\sum_{\nu=0}^{m-1}(-1)^{\nu}\chi_{\nu}\,(m-\nu)x^{m-\nu-1},$$
$$G''(x)=\sum_{\nu=0}^{m-2}(-1)^{\nu}\chi_{\nu}\,(m-\nu)(m-\nu-1)x^{m-\nu-2}.$$

ここで　χ_{ν} は $a_1,\dots,a_m$ の ν 次　基本対称式を表す.

方程式 (5) は

$$\frac{dF}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{x-a_j}=0.$$

(5) の互いに相異なる解を　$\mathbf{c}_j : x=\xi_j\,(1\le j\le m-1)$ と記す.

G,G' の終結式, G',G'' の終結式をそれぞれ $R(G,G'),R(G',G'')$ で表すとき

$$
\begin{aligned}
R(G,G') &= m^m \prod_{j=1}^{m-1} G(\xi_j) = \prod_{\nu=1}^{m} G'(a_\nu) \\
&= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \prod_{\leq \nu<\mu\leq m} (a_\nu - a_\mu)^2, \\
R(G',G'') &= m^{m-2} \prod_{j=1}^{m-1} G''(\xi_j) \\
&= m^{2m-3} (-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} \prod_{1\leq \nu<\mu\leq m-1} (\xi_\nu - \xi_\mu)^2.
\end{aligned}
$$

特に　$m=3$ の場合には

$$
\begin{aligned}
&G(x) = x^3 - \chi_1 x^2 + \chi_2 x - \chi_3, \\
&G'(x) = 3x^2 - 2\chi_1 x + \chi_2,\ G''(x) = 6x - \chi_1, \\
&R(G,G') = -(a_1-a_2)^2(a_2-a_3)^2(a_2-a_3)^2, \\
&R(G',G'') = -3^3(\xi_1-\xi_2)^2 \\
&= -12(a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_2a_3-a_3a_1-a_1a_2).
\end{aligned}
$$

その結果

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2F}{dx^2}\Big]_{x=\xi_1} \cdot \frac{d^2F}{dx^2}\Big]_{x=\xi_2} = 9\,\frac{R(G',G'')}{R(G,G')} \\
&= 108\,\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_2a_3-a_3a_1-a_1a_2}{(a_1-a_2)^2(a_1-a_3)^2(a_2-a_3)^2}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

この両辺がゼロになるのは $\xi_1=\xi_2$ の場合で　複素平面の点 a_1,a_2,a_3 が正三角形の頂点のときである.

Lemma 1 $H^1_\nabla(X,\Omega^\cdot)$ の基底 $\varphi_1 dx, \varphi_2 dx$ に関して *2* 階の差分系 *(2)* を満たす. ただし

$$
A_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{1+\lambda_\infty}(a_3-a_1) & \frac{\lambda 1}{1+\lambda_\infty}(a_3-a_1) \\ \frac{\lambda_2}{1+\lambda_\infty}(a_3-a_2) & \frac{\lambda_2}{1+\lambda_\infty}(a_3-a_2)+(a_2-a_1) \end{pmatrix}
$$

特に

$$
A_1^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(a_3-a_1) & \frac{1}{3}(a_3-a_1) \\ \frac{1}{3}(a_3-a_2) & \frac{1}{3}(a_3-a_2)+(a_2-a_1) \end{pmatrix}
$$

故に

$$
\begin{aligned}
A_{x_1}^{(0)} &= A_1^{(0)} + a_1 I \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(a_3 + 2a_1) & \frac{1}{3}(a_3 - a_1) \\ \frac{1}{3}(a_3 - a_2) & \frac{1}{3}(a_3 + 2a_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$A_x^{(0)}$ の固有値は　ξ_1, ξ_2 に等しい.

