

超球面配置に付随する特殊微分 1 次型式 と Cayley-Menger 行列式

青本和彦

平成 29 年 3 月 9 日

c.f.

[1] K.Aomoto, Configurations and invariant Gauss-Manin connections of integrals, I,II. Tokyo J. Math., 5(1982), 249-287; 6(1983), 1-24.

[2] -, Vanishing of certain 1-form attached to a configuration, Tokyo J. Math., 9(1986), 453-455.

[3] -, Gauss-Manin connections of Schläfli type for hypersphere arrangements, Ann. Inst.Fourier, 53(2003), 977-995.

[4] - and Y.Machida, Hypergeometric integrals associated with hypersphere arrangements and Cayley-Menger determinants, preprint, 2016, Aug.

[5] K.Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, J.Fac.Sci., Univ. of Tokyo, 27(1980), 265-291.

1 超球面配置に付随する one form

n 次元 Euclid 空間に m 個の超球面からなる超球面配置 $\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^m S_j$ が与えられているとする. S_j の中心を O_j 半径を r_j とする. $\bigcup_{j=1}^m S_j$ において $m+1$ 次の Cayley-menger 型の配置行列 $B = (b_{jk})_{0 \leq j,k \leq m}$ はその成分 b_{jk} が

$$\begin{aligned}
b_{jj} &= 0 \ (j \in \{0, \star, 1, \dots, m\}), b_{0k} = b_{k0} = 1 \ (k \in \{\star, 1, \dots, m\}), \\
b_{\star k} &= b_{k\star} = r_k^2 \ (1 \leq k \leq m), \\
b_{jk} &= \rho_{jk}^2 \ (1 \leq j, k \leq m)
\end{aligned}$$

で与えられる. すなわち

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_m^2 \\ 1 & r_1^2 & 0 & \rho_{12}^2 & \dots & \rho_{1m}^2 \\ 1 & r_2^2 & \rho_{12}^2 & 0 & \dots & \rho_{2m}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & r_m^2 & \rho_{m1}^2 & \rho_{m2}^2 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$J, K \subset \{\star, 1, 2, \dots, m\}$ に対する B の小行列式 (Cayley-Menger の行列式) $B \begin{pmatrix} 0 & J \\ 0 & K \end{pmatrix}$, (ただし $J = K$ のとき $B \begin{pmatrix} 0 & J \\ 0 & J \end{pmatrix} = B(0J)$) と表す.

特に

$$\begin{aligned}
B(0j) &= B(0\star) = -1, \ B(0\star j) = 2r_j^2, \ B(0jk) = 2\rho_{jk}^2, \\
B \begin{pmatrix} 0 & \star & k \\ 0 & j & k \end{pmatrix} &= r_k^2 + \rho_{jk}^2 - r_j^2, \ B \begin{pmatrix} 0 & \star & j \\ 0 & \star & k \end{pmatrix} = r_j^2 + r_k^2 - \rho_{jk}^2, \\
B \begin{pmatrix} 0 & j & l \\ 0 & k & l \end{pmatrix} &= \rho_{jl}^2 + \rho_{kl}^2 - \rho_{jk}^2.
\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}
B(0\star jk) &= r_j^4 + r_k^4 + \rho_{jk}^4 - 2r_j^2\rho_{jk}^2 - 2r_k^2\rho_{jk}^2 - 2r_j^2r_k^2, \\
B(0jkl) &= \rho_{kl}^4 + \rho_{jl}^4 + \rho_{jk}^4 - 2\rho_{jk}^2\rho_{jl}^2 - 2\rho_{kj}^2\rho_{kl}^2 - 2\rho_{lj}^2\rho_{lk}^2.
\end{aligned}$$

超球面配置について次の仮定をする:

$$(\mathcal{H}_1) \quad (-1)^p B(0J) > 0 \ (0 \leq |J| \leq n+1), \ (-1)^{p+1} B(0\star J) > 0 \ (0 \leq |J| = p \leq n+2).$$

Definition 1 変数 r_j^2, ρ_{jk}^2 に関する 1 次有理微分型式の列 θ_J を次のように帰納的に定義する：

$$\begin{aligned}\theta_j &:= -\frac{1}{2} d \log r_j^2 (1 \leq j \leq m), \\ \theta_{jk} &:= \frac{1}{2} d \log \rho_{jk}^2 (1 \leq j < k \leq m), \\ \theta_J &= - \sum_{j \in J} \frac{B \begin{pmatrix} 0 & \star & \partial_j J \\ 0 & j & \partial_j J \end{pmatrix}}{B(0 \cdot J)} \theta_{\partial_j J}\end{aligned}$$

