Hamilton-Jacobi 方程式における相関数の存在と一意性の問題

青本和彦

平成 28 年 3 月 3 日

この講演では中心方向場の存在に関するひとつの十分条件を与える.

1　中心方向場

n 次元ユークリッド空間の凸領域 Ω において Hamilton-Jacobi 方程式について考察する.

Ω の接バンドルを $T(\Omega)$, 余接バンドルを $T^*(\Omega)$ で表す. Ω の座標を $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $T(\Omega)$, $T^*(\Omega)$ のファイバーの座標を $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ で表す. この座標によって同型

$$
\begin{aligned}
T(\Omega) &\cong \Omega \times \mathbf{R}^n \ni (x, y), \\
T^*(\Omega) &\cong \Omega \times \mathbf{R}^n \quad \ni (x, p)
\end{aligned}
$$

が得られる.　自然な射影

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &: T(\Omega) \ni (x, y) \longrightarrow x \in \Omega, \\
\pi_2 &: T^*(\Omega) \ni (x, p) \longrightarrow x \in \Omega
\end{aligned}
$$

が定義される.

$[\alpha, \beta] \times T^*(\Omega)$ 上に C^2 級の Hamiltonian $H(t, x, p)$ が与えられているものとする.

$H(t, x, p)$ に関して次の仮定をする：

$(\mathcal{C}_0)$: $H(t,x,p)$ は p に関して狭義凸である．
$T^*(\Omega)$ 内の C^1 級曲線

$$\tilde{\Gamma} : [\alpha,\beta] \ni t \longrightarrow (x,p) = (x(t),p(t)) \in T^*(\Omega)$$

において t による微分を $(\dot{x},\dot{p}) = (\frac{dx}{dt},\frac{dp}{dt}) \in T_{x(t)}(\Omega) \times T^*_{x(t)}(\Omega)$ で表す．
$T^*(\Omega)$ における Hamilton の運動方程式は

$$\dot{x}_j = H_{p_j},\ \ \dot{p}_j = -H_{x_j} \quad (1 \le j \le n) \tag{1}$$

で与えられる． その軌道は Hamilton 流である．

Definition 1 $[\alpha,\beta] \times \Omega$ 上の曲線およびその接線ベクトル場

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} : \dot{x} = \psi(t,x), \\ &(\psi(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t,x) \frac{\partial}{\partial x_j} \in T_{t,x}([\alpha,\beta]\times\Omega) \end{aligned} \tag{2}$$

のある軌道 Γ が Hamilton 流のひとつの軌道 $\tilde{\Gamma}$ の π_2 による射影
であるとき Γ は Ω における停留曲線 (extremal) であるという．これは Lagrangian の変分法から得られる停留曲線に対応している故である．

Definition 2 Ω 内の曲線の族 $\mathcal{V}$ が与えられている．曲線の接線ベクトルをとることにより $\mathcal{V}$ は $[\alpha,\beta] \times T(\Omega)$ の部分集合と見なされる．
次の条件を満たすとき停留曲線場 (extremal field) であるという．
(i) 射影

$$\pi_1 : [\alpha,\beta] \times T(\Omega) \supset \mathcal{V} \ni (t,x,y) \longrightarrow (t,x) \in [\alpha,\beta] \times \Omega$$

は全単射である． π_1 の逆写像は

$$[\alpha,\beta] \times \Omega \ni (t,x) \longrightarrow (t,\psi(t,x)) \in [\alpha,\beta] \times T(\Omega)$$

で与えられる．

(ii) 任意の $(t,x,y) \in [\alpha,\beta] \times \mathcal{V}$ $(y = \psi(t,x))$ に対して ${\pi_2}^{-1} \circ \pi_1$ による (t,x) の逆像の点 $[\alpha,\beta] \times T^*(\Omega)$ がただひとつ存在する．それを $(t,x,p(t,x,y))$ とするとき写像

$$\rho : [\alpha,\beta] \times \mathcal{V} \ni (t,x,y) \longrightarrow (t,x,p(t,x,y)) \in [\alpha,\beta] \times T^*(\Omega)$$

は単射である.

(ii) ρ は Γ を Hamilton 流の軌道 $\tilde{\Gamma}$ に移す:

$$\begin{aligned} &H_{p_j}(t,x,p) = \psi_j(t,x), \\ &p_j = p_j(t,x,y),\ y_j = \psi_j(t,x) \quad (1 \le j \le n). \end{aligned}$$

以上の条件を満たすとき Ω は <u>停留曲線場 $\mathcal{V}$ に覆われている</u> という.