1 次の Hankel 行列を

$$
\mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} T_r(I) & T_r(A_x^{(0))}) \\ T_r(A_x^{(0)}) & T_r(\{A_x^{(0)}\}^2) \end{pmatrix}
$$

で定義するとき　次の等式が成り立つ：

$$
\det(\mathcal{H}_1) = (\xi_1 - \xi_2)^2
$$

こうして (7) より次の等式が得られる：

Proposition 2

$$
\frac{d^2F}{dx^2}\Big]_{x=\xi_1} \cdot \frac{d^2F}{dx^2}\Big]_{x=\xi_2} = \frac{1}{3}\frac{det(\mathcal{H}_1)}{(a_1 - a_2)^2(a_1 - a_3)^2(a_2 - a_3)^2}
$$

$\mathcal{H}_1$ が正定値であることと　固有値 ξ_1, ξ_2 が全て実数であることとは同値である．この場合は自明であるが, これは一般の実代数方程式の全ての根が実なることを判定するよく知られた定理 (Hermite の定理?) を反映している.

例題 2 $n = 2, m = 4$ で　$f_1 = x_1$, $f_2 = x_2$, $f_3 = 1 - x_1 - x_2$, $f_4 = 1 - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2$ (ただし　$\alpha_\nu \neq 0, 1$ かつ　$\alpha_1 \neq \alpha_2$), すなわち　Apell FI 型　超幾何関数の場合.

$$
F = \log(f_1 f_2 f_3 f_4)
$$

とおくとき　F は　$X = \mathbf{C}^2 - \{f_1 f_2 f_3 f_4 = 0\}$ において正則である．F の Hessian は

$$Hess(F) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_2} \end{vmatrix}.$$

(5) は 次の 2 個の方程式からなる　:

$$g_1 = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_3} - \frac{\alpha_1}{f_4} = 0, \tag{8}$$

$$g_2 = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_3} - \frac{\alpha_2}{f_4} = 0, \tag{9}$$

(8) , (9) は genericity 条件の下で　3 個の解を持つ. それらをそれぞれ

$$\mathbf{c}_1 : x = (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}),\ \mathbf{c}_2 : x = (\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}),\ \mathbf{c}_3 : x = (\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}),$$

と記す.

(8) - (9) より 関係式

$$\begin{aligned} g_1^* &= \alpha_2 g_1 - \alpha_1 g_2 = \frac{\alpha_2}{f_1} - \frac{\alpha_1}{f_2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{f_3} = 0, \\ g_2^* &= g_1 - g_2 = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{f_4} = 0. \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} f_1 f_2 f_3 g_1^* &= \alpha_1 x_1^2 + \{2(\alpha_1 - \alpha_2) x_2 - \alpha_1\} x_1 - \alpha_2 x_2 (x_2 - 1) = 0, \\ -f_1 f_2 f_4 g_2^* &= \alpha_2 x_2^2 + \{2(\alpha_1 - \alpha_2) x_1 - 1\} x_2 + x_1(-\alpha_1 x_1 + 1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_1 f_2 (f_3 g_1^* - f_4 g_2^*) \\ &= 4(\alpha_1 - \alpha_2) x_1 x_2 + (1 - \alpha_1) x_1 + (\alpha_2 - 1) x_2 = 0. \end{aligned}$$

より

$$x_2 = v(x_1) \tag{10}$$

$$v(x_1) = \frac{(\alpha_1 - 1) x_1}{4(\alpha_1 - \alpha_2) x_1 + \alpha_2 - 1} \tag{11}$$

が得られる.

$$\psi(x_1) = g_1^*(x_1, v(x_1)) = -16\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)\frac{\overline{\psi}(x_1)}{\psi_0(x_1)}, \tag{12}$$
$$\psi_0(x) = \{4(\alpha_1-\alpha_2)x_1+\alpha_2-1\}^2 f_2 f_4$$

とおく. $\overline{\psi}(x_1)$ は 3 次多項式である :

$$\overline{\psi}(x_1) = x_1^3 - \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 - \beta_3.$$

$x_1 = \xi_1^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, 3)$ は x_1 のみに関する次の 3 次方程式を満たす.

$$\begin{aligned} &\overline{\psi}(x_1) = 0, \\ &\beta_1 = \frac{-(\alpha_1-1)(\alpha_1-\alpha_2)+(1-\alpha_2)\alpha_1+2\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)}{2\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)}, \\ &\beta_2 = -\frac{3(\alpha_1\alpha_2-2\alpha_1+2\alpha_2-1)}{16\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)},\ \beta_3 = \frac{1-\alpha_2}{16\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)}. \end{aligned} \tag{13}$$

すなわち

Lemma 3 X において F の臨界点は 等式

$$x_2 = v(x_1),\ \psi_(x_1) = 0$$

を満たし逆も成り立つ.