例えば

$$\begin{aligned}\theta_{jkl} &= -\frac{1}{2} \frac{B \begin{pmatrix} 0 & \star & k & l \\ 0 & j & k & l \end{pmatrix}}{B(0 \ j \ k \ l)} d \log \rho_{kl}^2 - \frac{1}{2} \frac{B \begin{pmatrix} 0 & \star & j & l \\ 0 & k & j & l \end{pmatrix}}{B(0 \ j \ k \ l)} d \log \rho_{jl}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{B \begin{pmatrix} 0 & \star & j & k \\ 0 & l & j & k \end{pmatrix}}{B(0 \ j \ k \ l)} d \log \rho_{jk}^2.\end{aligned}$$

2 単位超球面内における球面配置と one form

$(n-1)$ 次元単位超球面 S_{n+1} 内での n 個の超球面配置 $\mathcal{A}$ は n 次元ユークリッド空間での n 個の超平面配置 $\mathcal{A}' = \bigcup_{j=1}^n H_j$ と単位超球面 S_{n+1} との共通部分として与えられる：

$$\begin{aligned}H_j : f'_j(x) &= \sum_{\nu=1}^n u_{j\nu} x_\nu + u_{j0} = 0 \quad (1 \leq j \leq n), \\ S_j \cap S_{n+1} &:= H_j \cap S_{n+1}.\end{aligned}$$

f'_j は次のように正規化することができる：

$$\sum_{\nu=1}^n u_{j\nu}^2 - u_{j0}^2 = 1.$$

$$a'_{00} = -1, a'_{j0} = u_{j0} \quad (1 \leq j \leq n)$$

$$a'_{jk} = \sum_{\nu=1}^n u_{j\nu} u_{k\nu} - u_{j0} u_{k0} \quad (1 \leq j, k \leq n)$$

と記す. A' に付随する $n+1$ 次対称行列 $A' = (a'_{jk})_{0 \leq j, k \leq n}$ の小行列式を $A' \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix}$, ($J = K$ の場合には $A' \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix} = A'(J)$ で表す.) $S_1, \dots, S_{n+1}$ ($m = n+1$) に関する仮定は行列 A' を用いて次のように言い換えられる:

$$(\mathcal{H}'_1) : -A'(0 \ J) > 0 (J \subset \{1, 2, \dots, n\}), A'(J) > 0 (J \subset \{1, 2, \dots, n+1\}).$$

Definition 2 変数 a'_{j0} , a'_{jk} に関する 1 次有理微分型式 θ'_J を次のように帰納的に定義する:

$$\begin{aligned} \theta'_j &:= da'_{j0}, \\ \theta'_{jk} &:= da'_{jk} - \frac{A' \begin{pmatrix} 0 & k \\ j & k \end{pmatrix}}{A'(0 \ k)} da'_{k0} - \frac{A' \begin{pmatrix} 0 & j \\ k & j \end{pmatrix}}{A'(0 \ j)} da'_{j0}, \\ \theta'_J &:= - \sum_{j \in J} \frac{A' \begin{pmatrix} 0 & \partial_j J \\ j & \partial_j J \end{pmatrix}}{A'(0 \ \partial_j J)} \theta'_{\partial_j J} \quad (n \geq |J| \geq 3). \end{aligned}$$

[claim]

$\theta_J, \frac{\theta'_J}{A'(0 \ J)}$ は すべて logarithmic one form である.

Remark 文献 [2] では積分の等式の帰結として $\frac{\theta'_J}{A'(0 \ J)}$ が logarithmic であることを示した. 未だに代数的には証明していない.

3 両者の関係

実は §1 で記した Cayley-Menger 行列式と §2 で述べた行列との間には関係がある. S_{n+1} を $n-1$ 次元単位超球面とする.

§2 の状況下で Cayley-Menger 行列式 $B \begin{pmatrix} 0 & J \\ 0 & K \end{pmatrix}$ と表す.

まず次の等式が成り立つ:

$$B(0 \star n + 1) = 2, \quad B(0 \star j n + 1) = -1.$$

$$\begin{aligned} a'_{j0} &= B \begin{pmatrix} 0 & j & n+1 \\ 0 & \star & n+1 \end{pmatrix}, \\ a'_{jk} &= -B \begin{pmatrix} 0 & \star & j & n+1 \\ 0 & \star & k & n+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lemma 3 $\frac{\theta'_{jk}}{A'(0jk)}$ は closed form ではないが logarithmic form である.

なぜなら

$$\begin{aligned} \frac{\theta'_{jk}}{A'(0jk)} &= \frac{1}{2A' \begin{pmatrix} 0 & j \\ 0 & k \end{pmatrix}} d \log \frac{A'(0j) A'(0k)}{A'(0jk)} \\ &= -\frac{1}{4B \begin{pmatrix} 0 & j & n+1 \\ 0 & k & n+1 \end{pmatrix}} d \log \frac{B(0jn+1) B(0kn+1)}{B(0j, kn+1)}. \end{aligned}$$

$$-A'(0jk) = A'(0j) A'(0k) - \left\{ A' \begin{pmatrix} 0 & j \\ 0 & k \end{pmatrix} \right\}^2$$

が成り立っている.