Proposition 3 $T^*(\Omega)$ 上の１次微分型式 (Poincaré-Cartan) 型式

$$\theta = \sum_{j=1}^{n} p_j dx_j - H(t,x,p)dt$$

を ρ によって $\mathcal{V}$ に引き戻したものすなわち θ に

$$p = p(t,x,y), y = \psi(t,x)$$

を代入したものは $[\alpha,\beta] \times \Omega$ において閉型式である (誤解の起こらないかぎり同じ θ で表す).

特に $\mathcal{V}$ が Ω のある点を出発点とする停留曲線からのみ成り立っているとき $\mathcal{V}$ は中心方向場 (central field of extremals) である.

2 最大値原理 (maximum principle)

$[\alpha,\beta] \times T(\Omega)$ 上に Lagrangian $F(t,x,y)$ が与えられていて
Ω 内の許容曲線上の積分

$$J[\gamma] = \int_\gamma F(t,x,\dot{x})dt$$

の極小問題を考察する.

次の仮定をおく:

$(\mathcal{C}_1)$: $[\alpha, \beta] \times T(\Omega)$ において $(F_{y_j y_k})$ は正定値である.

さらに $F(t, x, y)$ は $|y| \to \infty$ のとき無限大になる.

このとき正準変換 $t, x, y \longrightarrow t, x, p,$

$$p_j = F_{y_j}(t, x, y), \tag{3}$$

$$H(t, x, p) = -F(t, x, y) + \sum_{j=1}^{n} F_{y_j}(t, x, y) y_j \tag{4}$$

が可能で $H = H(t, x, p)$ は $[\alpha, \beta] \times T^*(\Omega)$ で定義される. $H(t, x, p)$ は仮定 $(\mathcal{C}_0)$ を満たす.

1 対 1　Legendre 写像

$$\tilde{p}_j = F_{y_j}(t, x, \tilde{y}) \quad (1 \leq j \leq n) \tag{5}$$

の逆変換により $\tilde{y}_j$ は $\tilde{p}_j$ の関数とも見られる.

Definition 4 $[\alpha, \beta] \times \Omega \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ 上に Pontryaginian

$$\tilde{H}(t, x, p, \tilde{p}) := -F(t, x, \tilde{y}) + \sum_{j=1}^{n} p_j \tilde{y}_j$$

が定義される. 停留曲線 γ 上で $x = x(t), p = p(t),\ t \in [\alpha, \beta]$ を任意にとるとき, $\tilde{p} = p$ とおけば $\tilde{H}(t, x, p, p) = H(t, x, p)$ である.

次の事実は古典的なものである:

$[\alpha, \beta] \times \Omega$ において A, B を端点とする曲線 γ 上の積分

$$S_{A,B} = \int_{\gamma} \theta$$

に関して次のことが言える:

Proposition 5 (Carathéodory-Bellman の maximum principle)

不等式

$$H(t, x, p) \geq \tilde{H}(t, x, p, \tilde{p}) \tag{6}$$

が成り立つ．その結果 Ω は停留曲線場 $\mathcal{V}$ で覆われているものとする．A, B を端点とする Ω 内の許容曲線に対し仮定 $(\mathcal{C}_1)$ の下で停留曲線 γ 上の積分 $S_{A,B}$ は極小値を与える．

このように Carathéodory-Bellman の maximum principle は停留曲線場の存在を前提としている．

c.f. H.J.Pesch and R.Bulirsch, The maximum principle, Bellman's and Carathéodory's work, Jour. of Optimal Theory and Appli , 80(1994), 199-225.

3 ひとつの十分条件

以下は停留曲線場は中心方向場に限って考察する．
(1) のひとつの軌道

$$x = x(t),\ p = p(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]) \tag{7}$$

を固定する．

Lemma 6 (7) の両端の x-座標を固定する停留曲線の変分において微小変分

$$x_j \to x_j + \varepsilon\xi,\ p_j \to p_j + \varepsilon\eta_j \quad (\varepsilon \text{は無限微小量})$$

に対して方程式 *(1)* の変分方程式である線形化方程式は，ξ, η に関して線形方程式系であってしかも $t, x(t), p(t)$ に依存する新たな Hamiltonian

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H} := \mathcal{H}(t, x, p; \xi, \eta) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} H_{x_j x_k}\xi_j\xi_k + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} H_{x_j p_k}\xi_j\eta_k + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} H_{p_j p_k}\eta_j\eta_k
\end{aligned}$$