一般に次の恒等式が成り立つ:

$$\begin{aligned} &x_2 - v(x_1) = u_1(x)g_1(x) + u_2(x)g_2(x), \\ &u_1(x) = \frac{x_1x_2}{4(\alpha_1-\alpha_2)x_1+\alpha_2-1}(f_4-\alpha_2 f_3) \\ &u_2(x) = \frac{-x_1x_2}{4(\alpha_1-\alpha_2)x_1+\alpha_2-1}(f_4+\alpha_1 f_3). \end{aligned}$$

Proposition 4 $x = \mathbf{c}_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$ において等式

$$\prod_{\nu=1}^{3}\Big[\frac{\alpha_2u_2+\alpha_1u_1}{u_1\frac{\partial g_1}{\partial x_2}+u_2\frac{\partial g_2}{\partial x_2}}\Big]_{\mathbf{c}_\nu}\cdot\big[Hess(F)\big]_{\mathbf{c}_\nu} = \prod_{\nu=1}^{3}\psi'(\xi_1^{(\nu)})$$
$$= \{16\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)\}^3\prod_{\nu=1}^{3}\frac{1}{\psi_0(\xi_1^{\nu})}\prod_{1\le\nu<\mu\le3}(\xi_1^{(\nu)}-\xi_1^{(\mu)})^2$$

が成り立つ.

因子 $\prod_{1\le\nu<\mu\le3}(\xi_1^{(\nu)}-\xi_1^{(\mu)})^2$ は $H^2_\nabla(X,\Omega\cdot)$ の基底

$$e_{jk}=d\log f_j\wedge d\log f_k \quad (1\le k\le 3),$$

ただし

$$\begin{aligned}
e_{14} &\sim \frac{1}{\lambda_4}(-\lambda_2 e_{12}-\lambda_3 e_{13}),\\
e_{24} &\sim \frac{1}{\lambda_4}(\lambda_1 e_{12}-\lambda_3 e_{23}),\\
e_{34} &\sim \frac{1}{\lambda_4}(\lambda_1 e_{13}+\lambda_2 e_{23}),
\end{aligned}$$

に関する差分方程式の行列 $A_1^{(0)}$ を用いて 2 次 Hankel 行列式

$$\det\begin{vmatrix} 3 & T_r(A_1^{(0)}) & T_r(\{A_1^{(0)}\}^2) \\ T_r(A_1^{(0)}) & T_r(\{A_1^{(0)}\}^2) & T_r(\{A_1^{(0)}\}^3) \\ T_r(\{A_1^{(0)}\}^2) & T_r(\{A_1^{(0)}\}^3) & T_r(\{A_1^{(0)}\}^4) \end{vmatrix}$$

に等しい.

[問題] 一般に無限方向 $\boldsymbol{\nu}=\nu_1\varepsilon_1+\nu_2\varepsilon_2+\nu_3\varepsilon_3\in\mathbf{Z}^4-\{0\}$ の漸近展開を考察する場合 $F=f_1^{\nu_1}f_2^{\nu_2}f_3^{\nu_3}f_4^{\nu_4}$ の臨界点

$$\sum_{j=1}^{4}\nu_j\frac{df_j}{f_j}=0$$

の解が全て実解と成るための $\boldsymbol{\nu}$ の満たすべき条件は何か？

例題 3 $n=2$ において　3 個の実円配置の場合.

$$f_j(x)=Q(x)+2\alpha_{j1}x_1+2\alpha_{j2}x_2+\alpha_{j0}=0 \quad (1\le j\le 3,\ Q(x)=x_1^2+x_2^2).$$

$X=\mathbf{C}^2-\{f_1f_2f_3f_4=0\}$ において $F=\log(f_1f_2f_3)$ の臨界点 (7 個) が全て実点となるための条件は？

$H^2_\nabla(X,\Omega^\cdot)$ の次元　7 であって その基底は　代表元として

$$F_j=\frac{\varpi}{f_j}\,(1\le j\le 3),\ F_{jk}=\frac{\varpi}{f_jf_k}\,(1\le j<k\le 3),\ F_{123}=\frac{\varpi}{f_1f_2f_3}$$

で与えられる．隣接関係を与える差分方程式系は次で与えられる：

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_{f_j}F_j=\varpi,\\
&\mathfrak{M}_{f_j}F_{jk}=F_k,\\
&\mathfrak{M}_{f_j}F_{kl}\sim-\frac{B\begin{pmatrix}0&\star&k&l\\0&j&k&l\end{pmatrix}}{B(0\,k\,l)}F_{kl}+\frac{B\begin{pmatrix}0&k&l\\0&j&l\end{pmatrix}}{B(0\,k\,l)}F_l+\frac{B\begin{pmatrix}0&l&k\\0&j&k\end{pmatrix}}{B(0\,k\,l)}F_k\\
&+\frac{\lambda_j}{\lambda_\infty}W_0(123)\varpi,\\
&\mathfrak{M}_{f_j}F_k\sim\varpi+B\begin{pmatrix}0&\star&k\\0&j&k\end{pmatrix}-\frac{\lambda_j}{\lambda_\infty}W_0(jk)\varpi-\frac{\lambda_l}{\lambda_\infty}\frac{B\begin{pmatrix}0&l&k\\0&j&k\end{pmatrix}}{B(0\,l\,k)}W_0(kl)\varpi\\
&+\frac{\lambda_j\lambda_k}{(\lambda_\infty+1)\lambda_\infty}\frac{B\begin{pmatrix}0&l&k\\0&\star&k\end{pmatrix}}{B(0\,k\,l)}W_0(123)\varpi.
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
&W_0(jk)\varpi=-B\begin{pmatrix}0&\star&k\\0&j&k\end{pmatrix}F_k-B\begin{pmatrix}0&\star&j\\0&k&j\end{pmatrix}F_j+B(0\star j\,k)\,F_{jk},\\
&W_0(123)\varpi=-B\begin{pmatrix}0&\star&2&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}F_{23}-B\begin{pmatrix}0&\star&1&3\\0&2&1&3\end{pmatrix}F_{13}\\
&-B\begin{pmatrix}0&\star&1&2\\0&3&1&2\end{pmatrix}F_{12}+B(0\star 1\,2\,3)\,F_{123},\\
&(2\lambda_\infty+2)\varpi\sim-\lambda_1\,W_0(1)\varpi-\lambda_2\,W_0(2)\varpi-\lambda_3\,W_0(3)\varpi\\
&+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_\infty+1}\,W_0(12)\varpi+\frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_\infty+1}\,W_0(13)\varpi+\frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_\infty+1}\,W_0(23)\varpi\\
&-\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_\infty+1)\lambda_\infty}\,W_0(123)\varpi.
\end{aligned}
$$

差分系は 7×7 の両立条件を満たす行列 A_j で表される.

特に　$r_j=0$ すなわち 円がすべて点に縮約した場合を考察する.
この場合は　定義より

$$B(0\star j)=0\quad (1\le j\le 3)$$

であって　$H^2_{\nabla}(X,\Omega^{\cdot})$ の次元は 4 である. 以下に見るように　基底を $F_{jk},\ F_{123}$ とすることができる.
実際, 等式

$$W_0(j)\varpi=B(0\star j)\,F_j=0$$

より

$$0=T_{-\varepsilon_j}W_0(j)\varpi\sim-(\lambda_\infty+\lambda_j)\,F_j-\lambda_k\{F_k+B\begin{pmatrix}0&\star&k\\0&\star&j\end{pmatrix}F_{jk}\}$$
$$-\lambda_l\{F_l+B\begin{pmatrix}0&\star&l\\0&\star&j\end{pmatrix}F_{jl}\}\quad(\{j,k,l\}\equiv\{1,2,3\}).$$