に付随する線形の Hamilton の運動方程式で与えられる (Jacobi の方程式系)：

$$\dot{\xi}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_j} = \sum_{k=1}^{n} H_{x_k p_j} \xi_k + \sum_{k=1}^{n} H_{p_j p_k} \eta_k, \tag{8}$$

$$\dot{\eta}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_j} = -\sum_{k=1}^{n} H_{x_j x_k} \xi_k - \sum_{k=1}^{n} H_{x_j p_k} \eta_k \quad (1 \leq j \leq n). \tag{9}$$

j, k 成分が $H_{x_k p_j}, H_{p_j p_k}, -H_{x_j x_k}, -H_{x_j p_k}$ である $n \times n$ の行列をそれぞれ $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ で表せば $2n$ 次行列

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

は無限小のシンプレクティック行列である :

$${}^tA_{11} = -A_{22}, {}^tA_{12} = A_{12}, {}^tA_{21} = A_{21}.$$

E_n で n 次単位行列を表すとき, 方程式系 (8),(9) の基本解を

$$\Xi = \Xi(t) = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{pmatrix}, \ \Xi(\alpha) = E_{2n}$$

で表す. Ξ は $2n$ 次のシンプレクティック行列である. すなわち行列

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$$

に対して等式

$${}^t\Xi \, J \, \Xi = J$$

が成り立つ.

Lemma 7

$$\det \Xi_{11} \neq 0$$

ならば Ξ は一意的な Gauss 分解をもつ.

$$\Xi = \begin{pmatrix} E_n & \\ X_{21} & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ 0 & Y_{22} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

ただし

$$X_{21} = \Xi_{21}\Xi_{11}^{-1},\ Y_{11} = \Xi_{11}, Y_{12} = \Xi_{12}, Y_{22} = -\Xi_{21}\Xi_{11}^{-1}\Xi_{12} + \Xi_{22}$$

であって

$${}^tX_{21} = X_{21}, {}^tY_{11}Y_{22} = E_n.$$

を満たす.

方程式系 (8)-(9) を Pfaff 方程式系として表示すれば

$$\dot{\Xi} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \Xi \tag{11}$$

の形に表される. このとき X_{21} は次の行列型 Riccati 方程式を満たす:

$$\dot{X}_{21} + X_{21}A_{11} - A_{22}X_{21} + X_{21}A_{12}X_{21} - A_{21} = 0. \tag{12}$$

さらに Y_{jk} に関して等式

$$\dot{Y}_{11} = \big(A_{12}X_{21} + A_{11}\big)Y_{11}, \tag{13}$$

$$\dot{Y}_{22} = \big(-X_{21}A_{12} + A_{22}\big)Y_{22}, \tag{14}$$

$$\dot{Y}_{12} = A_{12}Y_{22} + (A_{12}X_{12} + A_{11})Y_{12}. \tag{15}$$

を満たす.

Lemma 8 逆に (12) が X_{21} に関して正則解をもてば Y_{jk} を (13)-(14) を満たすように決めることができる. その結果 Gauss 分解が可能となり $\det \Xi_{11} \neq 0$ が結論として導かれる.

特に

$$A_{21} = 0 \tag{16}$$

の場合には $\Xi_{21}=0$ で $Y_{11}=\Xi_{11}$, $Y_{12}=\Xi_{12}$, $Y_{22}=\Xi_{22}$ すなわち

$$\Xi=\begin{pmatrix}\Xi_{11} & \Xi_{12}\\ & \Xi_{22}\end{pmatrix}. \tag{17}$$

さて Hamiltonian$H(x,p)$ に対しては仮定 $(\mathcal{C}_0)$ の他に次の仮定をおく　:

$(\mathcal{C}_2)$: $H(x,p)$ は t によらず, x に関して 1 次の多項式である.

この仮定の下では Ω として $H(x,p)$ が p に関して狭義凸となるような x の点全体の連結成分をとることができる．実際そのような Ω は凸領域である.

Lemma 9 *仮定 $(\mathcal{C}_2)$ の下に (8)-(9) は (16) を満たす.*

次は停留曲線の共役点に関する Jacobi の条件として知られている:
Jacobi の方程式系 (8)-(9) の解 $\xi=\xi(t),\eta=\eta(t)$ で初期条件

$$\xi(\alpha)=0 \tag{18}$$

を満たす 1 次独立なものはたかだか n 個である．いま n 個存在したとしそれらを (ξ^k,η^k) $(1\le k\le n)$ とする．$\xi^k(t)=(\xi_1^k(t),\dots,\xi_n^k(t))$ が $[\alpha,\beta]$ の各点 t において 1 次独立であり続けるならば言い換えれば n 次行列式 $\det[\xi^1,\dots,\xi^n]$ が

$$\det[\xi^1,\dots,\xi^n](t)\neq 0 \quad (\alpha<t\le\beta)$$

を満たすならば区間 $[\alpha,\beta]$ 内に共役点は存在しない.