が成り立ち　F_1,F_2,F_3 は　$F_{12},F_{13},F_{23},F_{123}$ の 1 次結合で表示される :

$$F_j\sim\frac{\lambda_k(\lambda_k+\lambda_l)}{\lambda_\infty^2}\rho_{jk}^2F_{jk}+\frac{\lambda_l(\lambda_k+\lambda_l)}{\lambda_\infty^2}\rho_{jl}^2F_{jl}-\frac{\lambda_k\lambda_l}{\lambda_\infty^2}\rho_{kl}^2F_{kl},$$
$$W_0(jk)\varpi\sim\frac{\lambda_l\lambda_\infty}{\lambda_\infty^2}\rho_{jk}^2\,F_{jk}+\frac{\lambda_l(\lambda_j-\lambda_k-\lambda_l)}{\lambda_\infty^2}\rho_{jk}^2\rho_{jl}^2F_{jl}$$
$$+\frac{\lambda_l(\lambda_k-\lambda_j-\lambda_l)}{\lambda_\infty^2}\rho_{jk}^2\rho_{kl}^2F_{kl}.$$

この場合　差分系は基底 F_{jk},F_{123} をとることにより 4×4 の　両立条件を満たす行列　A_j で表される.
一方 $z=x_1+ix_2,\ a_j=-\alpha_{j1}-i\alpha_{j2}$ とおくと

$$\Phi(x)=|z-a_1|^{2\lambda_1}\,|z-a_2|^{2\lambda_2}\,|z-a_3|^{2\lambda_3}$$

と表され 2個の独立変数 $z, \overline{z}$ に関して 積表示 $\Phi(x) = \Psi(z)\overline{\Psi}(\overline{z})$ を持つ.

ただし

$$\Psi(z) = (z-a_1)^{\lambda_1}(z-a_2)^{\lambda_2}(z-a_3)^{\lambda_3},$$
$$\overline{\Psi}(\overline{z}) = (\overline{z}-\overline{a}_1)^{\lambda_1}(\overline{z}-\overline{a}_2)^{\lambda_2}(\overline{z}-\overline{a}_3)^{\lambda_3}.$$

等式

$$|(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)|^2 = \rho_{12}^2\rho_{13}^2\rho_{23}^2,$$
$$|a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_1a_2-a_1a_3-a_2a_3|^2 = \rho_{12}^4+\rho_{13}^4+\rho_{23}^4-\rho_{12}^2\rho_{13}^2-\rho_{12}^2\rho_{23}^2-\rho_{13}^2\rho_{23}^2$$

に注意して (6) の表示は 例題2 の複素共役な2個のテンソル積の形で得られる：

$$\prod_{\nu=1}^{4}[HessF]_{\mathbf{c}_\nu} = const\,\{\frac{\rho_{12}^4+\rho_{13}^4+\rho_{23}^4-\rho_{12}^2\rho_{13}^2-\rho_{12}^2\rho_{23}^2-\rho_{13}^2\rho_{23}^2}{\rho_{12}^4\rho_{13}^4\rho_{23}^4}\}^2$$

2個の臨界点が一致するのは 分子が0に等しくなる $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23}$ のとき, すなわち3個の円の中心が正3角形になる時で, 全ての臨界点が一致する.

参考文献

[1] K.Aomoto, Hypersphere arrangement and imaginary cycles for hypergeometric integrals, Advanced Studies in Pure Math., 62(2012), 1 - 26.

[2] K.Aomoto and M.Kita, Theory of Hypergeometric Functions, Springer , 2011.

[3] K.Aomoto and Y.Machida, Some problems of hypergeometric integrals associated with hypersphere arrangement, Proc. Japan Acad., 91, Ser.A, No.9 (2015).

[4] ——, Hypergeometric integrals associated with hypersphere arrangements and Cayley-Menger determinants, preprint, 2018 to appear in Hokkaido J. Math.

[5] ——, Contiguity relation of hypergeometric integrals associated with hypersphere arrangements, preprint 2019.

[6] F.R.Gantmacher, Matrix Theory, II, Chelsea, 1959.

[7] P.Orlik and H.Terao, Arrangements and Hypergeometric Integrals, MSJ Memoirs, vol 9, 2001.

* *