この条件はまた次のようにも言い換えられる：

(18) を満たす (8)-(9) の非自明な解 $\xi(t),\eta(t)$ は $\alpha<t\le\beta$ のどの点 t においても

$$\xi(t)\neq 0$$

を満たす.

Theorem 10 仮定 $(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_2)$ の下ではすべての中心方向場に共役点は存在しない.

Proof. 実際 Jacobi 場は ξ, η に関して

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_{11}\xi + A_{12}\eta, \\ \dot{\eta} &= A_{22}\eta. \end{aligned}$$

$\xi(\alpha) = 0, \eta(\alpha) = \eta^0$ を満たす解は

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \Xi_{11}(t) \int_\alpha^t \Xi_{11}^{-1}(t')A_{12}(t')\Xi_{22}(t')\eta^0\, dt', \\ \eta(t) &= \Xi_{22}(t)\eta^0 \end{aligned}$$

と表される. 仮定から行列 A_{12} は対称で正定値である. いま仮にある点 t において $\xi(t) = 0$ と仮定すれば

$$0 = \Xi_{11}(t) \int_\alpha^t \Xi_{11}^{-1}(t')A_{12}(t')\Xi_{22}(t')\eta^0\, dt'$$

$\Xi_{22} = {}^t\Xi_{11}^{-1}$ および $\det \Xi_{11}(t) \neq 0$ に注意して右辺は

$$\int_\alpha^t \Xi_{11}^{-1}(t')\, A_{12}(t')\, {}^t\Xi_{11}(t')^{-1}\eta^0\, dt' = 0$$

一方, 被積分関数の行列は正定値であり, 正定値行列の積分は正定値であるから得られた積分は正則行列になる :

$$\int_\alpha^t \Xi_{11}^{-1}(t')\, A_{12}(t')\, {}^t\Xi_{11}(t')^{-1}\, dt' > 0$$

故に $\eta^0 = 0$. こうして $\xi(t)$ は恒等的に 0 に等しくなり矛盾. □

Corollary 11 Theorem 10 と同じ仮定の下で Ω の任意の点を中心とする中心方向場が存在する.

Ω が中心方向場に覆われているとき, 停留曲線の始点 x^0 とするとき相関数 $S(t,x)$ は x^0 と x を結ぶ許容曲線 $\gamma : [0,t] \to \Omega$ を用いて

$$S(t,x) = \int_\gamma \theta \quad (\text{積分値は}\gamma\text{のホモトピー類のみに依存})$$

と表される. そして $S = S(t,x)$ は次の Hamilton-Jacobi 方程式を満たす:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(x, S_x) = 0.$$

$H(x,p)$ が p に関して斉次 2 次式の場合, すなわち計量テンソル g^{jk} を用いて

$$H(x,p) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}(x)\, p_j p_k$$

と表される場合には

$$S(t,x) = \frac{s^2}{2t}$$

と表される. ここで s は点 x^0, x の Riemann 距離を表す.

Remark $H = H(x,p)$ が p に関して斉次 1 次の場合には仮定 $(\mathcal{C}_1)$ は満たされない. この場合には H は C.Carathéodory の正正則 (positive regular) 条件を仮定すれば Theorem 10 が成り立つ.

すなわち超平面

$$\sum_{j=1}^{n} H_{p_j} \xi_j = 0$$

を満たすベクトル ξ の 2 次形式 $\sum_{j,k=1}^{n} H_{p_j p_k} \xi_j \xi_k$ は正定値であるとする.

そして H の代わりに Hamiltonian

$$\tilde{H}(x,p) = H(x,p) - 1$$

を $\tilde{H}(x,p) = 0$ すなわち $H(x,p) = 1$ に制限して扱うのが適切と思われる.

H がさらに退化している場合も考えられるがその場合に上記 Theorem 10 が成立するかどうかは定かではない.

c.f.

C.Carath'eodory, Calculus of Variations and Partial Differential Equations of The First Order, II, Holden-Day, 1967.

S.Sternberg, Lectures on Differential Geometry, Prentice Hall, 1964.

Sh.Kobayashi and K.Nomizu, Foundations of Differential Geometry, II, Interscience, 1969.

L.S.Pontryagin, V.G.Boltyanskii, R.V.Gamkrelidge and V.G.Mischenko, THe Mathematical Theory of Optimal Processes, Interscience, 1962.

V. G. Boltyanskii, Mathematical Methods of Optimal Control, 1971.